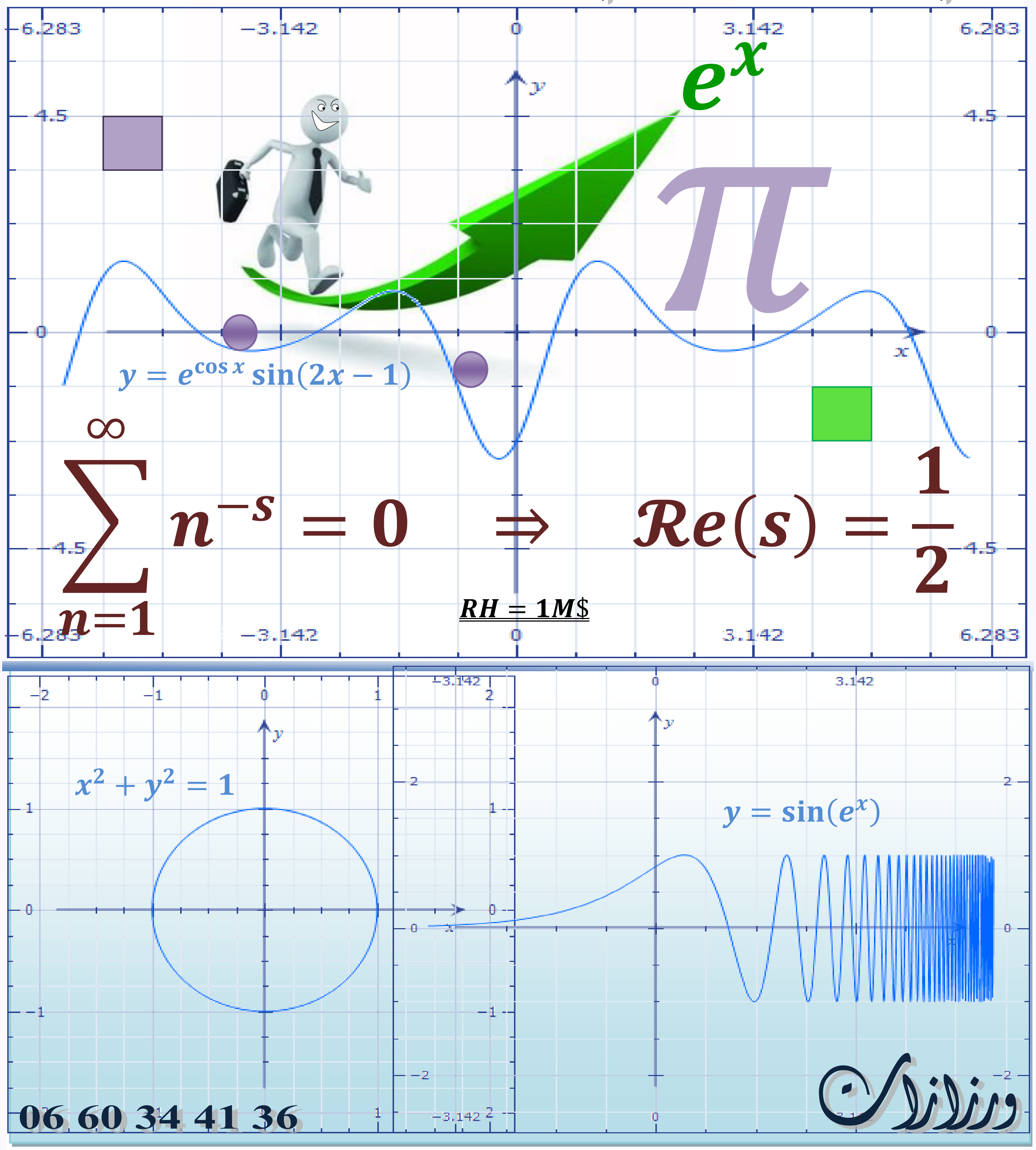
الامتحانات الوطنية لنيل شهادة البكالوريا

من 2003 إلى 2014 في مادة الرياضيات لفائدة تلاميذ السنة الثانية بكالوريا شعبة العلوم الرياضية أ و ب

عمل تطوعي من انجاز الأستاذ بدر الدين الفاتحي - http://www.professeurbadr.blogspot.com



نيابة ورزازات

الامتحان

لقد أجلت أجوبة أربعة مواضيع إلى أجل غير مسمى ، لكن سوف تجدونها قريبا منشورة في المدونة

تمهيد لوطنيات الرياضيات

يُمثل هذا الكتاب النسخة المعدَّلة و المنقَّحة من كتاب وطنيات العلوم الرياضية. و هو ثمرة مجهود فردي مُدعَّم بملاحظات بعض تلاميذ المغرب و الجزائر و تونس. و في هذا الباب، أشكر التلميذ وليد الشرقاوي من مدينة وادي زم على الملاحظات التي أسداها طيلة الموسم الدراسي، و أقدر له تشجيعاته المتواصلة. أسأل الله له التوفيق و السداد و أن يجعله مواطنا صالحا يخدم هذا الوطن العزيز. كما أشكر التلميذين عبد الحليم الراشدي من مدينة تاونات و بدر الدين الناصري من الرباط اللذان نشرا النسخة الماضية على نطاق واسع داخل تخوم الأينرنت. و أشكر جزيل الشكر عثمان بوارك من وهران الجزائر و خالد مسناوي من تونس على تشجيعاتهما المتواصلة عبر الهاتف. أسأل الله أن يوفقهم جميعا لصالح الأعمال و أن يهديهم سبيل الرشاد.

أرجوا من تلاميذ هذا الموسم أن يحذوا حذو هؤلاء ، و أن يرسلوا أية ملاحظة عبر SMS طيلة هذا العام. و من أجل هذا الهدف وضعت رقما هاتفيا لهذا الغرض و ليس لتعْبِئَتِهِ كما ادعى بعض المفكرين. أولئك أراهم قد ضلوا ضلالا بعيدا. و منهم من أساء الفهم في صورة كانت الغاية من ورائها النكتة و روح الدعابة ، فراحوا يفسرون و يحللون في فراغ ، حتى إذا خلصوا من ذلك أخذوا يقذفون الخفي و الباد . لقد مشى الطاووس يوما باختيالٍ ، فقلَّدَ شكل مشيته بنوهُ. قال على ما تختالونَ قالوا : سبقت بهِ و نحن مقلدوهُ . و ينشأ الفتى على ما كان عوَّدهُ أبوهُ.

و السلام عليم و رحمة الله و بركاته.

ذ بدر الدين الفاتحي

التمرين الأول : (3,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) التالية : $(E) \ : \ x^2(x^2+7) = y(2x+y)$

ليكن (x,y) عنصرا من $(\mathbb{N}^*)^2$ و ليكن δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

نضع : $x = \delta a$ و $y = \delta b$

1 أ) نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E) . تحقق أن : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b)$ — 0,50 ن

ب) استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $\delta^2 a^2 + 7 = kb$ و $2a + b = ka^2$ — 0,50 ن

ج) بين أن : $a = 1$ — 0,50 ن

د) استنتج أن : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$ — 0,75 ن

2 حل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة (E) . — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر المنحنى (E) الذي معادلته : $y = \dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$

1 أ) بين أن (E) جزء من إهليلج يتم تحديده . — 0,75 ن

ب) أرسم المنحنى (E) . — 0,50 ن

لتكن A و B النقطتين اللتين زوجا إحداثيتيهما على التوالي هما : $(4,0)$ و $(0,3)$

نعتبر النقطة M_1 من (E) التي أفصولها x_1 حيث x_1 ينتمي إلى المجال $[0,4]$.

نضع : $x_1 = 4cos(t_1)$ حيث : $0 \leq t_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$.

و نعتبر التكامل الآتي : $I(x_1) = \dfrac{3}{4}\int_{x_1}^{4} \sqrt{16-x^2}\, dx$

باستعمال المكاملة بتغيير المتغير و وضع $x = 4cos(t)$ حيث $0 \leq t_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$

2 أ) بين أن : $I(x_1) = 6t_1 - 3sin(2t_1)$ — 1,00 ن

لتكن $S(x_1)$ مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OM_1) و المنحنى (E)

و لتكن S مساحة السطح المحصور بين المستقيمين (OA) و (OB) و المنحنى (E) .

ب) تحقق أن أرتوب النقطة M_1 هو $3sin(t_1)$. — 0,25 ن

ج) أحسب $S(x_1)$ بدلالة t_1 . — 0,25 ن

د) استنتج قيمة S . — 0,25 ن

و) بين صحة التكافؤ التالي : $S(x_1) = \dfrac{1}{2}S \iff t_1 = \dfrac{\pi}{4}$ — 0,25 ن

هـ) حدد إحداثيتي النقطة M_1 في المعلم $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ في حالة $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$. — 0,25 ن

التمرين الثالث : (4,5 ن)

I **الجزء الأول** : لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لتكن E المجموعة المعرفة بما يلي : $E = \{ M_{(a,b)} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$

1 بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ و من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ — 0,75 ن

2 بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية . — 0,25 ن

3 أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y لدينا : $(x = y = 0) \iff (x^2+xy+y^2 = 0)$ — 0,50 ن

ب حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E,+,\times)$ — 0,25 ن

ج استنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي . — 0,50 ن

الجزء الثاني : ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

II 1 بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$. — 0,25 ن

نعتبر التطبيق ψ المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$\psi : E \to \mathbb{C}$$
$$M_{(a,b)} \to a+\sigma b$$

2 بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$. — 0,75 ن

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2 - z + 1 = 0$

3 حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة و اكتب حليها على الشكل المثلثي أو الأسي . — 0,75 ن

4 نفترض في هذا السؤال أن $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. بين أن ψ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$. — 0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

I لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{4\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$ وحدته : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,cm$

1 أحسب : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C})$ — 0,50 ن

2 أ بين أن : $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; f'(x) = 4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$ — 0,25 ن

ب إعط جدول تغيرات الدالة f . — 0,75 ن

3 بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α و β بحيث : $1<\alpha<\sqrt{e}<\beta<3$ — 0,75 ن

4 حدد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة التي أفصولها 1 . — 0,50 ن

5 أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$ — 0,75 ن

II 1 بين أن : $\forall t \in [0,+\infty[\; ; \; 1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1$ — 0,25 ن

2 استنتج أن : $\forall a \in [0,+\infty[\; ; \; a - \frac{a^2}{2} \le \ln(1+a) \le a$ — 0,50 ن

III ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \ge 4$.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{n\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$

و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 أدرس تغيرات الدالة f_n . — 0,50 ن

2 أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C}_n)$ و بين أنه يقبل نقطة انعطاف أفصولها $e^{5/6}$. — 0,50 ن

3 أ قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ و ذلك حسب قيم المتغير الحقيقي x . — 0,25 ن

ب استنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$ — 0,25 ن

4 بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين u_n و v_n بحيث : $1<u_n<\sqrt{e}<v_n$ — 0,50 ن

5 بين أن $(u_n)_{n\ge4}$ متتالية تناقصية قطعا مستعملا نتيجة السؤال 3) . — 0,50 ن

6 أ باستعمال II (2 بين أن : $\frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \le \ln(u_n) \le u_n - 1 \; ; \; (\forall n \ge 4)$ — 0,25 ن

ب استنتج أن : $\frac{(u_n)^2}{2n} \le u_n - 1 \le \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} \; ; \; (\forall n \ge 4)$ — 0,25 ن

ج بين أن : $\frac{1}{2n} \le u_n - 1 \le \frac{e}{n} \; ; \; (\forall n \ge 4)$ — 0,25 ن

د استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge4}$ متقاربة محددا نهايتها . — 0,50 ن

7 أ بين أن : $v_n > e^{5/6} \; ; \; (\forall n \ge 4)$ — 0,50 ن

ب استنتج أن : $\lim_{n\infty} v_n = +\infty$ — 0,50 ن

التمرين الأول : (3,5 ن)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء .
الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء .
نعتبر التجربة العشوائية التالية : " نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U ، إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V . و إذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V " .

نعتبر الأحداث التالية :
- R_1 : " الكرة المسحوبة من U حمراء "
- B_1 : " الكرة المسحوبة من U زرقاء "
- R_2 : " الكرة المسحوبة من V حمراء "
- B_2 : " الكرة المسحوبة من V زرقاء "

1,00 ن — 1 — أحسب احتمال كل من الحدثين R_1 و B_1 .

1,00 ن — 2 — أحسب احتمال الحدث B_2 علما أن الحدث R_1 محقق , و احتمال B_2 علما أن B_1 محقق .

0,50 ن — 3 — بين أن : $p(B_2) = \frac{13}{21}$

0,50 ن — 4 — استنتج احتمال الحدث R_2 .

التمرين الثاني : (4,5 ن)

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $0 \le \theta \le 2\pi$. نضع : $p = 5\cos\theta + 3i\sin\theta$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $(E) \ : \ z^2 - 2pz + 16 = 0$

0,50 ن — 1 أ — تحقق أن : $p^2 - (3\cos\theta + 5i\sin\theta)^2 = 16$

0,50 ن — ب — أوجد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1| < |z_2|$

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما : z_1 و z_2 .

0,50 ن — 2 أ — بين أنه عندما يتغير θ في $[0,2\pi[$ فإن M_1 تتغير على دائرة $(\mathcal{C})$ ينبغي تحديد معادلة لها .

لتكن P منتصف $[M_1M_2]$. و لتكن (Γ) مجموعة النقط P عندما يتغير θ في المجال $[0,2\pi]$.

0,50 ن — ب — بين أن (Γ) إهليلج بؤرتاه هما النقطتان F و F' اللتان لحقاهما على التوالي هما 4 و -4 .

0,50 ن — 3 أ — بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C} \setminus \{4\}$. لدينا التكافؤ التالي :

$$\left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right) \iff (ab = 16)$$

0,50 ن — ب — استنتج أن : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$

0,50 ن — ج — بين أن : $\left(\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1F'}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{M_2F}, \overrightarrow{M_2F'}\right) \ [2\pi]$

0,50 ن — 4 أ — بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي : $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$

0,50 ن — ب — بين أن المماس (T) عمودي على المستقيم (M_1M_2) .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

لكل زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المصفوفة : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ نعتبر المجموعة (E) المعرفة بما يلي : $E = \{ M_{(a,b)} \ ; \ a^2 - 2b^2 = 1 \}$

0,25 ن | 1 | نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ تحقق أن : $A \in E$

0,50 ن | 2 | أ | بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن القانون $\times$ تبادلي في المجموعة E .

0,50 ن | ب | بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة للقانون $\times$.

0,50 ن | ج | بين أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية

نضع : $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A^{n+1} = A^n \times A$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

و نعتبر المجموعة : $G = \{ A^n \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$

0,25 ن | 3 | أ | تحقق أن : $G \subset E$

لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة للقانون $\times$ في المجموعة E .

0,50 ن | ب | بين أن : $H = \{ B^n \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$ حيث : $B = \begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

0,50 ن | ج | بين أن $G \cup H$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الرابع : (9,5 ن)

I | لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g_n(x) = x + e^{-nx}$

و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة g_n في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن | 1 | أ | أدرس تغيرات الدالة g_n .

0,50 ن | ب | بين أن g_n تقبل قيمة دنيا عند عدد حقيقي u_n يتم تحديده بدلالة n.

0,50 ن | 2 | أ | أحسب النهايتين : $\lim_{x \to -\infty} g_n(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g_n(x)$

0,50 ن | ب | حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$

0,50 ن | 3 | أ | أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ الممثلين على التوالي للدالتين g_1 و g_2 .

0,50 ن | ب | أرسم في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$. (نأخذ : $\|\vec{i}\| = 2\,cm$)

1,00 ن | 4 | أ | باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب بدلالة x التكامل التالي : $I(x) = \int_0^x t\, e^{-2t}\, dt$

لتكن h_2 قصور الدالة g_2 على المجال $[0, \ln 2]$.

0,50 ن | ب | أحسب حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل .

1,00 ن | 5 | نضع : $v_n = g_n(u_n)$. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربتان و حدد نهايتيهما .

II | نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = x + e^{nx}$

و ليكن (Γ_n) منحنى الدالة f_n في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن | 1 | أدرس تغيرات الدالة f_n

0,50 ن | 2 | استنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n.

0,50 ن | 3 | أ | بين أن : $\alpha_1 \in \left]-\ln 2 \; ; \frac{-1}{2}\right[$

0,50 ن | ب | بين أن الكميتين $(x - \alpha_1)$ و $(e^x + \alpha_1)$ لهما نفس الإشارة .

لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\left]-\infty \; ; \frac{-1}{2}\right]$ بما يلي : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

0,50 ن | 4 | أ | بين أن الدالة φ تناقصية على المجال $\left]-\infty \; ; \frac{-1}{2}\right]$.

0,50 ن | ب | استنتج أن : $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}|x - \alpha_1|$

نعتبر المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} \beta_{n+1} = -e^{\beta_n} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N} \\ \beta_0 = \frac{-1}{2} \end{cases}$

0,50 ن | 5 | أ | بين أنه يوجد عدد حقيقي a بحيث : $|\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq a\,|\beta_n - \alpha_1|$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

0,50 ن | ب | بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الأول : (3,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

1 أ) بين أنه إذا كان n عددا فرديا فإن : $n^2 \equiv 1[8]$. — 0,50 ن

ب) بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن : $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$. — 0,50 ن

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد صحيحة طبيعية فردية .

2 أ) بين أن $(a^2+b^2+c^2)$ ليس مربعا كاملا . — 0,50 ن

ب) بين أن : $2(ab+bc+ac) \equiv 6[8]$. — 0,50 ن

(لاحظ أن : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$)

ج) استنتج أن : $2(ab+ac+bc)$ ليس مربعا كاملا . — 0,50 ن

د) بين أن : $(ab+ac+bc)$ ليس مربعا كاملا . — 0,50 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

لتكن E مجموعة المصفوفات المربعة التي تكتب على الشكل : $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

و لتكن F مجموعة المصفوفات المكتوبة على شكل : $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$

1 أ) بين أن : $M_a \times M_b = M_{ab}\ ;\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}_*^2$. — 0,50 ن

ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $\varphi(a) = M_a$.

ب) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$. — 0,50 ن

ج) استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(E,\times)$. — 0,50 ن

2 أ) بين أن : $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}\ ;\ \forall (a,b) \in \mathbb{R}_*^2$ — 0,50 ن

ب) نضع : $G = E \cup F$. بين أن $(G,\times)$ زمرة . — 0,50 ن

ج) هل $(G,\times)$ زمرة تبادلية ؟ — 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن)

1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+z+1=0$. — 0,75 ن

نضع : $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ و $z' = \frac{1}{z^2+z+1}$

مع : $-\pi \le \theta \le \pi$ و $\theta \ne \frac{2\pi}{3}$ و $\theta \ne \frac{-2\pi}{3}$.

2 أ) تحقق أن : $1+z+z^2 = z(1+z+\bar{z})$. — 0,75 ن

ب) أحسب معيار و عمدة العدد العقدي z' بدلالة θ . — 0,75 ن

ج) نضع : $z' = x+iy$ حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. بين أن : $x^2+y^2 = (1-2x)^2$. — 0,75 ن

د) استنتج أن M ذات اللحق z' تنتمي إلى هذلول يتم تحديد مركزه و رأسيه و مقاربيه . — 0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

0,50 ن — **1** أحسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة تعريفها D_f .

0,50 ن — **2** أدرس تغيرات الدالة f .

ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن — **3** أ أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C})$.

0,25 ن — ب أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

II لتكن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ : $\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n} \ ; \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

0,25 ن — **1** بين أن : $e^x \geq x+1 \ ; \ (\forall x\epsilon\mathbb{R})$.

0,25 ن — **2** استنتج أن : $x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1} \ ; \ (\forall x > 0)$

0,50 ن — **3** أ باستعمال البرهان بالترجع بين أن : $0 < u_n < \frac{1}{n+1} \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$

0,75 ن — ب بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

نعتبر من أجل كل عنصر n من $\mathbb{N}^*$ المتتالية التالية : $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

0,75 ن — **4** أ بين أن : $v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right) \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$

0,50 ن — ب حدد نهاية المتتالية $(v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$.

III نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \ ; \ (\forall x > 0) \\ F(0) = 2\ln 2 \end{cases}$

0,25 ن — **1** أ تحقق أن : $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t}dt = 2\ln 2 \ ; \ (\forall x > 0)$

0,50 ن — ب باستعمال نتيجة السؤال 1) من الجزء الثاني بين أن : $-t < e^{-t} - 1 \leq 0 \ ; \ (\forall t > 0)$.

0,50 ن — **2** أ بين أن : $-3x^2 \leq F(x) - 2\ln 2 \leq 0 \ ; \ (\forall t > 0)$.

0,25 ن — ب استنتج أن F دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر .

0,25 ن — **3** أ بين أن : $f(t) < e^{-t} \ ; \ (\forall t \geq 1)$.

0,50 ن — ب استنتج النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,75 ن — **4** أ بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و احسب $F'(x)$.

0,50 ن — ب إعط جدول تغيرات الدالة F .

0,50 ن — ج أنشئ $(\mathcal{C}_F)$ المنحنى الممثل للدالة F في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

لتكن G الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t}\ln t \ dt$

0,50 ن — **5** أ بين أن : $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x}\ln(4x) + e^{-x}\ln(x) \ ; \ (\forall x > 0)$.

0,50 ن — ب أحسب النهاية التالية : $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} (e^{-x} - e^{-4x})\ln x$

0,25 ن — ج استنتج النهاية التالية : $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} G(x)$

التمرين الأول : (3,5 ن)

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس.
نسحب عشوائيا كرة من هذا الكيس ، إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس
و إذا كانت بيضاء نضع بدلها 3 كرات حمراء في الكيس ثم نسحب كرة من الكيس .

0,50 ن — **1** أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين .
0,50 ن — **2** أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين .
0,75 ن — **3** أحسب الإحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين .
0,75 ن — **4** أحسب الاحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة بيضاء.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

0,75 ن — **1** حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $(E)\ :\ 3x-2y=1$
0,25 ن — **2** أ ليكن $n\epsilon\mathbb{N}$. بين أن الزوج $(14n+3\,;21n+4)$ حل للمعادلة (E) .
0,50 ن — ب استنتج أن العددين $(14n+3)$ و $(21n+4)$ أوليان فيما بينهما .
ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين $(2n+1)$ و $(21n+4)$.
0,50 ن — **3** أ بين أن : $d=1$ أو $d=13$.
0,25 ن — ب أثبت صحة التكافؤ التالي : $n\equiv 6[13]\ \Leftrightarrow\ d=13$.
من أجل $n\geq 2$ نضع : $A=21n^2-17n-4$ و $B=28n^3-8n^2-17n-3$
0,25 ن — **4** أ بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على العدد $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.
0,50 ن — ب حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$
ليكن a عددا عقديا غير منعدم مكتوب جبريا على شكل : $a=\alpha+i\beta$.
لتكن (H) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2$.

0,50 ن — **1** أ حدد طبيعة المجموعة (H) .
0,50 ن — ب أنشئ (H) في الحالة $a=1+i$.
لتكن $(\mathcal{C})$ مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}$.
0,75 ن — **2** أ حدد طبيعة المجموعة $(\mathcal{C})$.
0,25 ن — ب أنشئ $(\mathcal{C})$ في الحالة $a=1+i$.
نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ النظمة (S) التالية :
$$(S)\ :\ \begin{cases} z^2-(\bar{z})^2=a^2-(\bar{a})^2\\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a})=4a\bar{a}\end{cases}$$
نضع : $u=z-a$.
0,75 ن — **3** أ بين أن (S) تكافئ النظمة (S') التالية :
$$(S')\ :\ \begin{cases} u\bar{u}=4a\bar{a}\\ (u+2a)(u^3-8a(\bar{a})^2)=0\end{cases}$$
نضع $a=re^{i\theta}$ حيث $r>0$ و $-\pi\leq\theta\leq\pi$.
0,75 ن — ب حدد بدلالة r و θ ألحاق نقط تقاطع المنحنيين $(\mathcal{C})$ و (H).
0,50 ن — ج استنتج أن تقاطع $(\mathcal{C})$ و (H) يتضمن ثلاث نقط و هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الرابع : (3,5 ن)

I لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $\begin{cases} f(x) = 4x\, e^{-x\ln 2} - 2 \\ g(x) = \frac{\ln(2x)}{x} \end{cases}$

و ليكن $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{T})$ المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في م م م $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,75 ن — **1** أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

0,50 ن — ب) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C})$.

0,75 ن — **2** أ) بين أن : $f'(x) = 4(1 - x\ln 2)e^{-x\ln 2}$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$.

0,75 ن — ب) اعط جدول تغيرات الدالة f . بين أن 1 و 2 هما الحلين الوحيدين للمعادلة $f(x) = 0$.

0,75 ن — **3** أدرس الدالة g : الفروع اللانهائية – النهايات – الرتابة .

0,50 ن — **4** أرسم المنحنيين $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{T})$ في نفس المعلم $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ و نأخذ : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 4\,cm$.
(تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب)

II ليكن k عدد حقيقا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$

0,75 ن — **1** أ) تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين α و β بحيث : $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$

0,75 ن — ب) حدد قيمة k بحيث يكون α و β هما حلا المعادلة $f(x) = 0$.

نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_k(x) = 4x\, e^{-kx} - 2$

0,50 ن — **2** أ) تأكد من أن : $f_k'(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$.

0,50 ن — ب) إعط جدول تغيرات الدالة f_k .

0,50 ن — **3** أ) استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b بحيث : $a < \frac{1}{k} < b$

0,75 ن — ب) بين أن : $a = \alpha$ و $b = \beta$.

0,75 ن — **4** أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^t x\, e^{-kx}\, dx = \frac{1}{k^2}(1 - kt\, e^{-kt} - e^{-kt})$; $(\forall t \epsilon \mathbb{R})$

0,75 ن — ب) أحسب التكامل : $I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)\, dx$ بدلالة α و β

0,50 ن — ج) استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$

0,75 ن — **5** بين أنه إذا كان u و v عنصرين مختلفين من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $\frac{\ln u}{u} = \frac{\ln v}{v}$
فإن : $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$

التمرين الأول : (3,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ ,\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ (a,b) * (x,y) = \left(\frac{ax+by}{2} , \frac{ay+bx}{2}\right)$$

نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ \left(m+\frac{1}{m} ; m-\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ m\in\mathbb{R}^* \right\}$

0,75 ن | 1 | بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة E .

ليكن φ التطبيق من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $(\forall m\in\mathbb{R}^*) \ ; \ \varphi(m) = \left(m+\frac{1}{m} \ ; \ m-\frac{1}{m}\right)$

0,50 ن | 2 | أ | بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

0,75 ن | ب | استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايد .

و حدد مماثل كل عنصر $\left(m+\frac{1}{m} ; m-\frac{1}{m}\right)$ حيث m عدد حقيقي غير منعدم .

نعتبر المجموعة (F) التالية : $F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 2 \ \ et \ \ y^2 = x^2 - 4 \}$

1,00 ن | 3 | أ | بين أن : $F = \left\{ \left(m+\frac{1}{m} ; m-\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ m > 0 \right\}$

1,00 ن | ب | بين أن $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا و أكبر من أو يساوي 5 .

0,50 ن | 1 | بين أن : $p^2 \equiv 1[3]$.

0,50 ن | 2 | أ | بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي q بحيث : $p^2 - 1 = 4q(q+1)$.

0,50 ن | ب | استنتج أن : $p^2 \equiv 1[8]$.

0,50 ن | 3 | بين أن : $p^2 \equiv 1[24]$

II ليكن a عددا صحيحا طبيعيا أوليا مع العدد 24 .

0,50 ن | 1 | بين أن : $a^2 \equiv 1[24]$.

0,50 ن | 2 | هل توجد أعداد صحيحة طبيعية $a_{23},\cdots,a_2,a_1$ بحيث :

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{23}^2 = 23997 \ \text{و} \ \forall\, k \in \{1,2,\cdots,23\} \ ; \ a_k \wedge 24 = 1$$

التمرين الثالث : (3,5 ن)

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}} \ ; \ \ \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى للممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. بحيث : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$

0,25 ن | 1 | أ | بين أن f متصلة على اليمين في الصفر .

0,25 ن | ب | بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .

0,50 ن | ج | بين أن f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

0,25 ن | 2 | أ | أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 ن | ب | بين أن : $(\forall t \geq 0) \ ; \ 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$

0,50 ن | ج | بين أن : $(\forall t > 0) \ ; \ \frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

النقطة				السؤال
0,25 ن			د	استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديد معادلته .
0,50 ن		3		أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) في نفس المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
	II			ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f_n(x) = \left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} \; ; \; \forall x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$
0,25 ن		1		بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .
0,50 ن		2		أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0,+\infty[$.
0,50 ن		3	أ	بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f_n(x) = \frac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,+\infty[$.
0,50 ن			ب	بين أن : $f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$, $(\forall x > 0)$
0,75 ن			ج	استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة . نضع : $a = \lim(a_n)$
0,50 ن			د	بين أن : $n\, a_n = 2\, e^{\left(\frac{2}{a_n}\right)} - 2$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$
0,50 ن			هـ	بين أن : $a = 0$
	III			نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\; dt$ (بحيث f هي الدالة المعرفة في الجزء الأول)
0,25 ن		1	أ	بين أن : $x\, f(x) \leq F(x) \leq x\, f(2x)$; $(\forall x > 0)$
0,25 ن			ب	أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
0,50 ن		2		بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$. و أن : $\begin{cases} F'(x) = e^{\frac{-2}{x}}\left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+(3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right) \; ; \; \forall x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$ ($F'_d(0)$ هو العدد المشتق للدالة F على اليمين في الصفر)
0,50 ن		3		إعط جدول تغيرات الدالة F .

التمرين الرابع : (3,5 ن)

النقطة			السؤال
			لكل عدد عقدي z مخالف للعدد (-1) نضع : $f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$
0,25 ن	1	أ	حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy) = iy$.
1,00 ن		ب	حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $(E) : f(z) = z$ نرمز بـ z_0 و z_1 و z_2 لحلول (E) حيث : $\mathcal{R}e(z_1) > Re(z_2)$ و $\mathcal{R}e(z_0) = 0$.
0,50 ن	2	أ	تحقق أن : $z_1 + 1 = e^{\left(\frac{i11\pi}{6}\right)}$ و $z_2 + 1 = e^{\left(\frac{i7\pi}{6}\right)}$.
0,75 ن		ب	استنتج الكتابة المثلثية لكل من العددين العقديين z_1 و z_2 . في هذا السؤال نفترض أن : $z = e^{i\alpha}$ حيث : $0 \leq \alpha < \pi$.
0,50 ن	3	أ	بين أن : $\overline{f(z)} = i\, z\, f(z)$.
0,25 ن		ب	حدد α إذا علمت أن : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$.
0,75 ن		ج	أكتب $f(z)$ على الشكل $(z) = r\; e^{i\varphi}$ حيث : $(r,\varphi)\, \epsilon\, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
0,50 ن	4		حدد z إذا علمت أن : $\lvert z\rvert = 1$ و أن : $\mathcal{R}e(f(z)) = \frac{1}{2}$

التمرين الأول : (3,5 ن)

ليكن $x \wedge y$ القاسم المشترك الأكبر للعددين النسبيين x و y .

و ليكن $\overline{abc}^{(x)}$ تمثيل العدد abc في نظمة العد ذات الأساس x .

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) : (x+1)^2 = 9 + 5y$.

0,50 ن | 1 أ | ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) . بين أن : $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$.

0,50 ن | ب | حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

0,75 ن | 2 | بين أن : $(\forall k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k + 1) = (k-3) \wedge 8$

0,75 ن | 3 | حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية : $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I | في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر المنحنى $(\mathcal{C}_m)$ المعرف بـ :

$$(\mathcal{C}_m) = \left\{ M(x, y) \, \epsilon \, \mathcal{P} \; ; \; \frac{x^2}{(10-m)} + \frac{y^2}{(2-m)} = 1 \; ; \; m \, \epsilon \, \mathbb{R} \setminus \{2; 10\} \right\}$$

1,00 ن | 1 | ناقش حسب قيم البارامتر الحقيقي m طبيعة المنحنى $(\mathcal{C}_m)$.

1,00 ن | 2 | إذا كان $(\mathcal{C}_m)$ مخروطيا ، إعط عناصره المميزة .

0,25 ن | 3 | أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_1)$.

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) \; : \; z^2 - (6\cos\alpha)z + 1 + 8\cos^2\alpha = 0 \quad ; \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

0,50 ن | II 1 | حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $\mathfrak{Im}(z_1) > 0$

0,25 ن | 2 أ | و لتكن M_1 و M_2 النقطتان ذواتا اللحقين z_1 و z_2 على التوالي . تحقق أن $M_1 \epsilon (\mathcal{C}_1)$

0,75 ن | ب | بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من $(\mathcal{C}_1)$ حيث يكون فيهما المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_1)$ موازيا للمستقيم (OM_1) .

0,75 ن | ج | تحقق أن : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 20 .

يحتوي كيس على 10 كرات بيضاء و $(n-10)$ كرة سوداء ، نفترض أن كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس . نسحب كرة من الكيس و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الكيس . نكرر هذه التجربة و نسمي p_k احتمال الحصول على k كرة بيضاء ($0 \leq k \leq n$).

0,50 ن | 1 | أحسب p_k بدلالة n و k .

نضع : $u_k = \frac{p_{k+1}}{p_k}$ حيث : $k \, \epsilon \, \{ 0; 1; 2; \cdots; (n-1) \}$.

0,50 ن | 2 أ | بين أن : $u_k = \frac{n-k}{k+1} \times \frac{10}{n-10}$

0,50 ن | ب | بين أن : $u_k \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 9$ و $u_k \leq 1 \Leftrightarrow 10 \leq k \leq n-1$.

1,00 ن | ج | استنتج أكبر قيمة عددية M للعدد p_k عندما يتغير k في المجموعة $\{0,1,\cdots,n\}$.

و بين أن : $M = \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^{n-10}}{(n-10)!}$

التمرين الرابع : (3,5 ن)

I | لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = (1+x)\, e^{-2x}$.

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن | 1 أ | أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,50 ن | ب | أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C})$.

0,50 ن | 2 | أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

0,50 ن | 3 أ | أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C})$.

0,50 ن | ب | أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن | 4 أ | بين أن الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية التالية : $(E):\ y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$

0,50 ن | ب | حدد الحل العام للمعادلة (E) .

II | ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و نرمز بـ $\mathcal{A}_n$ لمساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$

و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x = n$.

1,00 ن | 1 | أحسب المساحة $\mathcal{A}_n$ بدلالة n .

0,50 ن | 2 | أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty} \mathcal{A}_n$

III | لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = n\int_0^1 (f(x))^n\, dx$

0,75 ن | 1 | بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\, dt$ (يمكن وضع $xn = t$)

0,50 ن | 2 أ | بين أن : $\forall\, r\, \epsilon\, [1;2]\ ;\ 2 - r \leq \frac{1}{r} \leq 1$

0,75 ن | ب | استنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*), (\forall x\epsilon[0,n])\ ;\ x - \frac{x^2}{2n} \leq n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq x$

0,50 ن | 3 أ | بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n \leq \int_0^n e^{-x}\, dt$

0,75 ن | ب | بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ e^{\left(\frac{-1}{2\sqrt{n}}\right)} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x}\, dx \leq u_n$

0,75 ن | ج | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة و حدد نهايتها .

0,50 ن | 4 أ | بين أن : $\forall\, a\, \epsilon\,]0,1[\ ;\ \int_a^1 n(f(x))^n\, dx \leq n(1-a)(f(a))^n$

0,50 ن | ب | استنتج أن : $\forall\, a\, \epsilon\,]0,1[\ ;\ \lim\limits_{n\infty} \int_a^1 n(f(x))^n\, dx = 0$

0,50 ن | ج | أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty} \int_0^a n(f(x))^n\, dx$ لكل a من المجال $]0,1[$.

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

الامتحان الوطني الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
الدورة العادية 2006

مادة الرياضيات
شعبة العلوم الرياضية أ و ب
المعامل : 9
مدة الانجاز : أربع ساعات

التمرين الأول : (3,5 ن)

I نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .
لتكن G مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل : $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$
حيث a عدد حقيقي و b عدد حقيقي غير منعدم .

0,25 ن — **1** بين أن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,75 ن — **2** بين أن $(G,\times)$ زمرة ، هل هي تبادلية ؟

لتكن H مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث : $b > 0$

0,50 ن — **3** بين أن H زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$.

ليكن A عنصرا من G حيث $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ و $a \in \mathbb{R}$.
نضع : $A^1 = A$ و $A^2 = A \times A$ و $A^{n+1} = A^n \times A$.

0,50 ن — **4** أحسب A^n بدلالة a و n بحيث $n \in \mathbb{N}^*$.

II نعتبر في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي : $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \top (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bx}\,,\boldsymbol{by})$
و ليكن φ التطبيق المعرف من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\,;\top)$ بما يلي : $\varphi(M_{(a,b)}) = (a,b)$

0,75 ن — **1** بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\,;\top)$.

0,25 ن — **2** استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\,;\top)$.

0,50 ن — **3** حدد مماثل العنصر $\underbrace{(a,1) \top \cdots \top (a,1)}_{n\ fois}$ في $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*\,;\top)$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة التالية : $(E) :\ x^2(x+y) = y^2(x-y)^2$
ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) . نضع : $d = x \wedge y$ و $x = ad$ و $y = bd$.

0,25 ن — **1** **أ** تحقق أن : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

0,75 ن — **ب** استنتج أن $b = 1$.

0,50 ن — **ج** بين أن $a \neq 1$ و أن العدد $(a-1)$ يقسم العدد $(a+1)$.

0,50 ن — **د** استنتج أن $a = 2$ أو $a = 3$.

0,50 ن — **2** حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية التالية : $P(z) = z^2 - (2+6i)z$
في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ ، نعتبر (H) مجموعة النقط M
ذات اللحق z التي يكون من أجلها $P(z)$ عددا تخيليا صرفا .

0,50 ن — **I** **1** بين أن $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$ معادلة ديكارتية للمجموعة (H) .

1,00 ن — **2** بين أن (H) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و معادلتي مقاربيه في $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

0,50 ن — **3** تحقق أن النقطة O ، أصل المعلم، تنتمي إلى المجموعة (H) ثم اكتب في المعلم $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$
معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (H) في النقطة O .

0,75 ن — **4** أنشئ (H) في المعلم $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

0,50 ن — **II** **1** حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 4 - 6i$.

نضع : $u = 1 + 5i$ و $v = 1 + i$ و $\omega = 239 - i$

و $\alpha = Arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ و $\beta = Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

0,50 ن		2	أ تحقق أن : $u^4 \times v = 4\omega$.
0,75 ن			ب حدد بدلالة α عمدة العدد العقدي u و حدد بدلالة β عمدة العدد العقدي ω .
0,50 ن			ج استنتج أن : $4\,Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$

التمرين الرابع : (3,5 ن)

الجزء الأول : ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 3 .

نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g_n(x) = nx + 2\ln x$

0,50 ن		1	ضع جدول تغيرات الدالة g_n .
0,50 ن		2	بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ \sqrt{x} > \ln x$.
0,75 ن		3	أ بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$. حيث : $\frac{1}{n} < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$
0,25 ن			ب استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n)$

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x}$.

ليكن $(\mathcal{C})$ التمثيل المبياني للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\| = 3\ cm$.

0,50 ن	I	1	أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين الصفر ثم أوّل هندسيا النتيجة المحصل عليها .
0,50 ن		2	أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و اعط تأويلا هندسيا لها .
0,25 ن		3	أ بين أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0,+\infty]\ ;\ f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$ $\rightsquigarrow$ $(*)$
0,25 ن			ب ضع جدول تغيرات الدالة f .
0,50 ن		4	أنشئ $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,50 ن	II	1	أ بين أن : $f(I) \subset I$. حيث : $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.
0,50 ن			ب باستعمال العلاقة $(*)$ ، بين أن : $\left|f'(x)\right| \leq \frac{2}{3}$; $(\forall x \epsilon I)$.
			ليكن α_3 حل المعادلة $g_3(x) = 0$ الذي سبق ذكرة في الجزء الأول .
0,50 ن			ج بين صحة التكافؤ التالي : $x = \alpha_3 \Leftrightarrow (f(x) = x\ ;\ x > 0)$
			لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$
0,25 ن		2	أ بين أن : $u_n\ \epsilon\ I$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$.
0,25 ن			ب بين أن : $\left|u_{n+1} - \alpha_3\right| = \frac{2}{3}\left|u_n - \alpha_3\right|$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$.
0,50 ن			ج استنتج أن : $\left|u_n - \alpha_3\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$
0,50 ن			د بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها .
			لتكن F الدالة العددية المعرفة المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{8x} f(t)\ dt$
0,25 ن	III	1	أ بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.
0,75 ن			ب أحسب $F'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$. ثم استنتج تغيرات الدالة F .
0,50 ن		2	أ بين أن : $0 \leq F(x) \leq 2f(x)(1 - e^{-7x})$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^+)$
0,25 ن			ب استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
0,25 ن			ج ضع جدول تغيرات الدالة F .

التمرين الأول : (2,0 ن)

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F. (كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

0,50 ن — 1 — ما هو عدد امكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟

0,50 ن — 2 — أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل .

1,00 ن — 3 — أحسب احتمال الحدث التالي : " مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A .

التمرين الثاني : (4,0 ن)

في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي : $f(z) = \frac{1}{6}\left((1+i\sqrt{3})z + 2\,\bar{z}\right)$

0,50 ن — I — حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = 0$.

نضع $z_0 = 1$ و $z_{n+1} = f(z_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ و نرمز بـ u_n لمعيار العدد العقدي z_n .

0,50 ن — II — 1 — أ — بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

0,50 ن — ب — استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها .

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} OM_k = OM_1 + OM_2 + \cdots + OM_n$

و لكل k من $\mathbb{N}$ نعتبر النقطة M_k صورة العدد العقدي z_k .

0,50 ن — 2 — أ — بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ S_n \leq 3$

0,50 ن — ب — بين أن المتتالية $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة (حساب نهاية $(S_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ غير مطلوب) .

نضع $z = re^{i\theta}$ حيث $\theta \epsilon\ ]-\pi,\pi[$ و $r > 0$.

1,00 ن — III — 1 — بين أن : $f(z) = \frac{2}{3}\,r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$

0,50 ن — 2 — بين أن النقط M_1 و M_2 و $\cdots$ و M_n مستقيمية بحيث $n \epsilon \mathbb{N}^*$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى منسوب إلى م م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

ليكن (Γ) المنحنى الذي معادلته $2y^2 - 4y - 7x = 0$.

0,75 ن — I — 1 — بين أن (Γ) شلجم و حدد رأسه و بؤرتيه .

0,25 ن — 2 — أنشئ المنحنى (Γ) في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية : $(E):\ 2(y-1)^2 = 7x + 2$

1,00 ن — II — 1 — أ — ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) . بين أن $y \equiv 0[7]$ أو $y \equiv 2[7]$.

0,50 ن — ب — استنتج أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\mathcal{S} = \{\ (14k^2 - 4k\ ;7k)\ ;\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\ \} \cup \{\ (\ 14k^2 + 4k\ ;7k + 2\ )\ ;\ \ k\epsilon\mathbb{Z}\ \}$$

1,00 ن — 2 — حدد النقط $M(x,y)$ من المنحنى (Γ) بحيث : $(x,y)\ \epsilon\ \mathbb{Z}^2$ و $x \wedge y = 9$.

التمرين الرابع : (3,0 ن)

0,25 ن | 1 | بين أن : $\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} = \frac{t}{(3+t^2)} - \frac{t}{(3+t^2)} + \frac{1}{(3+t^2)}$; $(\forall t \epsilon \mathbb{R})$

0,50 ن | 2 | بين أن : $\int_0^{\alpha} \frac{1}{(3+t^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$; $(\forall \alpha \epsilon \mathbb{R})$

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,\pi]$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x \left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right) du$

0,50 ن | 3 | أ | بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,\pi]$.

0,50 ن | ب | باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t = tan\left(\frac{u}{2}\right)$ بين أن :

$$(\forall\ x\ \epsilon\ [0,\pi[\ )\ ;\ F(x) = 2\int_0^{\tan\frac{\pi}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$$

نذكر أن : $\cos \mathrm{u} = \frac{1-\mathrm{t}^2}{1+\mathrm{t}^2}$ و $\sin \mathrm{u} = \frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}$ حيث $t = \tan\frac{u}{2}$ و $u\ \epsilon\ [0;\pi[$

0,75 ن | ج | باستعمال السؤالين 1) و 2) بين أن :

$$(\forall\ x\ \epsilon\ [0,\pi[\ )\ ;\ F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} Arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

0,50 ن | د | باستعمال اتصال الدالة F بين أن : $\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right) du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$

التمرين الخامس : (3,0 ن)

في هذا التمرين، n يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن | 1 | أ | أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

0,75 ن | ب | حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

0,75 ن | 2 | أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

0,50 ن | 3 | أ | بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.

0,25 ن | ب | بين أن : $(\forall n \geq 2)$; $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

0,75 ن | ج | بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$; $e^x \geq x+1$. ثم استنتج أن : $f_n(1) > 0$.

0,50 ن | د | بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

0,50 ن | 4 | أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_2)$. (نأخذ : $\alpha_2 \approx 0,6$)

0,50 ن | 5 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 2)$; $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{n\ e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$

0,50 ن | ب | استنتج أن : $(\ \forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}^* - \{1\}\ )$; $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

0,75 ن | ج | بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

0,50 ن | 6 | أ | باستعمال السؤال 3) بين أن : $(\ \forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}^* - \{1\}\ )$; $\frac{1}{n^2} < e^{-n\,\alpha_n} < \frac{1}{n}$

0,50 ن | ب | استنتج أن : $(\ \forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{N}^* - \{1\}\ )$; $\frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln n}{n}$

0,25 ن | ج | حدد النهاية التالية : $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)$

التمرين الأول : (3,5 ن)

I لتكن $E = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2 نضع : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$.

0,25 ن — **1** **أ** تحقق أن لكل زوج (a,b) من E^2 لدينا : $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$

0,25 ن — **ب** استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

0,50 ن — **2** بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية .

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و حدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

II نعتبر المجموعة التالية : $F = \left\{ M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix} \; ; \; a \in E \right\}$

0,50 ن — **1** **أ** نضع : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. تحقق أن : $A^2 = -2A$ و أن $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$.

0,50 ن — **ب** بين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : $\varphi : (E,\perp) \to (F,\times)$ ، $a \to \varphi(a) = M(a)$

0,50 ن — **2** **أ** بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي .

0,50 ن — **ب** استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(F,\times)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين i و $-i$. و نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$(E) : \; z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$

0,25 ن — **I** **1** **أ** تحقق أن العدد العقدي $u = a + i$ حل للمعادلة (E) .

0,25 ن — **ب** حدد v الحل الثاني للمعادلة (E) .

0,25 ن — **2** **أ** نفترض أن : $|a| = 1$. بين أن $\left(\frac{u}{v}\right)$ عدد حقيقي .

0,25 ن — **ب** تحقق أن : $u^2 = a((a-\bar{a})+2i)$.

0,50 ن — **ج** استنتج أن : $arg(u) \equiv \left(\frac{1}{2}\,arg(a) + \frac{\pi}{4}\right)\;[\pi]$

0,50 ن — **3** بين أن : $|u| + |v| \geq 2$.

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 .

و لتكن (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث : $|u| + |v| = m$.

0,50 ن — **II** **1** بين أن (E_m) إهليلج مركزه هو أصل المعلم O .

نضع : $a = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

0,25 ن — **2** **أ** بين أن : $x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m)

0,25 ن — **ب** أنشئ الإهليلج (E_4) .

0,50 ن — **3** نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ رأسي الإهليلج (E_4) . بين أن (AB) مماس للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $(E) : 195x - 232y = 1$

0,50 ن — **1** **أ** حدد $232 \wedge 195$.

0,50 ن — **ب** بين أن حلول المعادلة (E) هي : $S = \{ (163+232k \,;\, 137+195k) \;;\; k\epsilon\mathbb{Z} \}$

أوجد العدد الصحيح الوحيد d الذي يحقق : $0 \le d \le 232$ و $195d \equiv 1\ [232]$	ج			0,25 ن
بين أن العدد 233 عدد أولي .		2		0,25 ن
لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232 .				
نعتبر التطبيق f المعرف من A نحو A بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233 .				
نقبل أن : $\forall a \in A\backslash\{0\} \; ; \; a^{232} \equiv 1\ [233]$				
بين أن لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a)=f(b)$ فإن $a=b$.	أ	3		0,50 ن
ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث $f(a)=b$. حدد a بدلالة b .	ب			0,50 ن
استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .	ج			0,50 ن

التمرين الرابع : (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=1+(x-1)e^x$				
بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; g(x)\ge 0$		1	I	0,50 ن
بين أن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.		2		0,25 ن
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{x}{e^x-1} \; ; \; \forall x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$				
و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.				
أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$		1	II	0,50 ن
بين أن الدالة f متصلة في الصفر .		2		0,25 ن
أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.	أ	3		0,50 ن
استنتج تغيرات الدالة f .	ب			0,25 ن
نعتبر التكامل التالي : $J(x)=\int_0^x t\,e^{-t}\,dt$ حيث x عدد حقيقي .				
باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $J(x)=e^{-x}(e^x-1-x)$	أ	4		0,50 ن
بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; \frac{x^2}{2}\, e^{-\left(\frac{x+\lvert x\rvert}{2}\right)} \le J(x) \le \frac{x^2}{2}\, e^{-\left(\frac{x-\lvert x\rvert}{2}\right)}$	ب			1,00 ن
بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*) \; ; \; \frac{1}{2}\, e^{\left(\frac{x-\lvert x\rvert}{2}\right)} \le \frac{e^x-1-x}{x^2} \le \frac{1}{2}\, e^{\left(\frac{x+\lvert x\rvert}{2}\right)}$	ج			0,50 ن
استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0)=\frac{-1}{2}$.	د			0,75 ن
بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*) \; ; \; f''(x)=\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)(e^x(x-1)+2+x)$	أ	5		0,50 ن
أدرس إشارة $e^x(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$.	ب			0,50 ن
استنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*) \; ; \; f''(x)>0$	ج			0,25 ن
أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.	د			0,50 ن
نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n) \; ; \; \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=1 \end{cases}$				
بين أن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=x$.		1	III	0,50 ن
بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*) \; ; \; \lvert f'(x)\rvert \le \frac{1}{2}$	أ	2		0,25 ن
بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; \lvert u_{n+1}-\ln 2\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_n-\ln 2\rvert$	ب			0,50 ن
استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .	ج			0,50 ن
لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)dt \; ; \; \forall x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$				
بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*) \; ; \; \frac{2x^2}{e^{2x}-1} \le F(x) \le \frac{x^2}{e^x-1}$	أ	1	IV	0,50 ن
بين أن الدالة F متصلة في الصفر .	ب			0,25 ن
بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $F'(0)=1$.	ج			0,50 ن
بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا : $F'(x)=\left(\frac{3-e^x}{e^x+1}\right)f(x)$	أ	2		0,50 ن
أدرس تغيرات الدالة F .	ب			0,25 ن

التمرين الأول : (3,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) التالية : $\begin{cases} x \equiv a\,[p] \\ x \equiv b\,[q] \end{cases}$ بحيث : $\begin{cases} a,b,p,q \in \mathbb{Z} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

0,50 ن	1 أ	بين أنه يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$.
0,50 ن	ب	بين أن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للنظمة (S) .
0,50 ن	2	ليكن x حلا للنظمة (S) ، بين أن العدد pq يقسم العدد $(x - x_0)$.
0,50 ن	3	ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث pq يقسم العدد $(x - x_0)$. بين أن x حل للنظمة (S) .
0,50 ن	4	استنتج مجموعة حلول النظمة (S) .
0,50 ن	5	حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x \equiv 1\,[8] \\ x \equiv 3\,[13] \end{cases}$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 . نتوفر على n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k يحتوي على k كرة بيضاء و $(n-k)$ كرة سوداء . $(1 \leq k \leq n)$
نختار بطريقة عشوائية صندوقا واحدا من بين الصناديق ثم نسحب منه عشوائيا كرة واحدة .

0,50 ن	1	أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .
0,75 ن	2	أحسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه عدد فردي .
0,75 ن	3	أحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.
نعتبر المجموعة : $(H) = \{ M(z) \in \mathcal{P} \ ; \ z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1 \}$.

| 0,50 ن | 1 أ | بين أن (H) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$. |
| 0,25 ن | ب | أنشئ الهذلول (H) . |

$M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (H) . نضع : $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$.

| 0,50 ن | 2 أ | بين أن : $M(\varphi(a,b)) \in (H)$ |
| 0,50 ن | ب | تحقق أن $\varphi(a,1) = 1$ و أن $\varphi(a,\bar{a}) = 1$. |

نزود (H) بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :
$$\forall\, M(a), M(b) \in H \ ; \ M(a) * M(b) = M(\varphi(a,b))$$

| 1,00 ن | 3 | بين أن $(H,*)$ زمرة تبادلية . |

التمرين الرابع : (3,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .
نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .
نعتبر المجموعة التالية : $F = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
نزود F بجمع المصفوفات $+$ و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي $\cdot$ و ضرب المصفوفات $\times$.
نضع : $I = M(1,0)$ و $J = M(0,1)$ و $O = M(0,0)$

0,50 ن		1	أ	بين أن $(F,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .
0,50 ن			ب	بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(F,+,\cdot)$ و اعط بعده .
				ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.
0,50 ن		2		بين أن الأسرة $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.
				نعتبر التطبيق ψ من $\mathbb{C}$ نحو F المعرف بما يلي : $\psi(z) = M(m,n)$.
				بحيث : $z = m + \alpha n$ و $m\epsilon\mathbb{R}$ و $n\epsilon\mathbb{R}$ و $z\epsilon\mathbb{C}$.
0,50 ن		3	أ	تحقق أن : $J^2 = -2(I+J)$ و أن : $\psi(\alpha) = J$.
0,50 ن			ب	حدد قيمتي α اللتان من أجلهما يكون التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(F,\times)$.
0,50 ن		4		نأخذ $\alpha = -1+i$. أكتب في الأساس (I,J) المصفوفة J^{2007} .

التمرين الخامس : (3,5 ن)

				لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$.
0,50 ن	I	1	أ	أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
0,50 ن			ب	أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و ضع جدول تغيرات الدالة g .
0,50 ن			ج	استنتج أن $x_0 = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.
				لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{1+x-e^{-x}}$
				و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
0,50 ن		2	أ	أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$
0,25 ن			ب	أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.
0,50 ن			ج	ضع جدول تغيرات الدالة f .
0,50 ن			د	أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
0,50 ن		3	أ	ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0,+\infty[$.
0,50 ن			ب	بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية و أنها متقاربة .
0,50 ن			ج	بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$
0,25 ن	II	1	أ	بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تكافئ المعادلة $e^{-x} = x$.
0,50 ن			ب	بين أن المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$
				نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} y_{n+1} = e^{-y_n} \ ; \ \forall n\epsilon\mathbb{N}^* \\ y_1 = 1 \end{cases}$
0,50 ن		2	أ	بين أن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1 \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$
0,50 ن			ب	بين أن : $\lvert y_{n+1} - \alpha\rvert < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \lvert y_n - \alpha\rvert \ ; \ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$
0,50 ن			ج	استنتج أن $(y_n)_{n\geq1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها .
				لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} f(t)\ dt \ ; \ \forall x > 0 \\ F(0) = \frac{\ln 2}{2} \end{cases}$
0,25 ن	III	1	أ	بين أن : $\frac{1}{1+t} < f(t) < \frac{1}{t} \ ; \ (\forall t > 0)$
0,50 ن			ب	استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
0,50 ن		2	أ	بين أن : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2} \ ; \ (\forall t \geq 0)$
0,50 ن			ب	بين أن : $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right) \ ; \ \forall\ t\ \epsilon\ ]0,4[$
0,25 ن			ج	استنتج أن F متصلة على اليمين في الصفر .
0,50 ن		3	أ	بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$.
0,25 ن			ب	أدرس تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}_+$.

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة و احدية .

و نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي . و $(\mathbb{R},+,\times)$ جسم تبادلي .

$$E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix}\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\} \text{ و } J=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix} \text{ و } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

0,75 ن	1 أ	بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.
0,50 ن	ب	بين أن الأسرة (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.

نعتبر التطبيق : $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}^* & \to & E^* \\ a+ib & \to & M(a,b)\end{array}$ حيث : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$.

0,25 ن	2 أ	بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.
0,50 ن	ب	بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.
0,50 ن	3	بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .
0,75 ن	4	حل في E المعادلة $J\times\mathcal{X}^3=I$. (حيث : $\mathcal{X}^3=\mathcal{X}\times\mathcal{X}\times\mathcal{X}$)

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا غير منعدم و $\bar{a}$ مرافق العدد a .

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (G) : $(G): iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$.

0,50 ن	I 1 أ	تحقق أن مميز المعادلة (G) هو : $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$.
0,50 ن	ب	حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (G) .
0,50 ن	2	بين أن a حل المعادلة (G) إذا وفقط إذا كان $\mathfrak{Re}(a)=\mathfrak{Im}(a)$.

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نفترض أن : $\mathfrak{Re}(a)\neq\mathfrak{Im}(a)$.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و $i\bar{a}$ و $(1+ia)$.

0,50 ن	II 1 أ	نضع : $z=\frac{(1+ia)-a}{i\bar{a}-a}$. تحقق أن : $\bar{z}=\frac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$.
0,50 ن	ب	بين أن النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\mathfrak{Im}(a)=\frac{1}{2}$.

نفترض في هذا السؤال أن : $\mathfrak{Im}(a)\neq\frac{1}{2}$. و نعتبر $\mathcal{R}_1$ الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{-\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$. نضع : $R_1(B)=B'$ و $R_2(C)=C'$. لتكن E منتصف القطعة $[BC]$.

0,50 ن	2 أ	حدد b' و c' لحقي النقطتين B' و C' على التوالي .
0,75 ن	ب	بين أن المستقيمين (AE) و $(B'C')$ متعامدان . و بين أن : $B'C'=2\,AE$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E):\ 35u-96v=1$.

0,25 ن	I 1	تحقق أن الزوج $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .
0,50 ن	2	استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $(F):\ x^{35}\equiv 2\ [97]$.

0,50 ن	II 1 أ	ليكن x حلا للمعادلة (F) . بين أن العدد 97 أولي و أن x و 97 أوليان فيما بينهما .
0,50 ن	ب	بين أن : $x^{96}\equiv 1\ [97]$.

ن 0,50			ج	بين أن : $x \equiv 2^{11}\ [97]$.
ن 0,25		2		بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x \equiv 2^{11}\ [97]$ فإن x حل للمعادلة (F) .
ن 0,50		3		بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تُكتب على الشكل $(11+97k)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

التمرين الرابع : (3,5 ن)

				لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$ و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
ن 0,50	I	1	أ	أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$ ثم أوّل النتيجة المحصل عليها هندسيا .
ن 0,50			ب	أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^+$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .
ن 0,50			ج	بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^+$ و أن $0 < \alpha < 1$.
ن 0,50			د	أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,1]$.
ن 0,50		2		أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (نأخذ : $\alpha \approx 0{,}4$)
				نعتبر الدالتين العدديتين φ و g المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \ ; \ x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^2 - \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$
ن 0,50	II	1	أ	بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_*^+), (\exists\, c \,\epsilon\,]0,x[\,)\ ;\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = e^{-c^2}$
ن 0,50			ب	استنتج أن : $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt < 1$
ن 0,50		2	أ	بين أن : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t)\,dt$
ن 0,50			ب	بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^+)\ ;\ g'(x) = f(x)$
ن 0,50			ج	بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]\alpha, 1[$.
ن 0,50		3	أ	بين أن الدالة φ متصلة على اليمين في الصفر .
ن 0,75			ب	باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_*^+)\ ;\ \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt$
ن 0,50			ج	بين أن φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$ و أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_*^+)\ ;\ \varphi'(x) = \frac{-2}{x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt$
ن 0,50			د	بين أن : $\varphi(\,[0,1]\,) \subset [0,1]$
ن 0,50		4	أ	بين أنه لكل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$ لدينا : $\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt \leq \frac{x^3}{3}$
ن 0,50			ب	بين أن : $(\forall\, x \,\epsilon\,]0,1[\,)\ ;\ \lvert\varphi'(x)\rvert \leq \frac{2}{3}$
ن 0,25			ج	بين أن : $(\forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}_*^+)\ ;\ \varphi(x) = x \iff g(x) = 0$
				نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = \varphi(u_n)\ ;\ \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$
ن 0,50		5	أ	بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq 1$
ن 0,50			ب	بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \lvert u_n - \beta\rvert \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
ن 0,50			ج	استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الأول : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر التطبيق r الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث : $z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

و التطبيق h الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث : $z_2=-2z+3i$

و نعتبر التطبيق F المعرف بما يلي : $F=h\circ r$.

1,00 ن	1	حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h و عناصرهما المميزة .

نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A(a)$ حيث a عدد عقدي معلوم مخالف للعدد العقدي i .

و نضع : $F(A)=B$ و $F(B)=C$ و $F(C)=D$.

0,50 ن	2 أ	بين أنه إذا كانت $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالتطبيق F فإن : $z'-i=2e^{\frac{4i\pi}{3}}(z-i)$
0,25 ن	ب	تحقق أن Ω هى النقطة الوحيدة التى تحقق : $F(\Omega)=\Omega$.
0,75 ن	3 أ	حدد بدلالة العدد العقدي a الأعداد العقدية b و c و d ألحاق النقط B و C و D على التوالي .
0,25 ن	ب	بين أن النقط Ω و A و D مستقيمية .
0,50 ن	ج	بين أن Ω هو مرجح النظمة المتزنة $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$.
0,25 ن	د	حدد مجموعة النقط $A(a)$ لكي تكون النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي .

التمرين الثاني : (3,5 ن)

نزود $\mathbb{R}$ بالقانون الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $x*y=x+y-3xy$; $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

0,25 ن	1 أ	تحقق أن : $(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$; $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$
0,75 ن	ب	بين أن : $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ زمرة تبادلية .
0,50 ن	2 أ	بين أن التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $\varphi(x)=1-3x$ تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$.
0,25 ن	ب	بين أن : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*)=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$
0,50 ن	ج	بين أن $\left(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[;*\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$.

لكل x من المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $\begin{cases}x^{(n+1)}=x^{(n)}*x\\x^{(0)}=0\end{cases}$

0,25 ن	3 أ	بين أن : $\varphi\left(x^{(n)}\right)=\left(\varphi(x)\right)^n$; $(\forall n\in\mathbb{N})$; $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$
0,50 ن	ب	استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n .

نزود $\mathbb{R}$ بالقانون الداخلي $\top$ المعرف بما يلي : $x\top y=x+y-\frac{1}{3}$; $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

0,50 ن	4 أ	بين أن $(\mathbb{R},\top)$ زمرة تبادلية .
0,50 ن	ب	بين أن $(\mathbb{R},\top,*)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

يحتوي صندوق على أربع كرات : كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس نسحب عشوائيا كرة من الصندوق و نسجل لونها ثم نعيدها إلى الصندوق .
نجري نفس التجربة العشوائية لمرات متتابعة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون و نوقف التجربة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت عندها التجربة .

1,00 ن	1	أحسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X=2]$ و $[X=3]$.
		ليكن k عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .
0,75 ن	2 أ	بين أن احتمال الحدث $[X=2k]$ هو : $p_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$.
0,75 ن	ب	بين أن احتمال الحدث $[X=2k+1]$ هو : $p_{2k+1}=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$.

التمرين الرابع : (3,5 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة على $I=\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ بـ : $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x} & ; \ \forall x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن	I 1	بين أن الدالة f متصلة في الصفر .
		لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي : $h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$.
0,50 ن	2 أ	أحسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$. ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث : $\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$
0,75 ن	ب	استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر . و أن : $f'(0)=-2$.
0,50 ن	3 أ	بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $I\backslash\{0\}$. و : $\forall x \in I\backslash\{0\} \ ; \ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ حيث : $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$
0,50 ن	ب	بين أن : $\forall x \in I\backslash\{0\} \ ; \ g(x)<0$
0,25 ن	ج	استنتج تغيرات الدالة f على المجال I .
0,50 ن	4 أ	أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} f(x)$ ثم أوّل النتيجتين هندسيا
0,50 ن	ب	بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1;2]$ بحيث : $f(\alpha)=1$.
0,50 ن	ج	أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. (نأخذ : $\alpha\approx 1{,}3$)
		نضع : $J=[1,\alpha]$ و $\varphi(x)=\ln(1+2x) \ ; \ (\forall x\in I)$.
0,50 ن	II 1 أ	بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I . و أن : $(\forall x\geq 1) \ ; \ 0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$
0,75 ن	ب	تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن : $\varphi(J)\subset J$.
		نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=\ln(1+2u_n) \ ; \ \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=1 \end{cases}$
0,50 ن	2 أ	بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ u_n\in J$
0,50 ن	ب	بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \ ; \ \lvert u_n-\alpha\rvert\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$
0,50 ن	ج	استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .
		نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$
0,50 ن	III 1 أ	بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I . ثم احسب $F'(x)$ لكل x من I .
0,25 ن	ب	استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال I .
0,50 ن	2 أ	بين أن : $(\forall x\geq 1) \ ; \ F(x)>\int_1^x\left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\right)dt$
0,50 ن	ب	استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$
		نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l على اليمين في $\frac{-1}{2}$. و نعتبر الدالة $\tilde{F}$ المعرفة على المجال $\left[\frac{-1}{2};+\infty\right[$ بما يلي : $\begin{cases} \tilde{F}(x)=F(x) \ ; \ \forall x\in I \\ \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)=l \end{cases}$
0,50 ن	3 أ	باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أن : $(\forall x\in I) \ ; \ F(x)-l>\left(x+\frac{1}{2}\right)f(x)$
0,50 ن	ب	استنتج أن الدالة $\tilde{F}$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $\frac{-1}{2}$.

التمرين الأول : (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها هي المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

نضع : $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\right\}$.

- 0,25 ن — 1 أ — بين أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$
- 0,50 ن — ب — بين أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية .

نعتبر المجموعة التالية : $G=\{M(x,0)\in F\ ;\ x\in\mathbb{R}^*\}$

- 1,00 ن — 2 — بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$.

نزود المجموعة $E=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $\perp$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (x,y)\in E),(\forall (a,b)\in E)\ :\ (x,y)\perp(a,b)=\left(ax\ ,bx+\frac{y}{a}\right)$$

و نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي :

$$\varphi\ :\ (F,\times)\to(E,\perp)$$
$$M(x,y)\to\varphi\big(M(x,y)\big)=(x,y)$$

- 0,25 ن — 3 أ — أحسب : $(2,3)\perp(1,1)$ و $(1,1)\perp(2,3)$.
- 0,50 ن — ب — بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(F,\times)$ نحو $(E,\perp)$.
- 0,50 ن — ج — استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(E,\perp)$.

التمرين الثاني : (4,0 ن)

I ليكن m عددا عقديا مخالفا للعدد 1 . و نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E):\ z^2-(1-i)(m+1)z-i(m^2+1)=0$$

- 0,25 ن — I 1 أ — تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=\big((1+i)(m-1)\big)^2$
- 0,25 ن — ب — حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .
- 0,50 ن — ج — حدد على الشكل الجبري قيمتي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1

نضع : $z_1=1-im$ و $z_2=m-i$.

- 1,00 ن — 2 — أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي في حالة $m=e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

نعتبر النقط $M(m)$ و $M_1(1-im)$ و $M_2(m-i)$.

- 0,50 ن — II 1 — حدد مجموعة النقط M التي من أجلها تكون النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية .
- 0,50 ن — 2 أ — بين أن التحويل R الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة M' التي لحقها $z'=1-iz$ ،

هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته .

- 0,50 ن — ب — بين التكافؤ التالي : $\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right)\in i\mathbb{R}\iff \mathfrak{Re}(m)+\mathfrak{Im}(m)=1$
- 0,50 ن — ج — استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نضع : $a_n=2^n+3^n+6^n-1$

- 0,25 ن — 1 أ — تحقق أن a_n عدد زوجي مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.
- 0,75 ن — ب — حدد قيم n التي من أجلها يكون $a_n\equiv 0\ [3]$.

ليكن p عددا أوليا موجبا و أكبر قطعا من العدد 3 .

2	أ	بين أن : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ و $6^{p-1} \equiv 1\ [p]$.	0,75 ن
	ب	بين أن العدد p يقسم العدد a_{p-2} .	0,75 ن
	ج	بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q ، يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث : $a_n \wedge q = q$. ($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q)	0,50 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

I ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم ، و نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(0)=0$ و $(\forall x>0)\ ;\ f_n(x)=x(1-\ln x)^n$

ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I	1	أ	بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في الصفر .	0,50 ن
		ب	أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في الصفر .	0,25 ن
		ج	أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x}$	1,00 ن
	2	أ	أدرس تغيرات الدالة f_1 .	0,50 ن
		ب	أدرس تغيرات الدالة f_2 .	0,50 ن
	3	أ	أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$.	0,25 ن
		ب	أنشئ المنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$. نأخذ : $\\|\vec{\imath}\\|=\\|\vec{\jmath}\\|=2\ cm$ (و نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_2)$)	0,50 ن

نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty;0]$ بما يلي : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\left(\frac{f_1(t)}{1+t^2}\right)dt$

II	1	أ	بين أن F قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0]$. و أن : $(\forall x<0)\ ;\ F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$	0,50 ن
		ب	استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty;0]$.	0,25 ن
	2	أ	بين أن : $(\forall x<0)\ ;\ \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$	0,25 ن
		ب	تحقق أن الدالة $x\to\ x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$.	0,25 ن
		ج	بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt=\frac{3}{4}$	0,25 ن
	3		نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن : $\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}$.	0,25 ن

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\int_1^e f_n(x)\,dx$

III	1	أ	بين أن : $(\forall n\ge1)\ ;\ u_n\ge0$.	0,50 ن
		ب	حدد إشارة الفرق $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[1,e]$.	0,50 ن
		ج	بين أن : $(\forall n\ge1)\ ;\ u_{n+1}\le u_n$.	0,25 ن
		د	استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة .	0,25 ن
	2	أ	بين أن : $(\forall n\ge1)\ ;\ u_{n+1}=\frac{-1}{2}+\left(\frac{n+1}{2}\right)u_n$.	0,50 ن
		ب	استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ و المستقيمين ذوا المعادلتين التاليتين : $x=1$ و $x=e$.	0,50 ن
	3	أ	بين أن : $(\forall n\ge2)\ ;\ \frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{1}{n-1}$	0,75 ن
		ب	حدد النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$ و $\lim\limits_{n\infty}(n\,u_n)$	0,50 ن

ليكن a عددا حقيقيا مخالفا للعدد u_1 . و نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي :

$v_1=a$ و $\forall n\ge1\ ;\ v_{n+1}=\frac{-1}{2}+\left(\frac{n+1}{2}\right)v_n$

و من أجل كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $d_n=|v_n-u_n|$.

4	أ	بين أن : $(\forall n\ge1)\ ;\ d_n=\left(\frac{n!}{2^{(n-1)}}\right)d_1$	0,25 ن
	ب	بين أن : $(\forall n\ge2)\ ;\ \frac{n!}{2}\ge3^{(n-2)}$	0,50 ن
4	ج	و بين أن : $\lim\limits_{n\infty}(d_n)=+\infty$	
	د	و استنتج أن $(v_n)_{n\ge1}$ متباعدة	

التمرين الأول : (3,0 ن)

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و حدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
و $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نضع : $V=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,75 ن	1	بين أن V فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ و حدد أساسا له.
0,25 ن	2 أ	بين أن V جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$
0,50 ن	ب	بين أن $(V,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية .
0,25 ن	3 أ	أحسب : $M\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right)\times M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.
0,25 ن	ب	هل الحلقة $(V,+,\times)$ جسم ؟
		لتكن X مصفوفة من المجموعة V حيث $X=\begin{pmatrix}a&b\\4b&a\end{pmatrix}$ مع $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
0,50 ن	4 أ	بين أن : $X^2-2aX+(a^2-4b^2)I=O$. حيث $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
0,50 ن	ب	نفترض أن $a^2-4b^2\neq 0$. بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في V ينبغي تحديده .

التمرين الثاني : (4,0 ن)

0,25 ن	1 أ	ليكن u عددا عقديا مخالفا لـ $(1-i)$. أنشر ثم بسط التعبير التالي : $(iu-1-i)^2$.
0,75 ن	ب	حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-2(u+1-i)z+2u^2-4i=0$
		المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.
		نعتبر النقط : $A\big((1+i)u-2i\big)$ و $B\big((1-i)u+2\big)$ و $U(u)$ و $\Omega(2-2i)$
0,25 ن	2 أ	حدد لحق I منتصف $[AB]$ ، ثم حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة U إلى النقطة I .
0,50 ن	ب	ليكن R الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{-\pi}{2}$. بين أن : $R(A)=B$.
0,50 ن	ج	استنتج أن المستقيمان (AB) و (ΩI) متعامدان .
0,75 ن	د	إقترح طريقة لإنشاء النقطتين A و B انطلاقا من النقطة U .
0,50 ن	3 أ	نضع : $u=a(1+i)-2i$. حدد لحقي المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AU}$ بدلالة العدد الحقيقي a
0,50 ن	ب	استنتج أن النقط A و B و U نقط مستقيمية .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و أكبر من أو يساوي 4 . و U_1 و U_2 و U_3 ثلاثة صناديق .
الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء و $(n-1)$ كرة سوداء .
الصندوق U_2 يحتوي على كرة حمراء و $(n-2)$ كرة سوداء .
الصندوق U_3 يحتوي على كرة حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء .
نختار عشوائيا صندوقا واحدا ثم نسحب منه عشوائيا و تآنيا كرتين .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

0,50 ن	1	حدد قيم المتغير العشوائي X .
0,50 ن	2 أ	بين أن احتمال الحدث $[X=2]$ يساوي $\frac{8}{3n(n-1)}$.
0,50 ن	ب	بين أن احتمال الحدث $[X=1]$ يساوي $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$.
0,75 ن	ج	استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X .
0,75 ن	3	علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من U_3 ؟

التمرين الرابع : (10 ن)

I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 2(1-e^{-x}) - x$

1,00 ن — **I** **1** أدرس تغيرات الدالة g . ثم ضع جدول تغيراتها .

0,50 ن — **2** أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\ln 4 ; \ln 6[$.

0,50 ن — ب) أدرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^+$.

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = 2(1-e^{-u_n}) \; ; \; \forall n \epsilon \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

0,50 ن — **3** أ) بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; 1 \leq u_n \leq \alpha$.

0,25 ن — ب) بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

0,25 ن — ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .

0,50 ن — د) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها .

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$.

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1,00 ن — **II** **1** أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

0,50 ن — **2** أ) تحقق أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$.

0,75 ن — ب) بين أن : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3} \; ; \; (\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*)$. ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن — **3** أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. (نأخذ : $\alpha \approx 1{,}5$)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي : $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1-e^t}{t^2}\right) dt \; ; \; \forall x > 0 \\ F(0) = -\ln 2 \end{cases}$

0,50 ن — **III** **1** أ) بين أن : $(\forall x > 0) \; ; \; F(x) = \left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \left(\frac{e^x-1}{x}\right) - \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$

0,50 ن — ب) بين أن : $\forall \, x \, \epsilon \,]0;+\infty[\; ; \; e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \leq e^{2x} \ln 2$

0,50 ن — ج) أحسب $\lim_{x \to 0^+} \int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على يمين الصفر .

0,50 ن — **2** أ) بين أن : $\forall \, x \, \epsilon \,]0;+\infty[\; ; \; F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$

0,50 ن — ب) أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$

0,75 ن — **3** بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$. و أن : $(\forall x > 0) \; ; \; F'(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$

0,25 ن — **4** أ) ليكن $x > 0$ ، بين أنه يوجد c من $]0, x[$ بحيث : $F(x) - F(0) = \frac{-1}{2} \, x \, e^{2c}$.

0,25 ن — ب) بين أن : $\forall \, x \, \epsilon \,]0;+\infty[\; ; \; \frac{-1}{2} \, e^{2x} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-1}{2}$

0,25 ن — ج) استنتج أن F قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . و أن : $F'_d(0) = \frac{-1}{2}$.

التمرين الأول : (3,5 ن)

I الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

نزود المجموعة $I =]0;+\infty[$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\forall\,(a,b)\,\epsilon\, I^2\ ;\ a*b = e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

0,25 ن	I 1	بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في المجموعة I .
0,50 ن	2	بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا ε في I ينبغي تحديده .
0,50 ن	3 أ	بين أن $(I\backslash\{1\};*)$ زمرة تبادلية .
0,50 ن	ب	بين أن $]1;+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I\backslash\{1\};*)$.
0,50 ن	4 أ	بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$.
0,50 ن	ب	بين أن $(I,\times,*)$ جسم تبادلي .

نعتبر المصفوفة التالية : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

0,50 ن	II 1	أحسب : A^2 و A^3 .
0,25 ن	2	استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا .

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

0,50 ن	1 أ	حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $(3+4i)$.
0,50 ن	ب	حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة : $(E)\ :\ 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$.

ليكن a و b حلى المعادلة (E) حيث : $\mathcal{R}e(a) < 0$. و نعتبر النقطتين $A(a)$ و $B(b)$.

0,50 ن	2 أ	تحقق أن : $\frac{b}{a} = 1 - i$.
0,50 ن	ب	استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة A .

لتكن C نقطة لحقها c و تخالف النقطة A . و لتكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$. و لتكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$.

0,50 ن	3 أ	حدد العدد العقدي c بدلالة العدد العقدي d . حيث d هو لحق النقطة D .
0,50 ن	ب	حدد بدلالة c العدد العقدي l . حيث l هو لحق النقطة L .
0,50 ن	ج	حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\left(\frac{l-c}{a-c}\right)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACL .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

0,75 ن	1	حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث : $m^2 + 1 \equiv 0\ [5]$.

ليكن p عددا أوليا بحيث : $p = 3 + 4k$ من k عدد صحيح طبيعي .
و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n^2 + 1 \equiv 0\ [p]$.

0,50 ن	2 أ	تحقق أن : $(n^2)^{2k+1} \equiv -1\ [p]$.
0,75 ن	ب	بين أن العددين n و p أوليان فيما بينهما .
0,50 ن	ج	استنتج أن : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1\ [p]$.
0,50 ن	د	استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق $n^2 + 1 \equiv 0\ [p]$.

التمرين الرابع : (6,25 ن)

I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 4x\, e^{-x^2}$
و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I 1 أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. — 0,25 ن

2 أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$. ثم ضع جدول تغيراتها . — 0,50 ن

3 حدد معادلة نصف المماس للمنحنى $(\mathcal{C})$ في أصل المعلم ثم أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ — 0,50 ن
(نأخذ : $\|\vec{\imath}\| = 2\ cm$. و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C})$)

4 أحسب التكامل التالي : $a = \int_0^1 f(x)\,dx$. ثم استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و محوري المعلم و المستقيم ذو المعادلة $x = 1$. — 0,50 ن

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر أو يساوي 2 .
نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = 4\,x^n\, e^{-x^2}$.

II 1 أ بين أن : $e^{-x^2} < e^{-x}$; $(\forall x > 1)$. — 0,50 ن

ب استنتج نهاية الدالة f_n عندما يؤول x إلى $+\infty$. — 0,50 ن

2 أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$. ثم ضع جدول تغيراتها . — 0,50 ن

3 بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $]0,1[$ بحيث $f_n(u_n) = 1$. — 0,50 ن

4 أ تحقق أن : $f_{n+1}(u_n) = u_n$; $(\forall n \geq 2)$. — 0,50 ن

ب بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . — 0,50 ن

5 أ نضع : $l = \lim u_n$. بين أن : $0 < l \leq 1$. — 0,50 ن

ب بين أن : $\frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$; $(\forall n \geq 0)$ — 0,50 ن

ج استنتج أن : $l = 1$. — 0,50 ن

التمرين الخامس : (3,75 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$

1 بين أن F دالة فردية . — 0,50 ن

لكل x من المجال $]0;+\infty[$ ، نضع : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,dt$.

2 أ تحقق أن : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$; $(\forall x > 0)$. — 0,25 ن

ب بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. ثم احسب $F'(x)$ لكل $x > 0$. — 0,50 ن

ج استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]0;+\infty[$. — 0,50 ن

3 أ بين أن : $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$; $(\forall x > 0) , (\exists\, c \in\,]x;2x[)$. — 0,50 ن

ب استنتج أن : $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$; $(\forall x > 0)$. — 0,50 ن

ج أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ — 0,50 ن

د تحقق أن : $F(\sqrt{e}-1) < \sqrt{e}-1$ و $F\left(\frac{\sqrt{e}-1}{2}\right) > \frac{\sqrt{e}-1}{2}$. — 0,50 ن
ثم استنتج أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية غير تبادلية .

نعتبر المجموعة التالية : $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}\ ;\ x\in\mathbb{R}\right\}$

1	بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.	0,50 ن
2 أ	بين أن التطبيق $\varphi:\ x\to M(x)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.	0,75 ن
ب	استنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .	0,50 ن
ج	حدد $M^{-1}(x)$ مقلوب المصفوفة $M(x)$ لكل عدد حقيقي x .	0,50 ن
د	حل في المجموعة E المعادلة $A^5X=B$ حيث $A=M(2)$ و $B=M(12)$	0,75 ن
3	بين أن المجموعة $F=\{M(\ln x)\ ;\ x\in\mathbb{R}_+^*\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.	0,50 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$.

1 أ	تحقق أن العدد العقدي $a=1+i(2-\sqrt{3})$ حل للمعادلة (E) .	0,50 ن
ب	استنتج b الحل الثاني للمعادلة (E) .	0,50 ن
2 أ	بين أن : $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$.	0,50 ن
ب	أكتب العدد a على الشكل المثلثي .	0,50 ن

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي a و b و $c=2i+2e^{\frac{i\pi}{7}}$.
و لتكن (Γ) الدائرة التي مركزها Ω و أحد أقطارها $[AB]$.

3 أ	حدد ω لحق النقطة Ω .	0,50 ن
ب	بين أن النقطتين O و C تنتميان إلى الدائرة (Γ) .	0,50 ن
ج	بين أن العدد العقدي $\left(\frac{c-a}{c-b}\right)$ تخيلي صرف .	0,50 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .
نسحب الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة .

1 أ	حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي X .	0,50 ن
ب	أحسب احتمال الحدث التالي : $[X=1]$.	0,50 ن
ج	بين أن : $p[X=2]=\frac{5}{33}$	0,50 ن
د	أحسب احتمال الحدث التالي : $[X=3]$.	0,50 ن
2 أ	بين أن : $E(X)=\frac{13}{11}$. (حيث $E(X)$ هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X)	0,50 ن
ب	أحسب $E(X^2)$ ثم استنتج قيمة $V(X)$. (حيث $V(X)$ هي مغايرة المتغير العشوائي X)	0,50 ن

التمرين الرابع : (10 ن)

I نعتبر الدالة f المعرفة على $I = [0;1]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1-\ln(1-x)} \; ; \; 0 \le x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$

0,50 ن	1	بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1 .
0,50 ن	2	أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1 .
0,75 ن	3	أدرس تغيرات الدالة f على المجال I . ثم اعط جدول تغيراتها .
0,50 ن	4 أ	بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$.
0,75 ن	ب	أنشئ $(\mathcal{C})$ مبرزا نصف مماسه في النقطة ذات الأفصول 0 .
0,50 ن	5	بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال I و يحقق $f(\alpha) = \alpha$.
0,25 ن	6 أ	بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو المجال I نفسه .
0,50 ن	ب	حدد صيغة الدالة العكسية $f^{-1}(y)$ لكل y من المجال I .

II نضع $I_0 = \int_0^1 f(t)\,dt$. و $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt \; ; \; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

0,75 ن	1	بين أن المتتالية $(I_n)_{n\ge0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .
0,75 ن	2	بين أن : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1} \; ; \; (\forall n \in \mathbb{N})$. ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n\ge0}$.

III لكل عدد حقيقي x من المجال $J = [0,1[$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$$F_n(0) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{و} \quad F_n(x) = \int_0^x t^n f(t)\,dt \quad \text{و} \quad F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt \quad \text{و} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k(x)$$

1,00 ن	1	بين أن : $F(x) - S_n(x) = \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\right)dt \; ; \; (\forall n \in \mathbb{N}),(\forall x \in J)$
0,50 ن	2 أ	بين أن الدالة $x \to (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعا على المجال J .
0,50 ن	ب	استنتج أن الدالة $t \to \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على المجال $[0,x]$ ، مهما يكن x من J .
1,00 ن	3 أ	بين أن : $0 \le F(x) - S_n(x) \le \left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) \; ; \; (\forall n \in \mathbb{N}),(\forall x \in J)$
0,50 ن	ب	استنتج أنه مهما يكن العدد x من المجال J لدينا : $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = F(x)$
0,50 ن	4 أ	حدد $F(x)$ لكل x من المجال J .
0,25 ن	ب	حدد النهاية التالية : $\lim_{x\to1^-} F(x)$

التمرين الأول : (4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين A و I المعرفتين بما يلي :

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad و \quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

نضع : $A^0=I$ و $A^1=1$ و $A^2=A\times A$ و $A^{n+1}=A^n\times A$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$.

0,50 ن	I 1	بين أن : $A^{2k}=I$; $(\forall k\epsilon\mathbb{N})$
0,50 ن	2	بين أن المصفوفة A تقبل مقلوبا A^{-1} ينبغي تحديده .

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لكل x و y من المجال $I=]\alpha;+\infty[$ نضع : $x*y=(x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0,50 ن	II 1 أ	بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I .
0,50 ن	ب	بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I .
0,50 ن	ج	بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده .
0,50 ن	2	بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق φ المعرف من I نحو $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $\varphi(x)=\frac{1}{x-\alpha}$

0,50 ن	3 أ	بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.
0,50 ن	ب	حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ بحيث : $x^{(3)}=x*x*x$.

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N=\underbrace{111\cdots11}_{2010\ fois}$

0,25 ن	1	بين أن العدد N قابل للقسمة على العدد 11 .
0,75 ن	2 أ	تحقق أن العدد 2011 أولي ، و أن : $10^{2010}-1=9N$.
0,50 ن	ب	بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$.
0,50 ن	ج	استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N
0,50 ن	3	بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

ليكن m عددا عقديا غير منعدم . و نعتبر فى $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E_m):\ z^2+[(1-i)m-4]z-im^2-2(1-i)m+4=0$$

0,50 ن	I 1	تحقق أن العدد $z_1=2-m$ حل للمعادلة (E_m) .

ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

0,50 ن	2 أ	أثبت صحة التكافؤ التالي : $im^2+2(1-i)m-3=0 \iff z_1z_2=1$.
1,00 ن	ب	حدد قيمتي m بحيث $z_1z_2=1$.

	II			المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z' = -(z-1)+1$. و الدوران R الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران R .
0,25 ن	**II**	**1**	أ	بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1 .
0,25 ن			ب	بين أن $z'' = iz + 2$.
0,50 ن		**2**	أ	حدد طبيعة المثلث $AM'M''$.
0,50 ن			ب	حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة .

التمرين الرابع : (6,5 ن)

الهدف من هذا التمرين هو دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $(E) : e^x = x^n$ بحيث $n\in\mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln x} & ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,25 ن	**I**	**1**		تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $(e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x))$
0,50 ن		**2**		بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر .
1,50 ن		**3**		أحسب النهايات التالية مع إعطاء تأويلات هندسية للنتائج المحصل عليها . $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim_{x\to1^-} f(x)$
0,75 ن		**4**		أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$. ثم اعط جدول تغيراتها .
0,50 ن		**5**		بين أن $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها .
0,50 ن		**6**		أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,50 ن		**7**		بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين a_n و b_n بحيث $1 < a_n < e < b_n$.
				لندرس في هذه الفقرة تقارب المتتاليتين $(a_n)_{n\geq3}$ و $(b_n)_{n\geq3}$.
0,50 ن	**II**	**1**		بين أن : $(\forall n \geq 3) \ ; \ b_n \geq n$. ثم استنتج أن نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq3}$.
0,50 ن		**2**	أ	بين أن المتتالية $(a_n)_{n\geq3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .
0,50 ن			ب	بين أن : $(\forall n \geq 3) \ ; \ \frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$. ثم استنتج نهاية المتتالية $(a_n)_{n\geq3}$.
0,50 ن			ج	بين أن : $\lim_{n\infty} (\alpha_n)^n = e$

التمرين الخامس : (3,5 ن)

				نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$
0,50 ن		**1**	أ	بين أن : $(\forall x \geq 0) \ ; \ 0 \leq F(x) \leq x\,e^{-x^2}$.
0,50 ن			ب	بين أن : $(\forall x \geq 1) \ ; \ e^{-x^2} \leq e^{-x}$. ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.
0,50 ن		**2**		بين أن F قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$. و أن : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2x\,F(x)$; $(\forall x \geq 0)$
				نعتبر الدالة G المعرفة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \ ; \ x \neq \frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$
0,50 ن		**3**	أ	بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$.
0,50 ن			ب	بين أنه يوجد عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ بحيث $F'(c) = 0$ و $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$.
				نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$.
0,50 ن		**4**	أ	بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.
0,50 ن			ب	استنتج أن العدد c وحيد ثم اعط جدول تغيرات الدالة F .

التمرين الأول : (3,5 ن)

لكل x و y من المجال $I =]0,1[$ نضع : $x * y = \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$.

1	أ	بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I . — 0,50 ن
	ب	بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I . — 0,50 ن
	ج	بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده . — 0,50 ن
2		بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية . — 0,50 ن

نعتبر المجموعتين $H = \{ 2^n \; ; \; n\epsilon\mathbb{Z} \}$ و $K = \left\{ \frac{1}{2^n+1} \; ; \; n\epsilon\mathbb{Z} \right\}$.

3 أ) بين أن H زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$. — 0,50 ن

نعتبر التطبيق φ المعرف من H نحو I بما يلي : $\varphi(x) = \frac{1}{1+x}$.

ب) بين أن التطبيق φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$. — 0,50 ن

ج) استنتج أن $(K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق $10^x \equiv 2 \; [19]$.

1 أ) تحقق أن : $10^{x+1} \equiv 1 \; [19]$. — 0,25 ن

ب) بين أن : $10^{18} \equiv 1 \; [19]$. — 0,50 ن

ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $(x+1)$.

2 أ) بين أن : $10^d \equiv 1 \; [19]$. — 0,75 ن

ب) بين أن : $d = 18$. — 0,50 ن

ج) استنتج أن : $x \equiv 17 \; [18]$. — 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

I نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : \; z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

1) بين أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E) . — 0,50 ن

2) حدد العددين العقديين α و β بحيث : — 0,50 ن

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

3 أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $5-12i$. — 0,50 ن

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . — 0,50 ن

II المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر A و B و C التي ألحاقها على التوالي: $a = -1+3i$ و $b = -2i$ و $c = 2+i$

1) بين أن ABC قائم الزاوية و متساوي الساقين في النقطة C . — 0,50 ن

نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران R_2 الذي مركزه A و زاويته $\frac{-2\pi}{3}$.

لتكن M من المستوى لحقها z و M_1 صورتها بالدوران R_1 و M_2 صورتها بالدوران R_2 .

2 أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران R_1 هي : $z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$ — 0,50 ن

ب) حدد العدد العقدي z_2 لحق النقطة M_2 بدلالة z . — 0,50 ن

ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ نقطة ثابتة . — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,0 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \ln x$.
و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
و نأخذ : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1\,cm$.

1,00 ن — **1** أحسب النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x)$

0,50 ن — **2** أ ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن — ب بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J وجب تحديده .
ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

0,50 ن — **3** أحسب $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}^{-1})$ في نفس المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن — **4** أ أحسب التكامل $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$.

0,50 ن — ب استنتج مساحة الحيز من المستوى المحصور بين $(\mathcal{C}^{-1})$ و المستقيمات التي معادلاتها الديكارتية على التوالي هي : $x = 1$ و $x = e+1$ و $y = x$.

0,25 ن — **5** أ بين أن المعادلة $x + \ln x = n$: (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n لكل n من $\mathbb{N}^*$.

0,50 ن — ب حدد القيمة العددية للحل x_1 . ثم بين أن : $\lim_{n\infty} x_n = +\infty$

0,50 ن — **6** أ بين أن : $f(x_n) \leq f(n)$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$. ثم استنتج أن : $x_n \leq n$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

0,50 ن — ب بين أن : $n - \ln n \leq x_n$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$.

0,50 ن — ج أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{n\infty}\left(\frac{x_n - n}{n}\right)$ و $\lim_{n\infty}\left(\frac{x_n}{n-\ln n}\right)$

التمرين الخامس : (4,0 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,50 ن — **1** بين أنه من أجل $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]0,1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 ن — **2** بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة .

0,50 ن — **3** أ تحقق أن : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$; $(\forall t \neq 1)$

0,50 ن — ب استنتج أن : $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n}\left(\frac{t^n}{1-t}\right)dt$

0,75 ن — **4** أ بين أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n}\left(\frac{t^n}{1-t}\right)dt$

0,50 ن — ب بين أن : $0 \leq \int_0^{\alpha_n}\left(\frac{t^n}{1-t}\right)dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$; $(\forall n \geq 2)$

0,50 ن — ج استنتج أن : $\lim_{n\infty} (\alpha_n) = 1 - e^{-1}$

التمرين الأول : (3,5 ن)

I في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين A و I المعرفتين بما يلي :

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

0,75 ن — **I 1** أحسب : $I-A$ و A^2 .

0,50 ن — **2** استنتج أن المصفوفة A تقبل مقلوبا يتم تحديده .

لكل a و b من المجال $I=]1;+\infty[$. نضع : $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

0,25 ن — **II 1** تحقق أن : $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1 \;;\; \forall\,(x,y)\,\epsilon\,\mathbb{R}^2$.

0,50 ن — **2** بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

نذكر أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق φ المعرف من $\mathbb{R}_+^*$ نحو I بما يلي : $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$

0,50 ن — **3 أ** بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$.

0,25 ن — **ب** استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(I,*)$.

0,75 ن — **ج** بين أن المجموعة $\mathcal{T}=\left\{\sqrt{1+2^m}\;;\;m\epsilon\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(I,*)$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E)\;:\; i\,z^2+(2-i)a\,z-(1+i)a^2=0 \;;\; a\,\epsilon\,\mathbb{C}^*$$

0,75 ن — **I 1** حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) .

0,25 ن — **2 أ** تحقق أن : $z_1z_2=a^2(i-1)$.

0,50 ن — **ب** أثبت صحة التكافؤ التالي : $z_1z_2\,\epsilon\,\mathbb{R} \iff \arg a\equiv\frac{-3\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

ليكن c عددا حقيقا غير منعدم و z عدد عقدي غير منعدم .

نعتبر النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي هي : 1 و $1+i$ و c و ic و z .

0,50 ن — **II 1 أ** بين التكافؤ التالي : A و D و M نقط مستقيمية $\iff (ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$.

0,50 ن — **ب** بين التكافؤ التالي : $(AD)\perp(OM) \iff (ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$.

ليكن h لحق النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AD) .

0,75 ن — **2 أ** بين أن : $h-(1+i)=\frac{i}{c}(h-c)$

0,25 ن — **ب** استنتج أن المستقيمان (BH) و (CH) متعامدان .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E)\,:\,143x-195y=52$

0,50 ن — **1 أ** حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 143 . و استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

0,75 ن — **ب** علما أن $(-1;-1)$ حل خاص لـ (E) . أوجد الحل العام للمعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

0,50 ن — **2** ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و أولي مع العدد 5 . بين أن : $n^{4k}\equiv1\,[5]\;;\;(\forall k\epsilon\mathbb{N})$.

ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث $x\equiv y\,[4]$.

0,50 ن | 3 | أ | بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n^x \equiv n^y\ [5]$.

0,50 ن | ب | استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n^x \equiv n^y\ [10]$.

ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث يكون (x,y) حلا للمعادلة (E) .

0,25 ن | 4 | بين أنه مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$ ، العددان n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

التمرين الرابع : (5,5 ن)

ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 ن | 1 | أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$

0,50 ن | 2 | أ | أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$ بجوار $-\infty$.

0,50 ن | ب | بين أن $(D) : y = x$ مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_n)$ بجوار $+\infty$.

و حدد الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C}_n)$ و (D) .

0,75 ن | 3 | أدرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها .

0,50 ن | 4 | أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_3)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ نأخذ : $f_3(-0,6) \approx 0$ و $f_3(-1,5) \approx 0$.

0,25 ن | 5 | أ | بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $\frac{e}{n} < \ln n$.

1,00 ن | ب | بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n

بحيث : $x_n \leq -\ln n$ و $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$.

0,50 ن | ج | أحسب النهايتين : $\lim\limits_{n\infty} (x_n)$ و $\lim\limits_{n\infty} (y_n)$

لتكن g الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \ ;\ \forall x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

0,25 ن | 6 | أ | بين أن الدالة g متصلة على يمين الصفر .

0,50 ن | ب | تحقق أن : $(\forall n \geq 3)\ ;\ g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$

0,25 ن | ج | استنتج النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$

التمرين الخامس : (4,5 ن)

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \ ;\ \forall\ x \in\ ]0,1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

0,25 ن | 1 | ليكن x عنصرا من $[0,1]$. بين أنه مهما يكن t من $[0,x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$

0,50 ن | 2 | أ | ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$. بين أن : $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt$

0,75 ن | ب | بين أن : $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$. ثم استنتج أن الدالة F متصلة على يمين الصفر .

0,75 ن | 3 | بين أن : $\forall\ x \in [0,1]\ ;\ \int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right) dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

0,50 ن | 4 | أ | ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$. بين أن : $F'(x) = \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$

0,75 ن | ب | بين أن : $\forall\ x \in\ ]0,1]\ ;\ \frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

0,75 ن | ج | بين أن : $\forall\ x \in\ ]0,1]\ ;\ \frac{-4}{3} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

0,25 ن | د | استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على يمين الصفر و حدد العدد المشتق على اليمين في 0 .

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

لكل a و b من المجال $I=[1;+\infty[$ ، نضع : $a\perp b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1\right)^2$.

I	1	بين أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في I . — 0,50 ن
	2	بين أن القانون $\perp$ تبادلي و تجميعي في I . — 0,50 ن
	3	بين أن القانون $\perp$ يقبل عنصرا محايدا في I وجب تحديده . — 0,25 ن

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

II	1		بين أن $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}x & 2(x-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix} / x\epsilon\mathbb{R}^*\right\}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ — 0,50 ن

نعتبر التطبيق φ المعرف من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$ بما يلي : $\varphi(x)=M(x)$

	2	أ	بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$. — 0,50 ن
		ب	استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(E,\times)$. — 0,50 ن
		ج	بين أن المجموعة $H=\left\{\begin{pmatrix}2^n & 2^{n+1}-2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \; ; \; n\,\epsilon\,\mathbb{Z}\right\}$ زمرة جزئية من $(E,\times)$. — 0,75 ن

التمرين الثاني : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)\;:\; z^2-4\left(1+\frac{2}{3}i\right)z+\frac{5}{3}+4i=0$

I	1	أ	تحقق أن العدد العقدي $z_1=1+\frac{2}{3}i$ حل للمعادلة (E) . — 0,50 ن
		ب	بين أن الحل الثاني للمعادلة (E) هو $z_2=3\;z_1$. — 0,50 ن

نعتبر ثلاث نقط A و B و Ω مختلفة مثنى مثنى ألحاقها على التوالي : a و b و ω .

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $P=r(A)$ و $B=r(Q)$.

ليكن العدد العقدي p لحق النقطة P و العدد العقدي q لحق النقطة Q .

II	1	أ	بين أن : $p=\omega+e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ و $q=\omega+e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$. — 0,50 ن
		ب	بين أن : $\left(\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ — 0,25 ن
		ج	بين أن : $\left(\dfrac{p-a}{q-b}\right)=\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$ — 0,50 ن
	2	أ	نفترض أن : $\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$. بين أن الرباعي $APQB$ متوازي أضلاع . — 0,75 ن
		ب	بين أن : $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\;[2\pi]$. و استنتج أن الرباعي $APQB$ مستطيل . — 0,75 ن

التمرين الثالث : (3,0 ن)

0,50 ن		1	أ	تحقق أن العدد 503 عدد أولي .
0,50 ن			ب	بين أن : $7^{502} \equiv 1\ [503]$. ثم استنتج أن : $7^{2008} \equiv 1\ [503]$.
				نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E) : 49x - 6y = 1$.
0,50 ن		2		علما أن $(1,8)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل .
				نضع : $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$.
0,50 ن		3	أ	بين أن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E) .
0,50 ن			ب	بين أن $N \equiv 0\ [4]$ و $N \equiv 0\ [503]$.
0,50 ن			ج	استنتج أن N يقبل القسمة على العدد 2012 .

التمرين الرابع : (7,5 ن)

	I			لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$
0,50 ن	I	1		أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$.
0,50 ن		2		استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.
				لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.
0,50 ن	II	1		بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
0,50 ن		2		بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$.
0,50 ن		3		ضع جدول تغيرات الدالة f .
0,50 ن		4		أنشئ $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}')$ المنحنيين الممثلين على التوالي للدالتين f و $-f$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.
				نقبل أن $-0,7$ قيمة مقربة لأفصول نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى $(\mathcal{C})$.
0,50 ن		5		بين أن : $\forall\ x \in\ ]-1,0[\ ;\ 0 < f'(x) < g(e)$.
0,50 ن		6		بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$. و أن $-1 < \alpha < 0$.
				نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n)\ ;\ \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$
0,50 ن		7	أ	بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ -1 \le u_n \le 0$.
0,50 ن			ب	بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \le g(e)\lvert u_n - \alpha\rvert$.
0,50 ن			ج	استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \lvert u_n - \alpha\rvert \le \left(g(e)\right)^n$.
0,50 ن			د	علما أن $g(e) < 0,6$ ، أحسب النهاية : $\lim_{n\infty} (u_n)$

التمرين الخامس : (2,5 ن)

				نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right) dt$
0,25 ن		1		أحسب $F(1)$.
0,50 ن		2	أ	بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$. و احسب $F'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.
0,25 ن			ب	استنتج أن : $(\forall x > 0)\ ;\ F(x) = 0$.
0,50 ن		3		بين أن : $(\forall x > 0)\ ;\ F(x) = \left(Arctan(x) + Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt$
0,50 ن		4		بين أن : $(\forall\ x > 0)\ ;\ Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan(x)$
0,50 ن		5		بين أن : $(\forall\ x > 0)\ ;\ \ln x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t} dt$

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدية تبادلية و كاملة .

1 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2 \; ; \; x * y = x + y - 2$

0,50 ن	1	أ	بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي .
0,25 ن	1	ب	بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده .
0,50 ن	1	ج	بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية .

2 نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بـ : $\forall(x,y)\epsilon\mathbb{Z}^2 \; ; \; x \top y = xy - 2x - 2y + 6$

و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $(\forall x\epsilon\mathbb{Z}) \; ; \; f(x) = x + 2$

0,50 ن	2	أ	بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z}, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, \top)$.
0,25 ن	2	ب	بين أن : $\forall\,(x,y,z)\,\epsilon\,\mathbb{Z}^3 \; ; \; (x * y) \top z = (x \top z) * (y \top z)$
0,75 ن	3		إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z}, *, \top)$ حلقة تبادلية و واحدية .
0,25 ن	4	أ	بين أن : $x \top y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$.
0,25 ن	4	ب	استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \top)$ كاملة .
0,25 ن	4	ج	هل $(\mathbb{Z}, *, \top)$ جسم ؟ (علل الجواب)

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$$

0,25 ن	I	1	تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$.
0,50 ن	I	2	حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي : a و $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .

ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$

(حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

0,50 ن	II	1		تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع .
0,50 ن	II	2	أ	بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$
0,50 ن	II	2	ب	بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع .

0,50 ن | II | 3 | أ | نفترض أن $M \neq A$ و $M \neq B$ بين أن : $\dfrac{z-b_1}{z-a_1} = -\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \times \dfrac{a}{b}$

0,75 ن | II | 3 | ب | بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة .

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1
و التي تحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$ التالية : $(\mathfrak{R}) :\ 3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$.

1 | نفترض أن n يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

0,75 ن | 1 | أ | بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$.

0,50 ن | 1 | ب | بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$.

0,50 ن | 1 | ج | بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$.

0,50 ن | 1 | د | ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $(p-1)$.
(يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث : $0 \leq r < p-1$ و $q \epsilon \mathbb{Z}$)
بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$.

0,75 ن | 2 | إستنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية $(\mathfrak{R})$.

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x}\ ;\ (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

0,25 ن | 1 | أ | بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 .

0,75 ن | 1 | ب | بين أن : $(\forall x > 1)\ ; \ln x < x - 1$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

0,50 ن | 2 | أ | أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h .

0,25 ن | 2 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < h(x) \leq 1$.

الجزء الثاني نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,dt\ ;\ (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة g
في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,25 ن | 1 | أ | تحقق أن : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2\ ;\ (\forall x > 1)$

0,25 ن | 1 | ب | تحقق أن : $\displaystyle g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\,dt\ ;\ (\forall x > 1)$

0,50 ن | 1 | ج | بين أن : $\displaystyle g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^{x} \left(\frac{t-1}{t\ln t}\right) dt\ ;\ (\forall x > 1)$

0,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(x-\sqrt{x})h(\sqrt{x}) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x-\sqrt{x})h(x)\ ;\ (\forall x > 1)$

0,50 ن | 2 | ب | استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .

0,75 ن | 2 | ج | بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 0$

0,75 ن | 3 | أ | بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$. و أن : $(\forall x > 1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$

0,50 ن | 3 | ب | استنتج أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن | 3 | ج | أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

الجزء الثالث

0,50 ن | I | 1 | بين أن الدالة : $k : x \longmapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$.

0,25 ن | I | 2 | استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1;+\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$.

II | نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + g(u_n)\ ;\ (\forall n \geq 0) \\ 1 \leq u_0 < \alpha \end{cases}$$

0,50 ن | II | 1 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

0,50 ن | II | 1 | ب | بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

0,75 ن | II | 1 | ج | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة . و أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$

0,50 ن | II | 2 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$

0,50 ن | II | 2 | ب | بين أن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0,25 ن | II | 2 | ج | استنتج مرة ثانية أن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha$

التمرين الأول : (3,5 ن)

الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما .

I لكل x و y من المجال $G =]1,2[$ نضع : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0,50 ن — **I 1** بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

I 2 نذكر أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية

و نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G بما يلي : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

0,75 ن — **I 2 أ** بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

0,50 ن — **I 2 ب** استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد .

II نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و نضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

0,50 ن — **II 1 أ** تحقق أن : $A^3 = \mathcal{O}$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

0,50 ن — **II 1 ب** تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A+I) = I$.

ثم استنتج أن المصفوفة $(A+I)$ تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ يتم تحديده .

0,75 ن — **II 2** لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a,b) = a \cdot I + b \cdot A$.

و نعتبر المجموعة : $E = \{ \; M(a,b) \; / \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \; \}$

بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني : (3 ن)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 4 كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

1,00 ن — **I 1** حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

0,50 ن — **I 2** أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

II ننجز التجربة العشوائية التالية في ثلاث مراحل كالآتي :

المرحلة الأولى : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة الثانية : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة الثالثة : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

$N =$ { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء } .

$R =$ { الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء } .

$E =$ { جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء } .

0,50 ن	II	1	بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$
0,50 ن	II	2	أحسب $p(E)$
0,50 ن	II	3	أحسب احتمال الحدث R علما أن الحدث E قد تحقق .

التمرين الثالث : (3,5ن)

I ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) : 2\,z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

0,50 ن — I 1 — بين أن : $z_1 = \dfrac{(a-1)(1+i)}{2}$ و $z_2 = \dfrac{(a-1)(1-i)}{2}$ هما حلي المعادلة (E) .

I 2 — نأخذ $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$.

0,50 ن — I 2 أ — بين أن : $a - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

1,00 ن — I 2 ب — استنتج الشكل المثلثي لكل من z_1 و z_2 .

II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

نفترض أن $\Re e(a) < 0$ و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$.

0,50 ن — II 1 — حدد لحقي كل من J و K منتصفي القطعتين $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a .

0,50 ن — II 2 — ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.و r_2 الدوران الذي مركزه K و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

نضع : $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$.

و ليكن c' لحق C' و a' لحق A' . بين أن : $a' = z_1$ و $c' = z_2$.

0,50 ن — II 3 — أحسب $\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$.

التمرين الرابع : (8,25 ن)

1 — لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (x\ln x)^2}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

0,50 ن — 1 أ — بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,50 ن — 1 ب — أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$)

0,50 ن — 1 ج — بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$. و أن مشتقتها معرفة بـ :

$$(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = \frac{-x\ln x\,(1 + \ln x)}{(1 + (x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

0,50 ن — 1 د — ضع جدول تغيرات الدالة f .

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

و ليكن $(\mathscr{C}_F)$ المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

0,25 ن | 2 | أ | حدد دالة أصلية للدالة $x\longmapsto\dfrac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e,+\infty[$.

0,50 ن | 2 | ب | بين أن : $t\ln t<\sqrt{1+(t\ln t)^2}<\sqrt{2}\,t\ln t\;;\;(\forall t\geq e)$

0,75 ن | 2 | ج | بين أن : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)<\int_e^x\dfrac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}dt<\ln(\ln x)\;;\;(\forall t\geq e)$

0,50 ن | 2 | د | استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ و أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

0,50 ن | 2 | هـ | بين أن $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما .

1,00 ن | 2 | ز | أنشئ $(\mathscr{C}_F)$ (نأخذ من أجل ذلك $F(1)\approx 0{,}5$ و $F\left(\frac{1}{e}\right)\approx 0{,}4$)

3 | لكل x من المجال $[0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x)=x-F(x)$.

0,75 ن | 3 | أ | بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ ثم ادرس تغيرات الدالة φ .

0,50 ن | 3 | ب | بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ ، المعادلة $\varphi(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0,+\infty[$.

0,50 ن | 3 | ج | بين أن : $\alpha_n\geq n\;;\;(\forall n\epsilon\mathbb{N})$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\infty}\alpha_n$

0,50 ن | 4 | أ | بين أن : $0<\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}<\dfrac{F(n)}{n}+f(n)\;;\;(\forall n\geq 1)$

(من أجل ذلك يمكن استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)

0,50 ن | 4 | ب | أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)$

التمرين الخامس : (1,75 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\left(\dfrac{arctan(n)}{arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ و $v_n=\ln(u_n)$

0,25 ن | 1 | تحقق أن : $v_n=n^2[\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))]\;;\;(\forall n\geq 1)$

0,50 ن | 2 | باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :

$$(\forall n\geq 1),(\exists\, c\,\epsilon\,]\,n\,;n+1\,[\,)\;;\;v_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)arctan(c)}$$

0,50 ن | 3 | بين أن : $\dfrac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{(1+(1+n)^2)arctan(n+1)}\;;\;(\forall n\geq 1)$

0,50 ن | 4 | أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\infty}u_n$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

الامتحـــان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريـــا
الدورة العـــادية 2014

مـادة الريـاضيات
شعبة العلوم الرياضية أ و ب
المعامل : 9
مدة الانجاز : أربع ساعات

التمرين الأول : (3,0 ن)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = \underbrace{333\cdots3}_{n\ fois}1$.

0,50 ن	**1** تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان .
0,50 ن	**2** بين أن : $3\,a_n + 7 = 10^{n+1}$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$.
0,75 ن	**3** بين أن : $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$; $(\forall k \epsilon \mathbb{N})$.
0,75 ن	**4** بين أن : $3\,a_{30k+1} \equiv 0\ [31]$; $(\forall k \epsilon \mathbb{N})$. ثم استنتج أن العدد 31 يقسم a_{30k+1} .
0,50 ن	**5** بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، إذا كان $n \equiv 1\ [30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$.

و نعتبر المجموعة التالية : $E = \{\, M(a,b)\ ;\ (a,b)\,\epsilon\,\mathbb{R}^2 \}$.

0,50 ن	**1** بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.
0,75 ن	**2** أحسب $J^2 = J \times J$ حيث $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

نعرف على $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $A * B = A \times N \times B$

حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و حيث A و B مصفوفتين من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و نعتبر التطبيق φ المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $(a+ib)$ بالمصفوفة $M(a,b)$ حيث: a و b عددان حقيقيان

0,50 ن	**3** أ بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),*)$.
0,25 ن	ب نضع $E^* = E - \{\mathcal{O}\}$. بين أن : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.
0,50 ن	ج بين أن $(E^*,*)$ زمرة تبادلية .
0,50 ن	**4** بين أن : $A*(B+C) = A*B + A*C$; $\forall\,(A,B,C)\,\epsilon\,E^2$.
0,50 ن	**5** استنتج مما سبق أن $(E,+,*)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $\theta\ \epsilon\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(E):\ z^2 - \sqrt{2}\,e^{i\theta}\,z + e^{2i\theta} = 0$

0,25 ن	**1** أ تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = \left(\sqrt{2}\,i\,e^{i\theta}\right)^2$.
0,75 ن	ب أكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$.

نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألحاقها على التوالي هي : 1 و -1 و $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ و $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ و $\sqrt{2}e^{i\theta}$

0,50 ن		2	أ بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان .
0,25 ن			ب ليكن k منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن O و k و A نقط مستقيمية .
0,25 ن			ج استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1\,T_2]$.
0,25 ن		3	أ ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$. اعط الصيغة العقدية للدوران r .
0,50 ن			ب تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو $b=\sqrt{2}\,e^{i\theta}+i$.
0,25 ن			ج بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان .
0,25 ن		4	حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالازاحة التي متجهتها $(-\vec{v})$.
0,25 ن		5	بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$.

التمرين الرابع : (8,0 ن)

	I		نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{-x\ln x}{1+x^2}\ ;\ \forall x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$
0,50 ن	I	1	أ بين أن الدالة f متصلة على المجال $]0;+\infty[$. و متصلة على يمين الصفر . فيما يلي نقبل أن f متصلة المجال $[0,+\infty[$.
0,25 ن			ب أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,+\infty[$.
0,25 ن		2	أ بين أن : $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)$.
0,25 ن			ب بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.
0,50 ن			ج بين أنه يوجد α من $]0,1[$ بحيث $f'(\alpha)=0$.
0,50 ن			د استنتج أن : $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$.
			نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة F في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
0,50 ن	II	1	أ تحقق أن : $\frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}\le 1\ ;\ \forall\,t\,\epsilon\,[1;+\infty[$.
1,00 ن			ب بين أن : $F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2\le F(x)\le F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2\ ;\ \forall x\ge 1$ (لاحظ أن : $F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt-\int_1^x\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}dt$)
1,00 ن			ج أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها .
0,50 ن		2	أ بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ ثم احسب $F'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$.
0,25 ن			ب أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0,+\infty[$.
0,50 ن	III	1	أ بين أن : $-t\ln t\le\frac{1}{e}\ ;\ (\forall\,t>0)$
0,25 ن			ب بين أن : $f(t)\le\frac{1}{e}\ ;\ (\forall\,t\ge 0)$
0,25 ن			ج استنتج أن : $F(x)<x\ ;\ (\forall\,x>0)$.
			نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=F(u_n)\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0\,\epsilon\,]0,1[\end{cases}$
0,50 ن		2	أ بين أن : $u_n\,\epsilon\,]0,1[\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$.
0,50 ن			ب بين أن المتتالية $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة .
0,50 ن			ج حدد النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

التمرين الخامس : (2,0 ن)

			نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x)=\frac{1}{x^2}\,e^{-\left(\frac{1}{x}\right)}\ ;\ \forall\,x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$
0,25 ن		1	أ بين أن الدالة g متصلة على المجال $]0,+\infty[$.
0,25 ن			ب بين أن الدالة g متصلة على يمين الصفر .
0,25 ن			ج بين أن الدالة g غير متصلة في الصفر .

لكل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ نضع : $L(x) = \int_0^x g(t)\,dt$.

0,25 ن		**2**	أ	أحسب $L(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.
0,25 ن			ب	بين أن الدالة L متصلة على المجال $]0,+\infty[$.
0,25 ن			ج	أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x \to 0^+} L(x)$

نقبل في هذا السؤال أن g متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

و لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر أو يساوي 1 نضع :

$$S_n = n\left(\left(\frac{1}{1}\right)^2 e^{-n} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{-\frac{n}{2}} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 e^{-\frac{n}{3}} + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 e^{-\left(\frac{n}{n-1}\right)}\right)$$

0,25 ن		**3**	أ	بين أن : $(\forall\, n \geq 1)\ ;\ S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\dfrac{k}{n}\right)$
0,25 ن			ب	استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الأول : (2,0 ن)

نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W . يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين .
و يحتوي كل صندوق من الصندوقين U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.
ننجز التجربة العشوائية التالية : " نسحب كرة من الصندوق W ، إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تآنيا كرتين . أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تآنيا كرتين .

0,25 ن | 1 | ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟

0,75 ن | 2 | ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة ؟

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة .

1,00 ن | 3 | حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الثاني : (1,0 ن)

ليكن n عددا طبيعيا غير منعدم . نضع $b_n = 2\cdot 10^n + 1$ و $c_n = 2\cdot 10^n - 1$.

0,50 ن | 1 | بين أن : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما

0,50 ن | 2 | أوجد زوجاً (x_n, y_n) من $\mathbb{Z}^2$ يحقق $b_n x_n + c_n y_n = 1$.

التمرين الثالث : (3,75 ن)

نضع $J =]-1;1[$.

لكل عنصرين a و b من المجال J نضع : $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

0,75 ن | I | 1 | تحقق أن : $\forall (a,b) \in J^2 \;;\; 1+ab > 0$. ثم استنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في J .

0,50 ن | 2 | أ | بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي .

0,25 ن | ب | بين أن المجموعة $(J,*)$ تقبل عنصرا محايدا وجب تحديده .

0,50 ن | ج | بين أن $(J,*)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق f المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

0,75 ن | II | 1 | بين أن الدالة f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J .

ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب)

لكل x و y من J نضع : $x \perp y = f\big(g(x)\times g(y)\big)$.

0,50 ن | 2 | بين أن f تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(J^*,\perp)$. حيث : $J^* = J - \{0\}$.

نذكر أن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية و نقبل أن $\perp$ توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في J .

0,50 ن | 3 | بين أن $(J,*,\perp)$ جسم تبادلي .

التمرين الرابع : (7,25 ن)

0,50 ن | I | 1 | حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $z^2 + i = 0$. ليكن a الحل الذي يحقق $\mathcal{R}e(a) > 0$

0,50 ن | 2 | أ | حدد معيار و عمدة العدد العقدي $1+a$.

0,25 ن | ب | استنتج أن : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

0,50 ن | ج | تحقق أن : $(1+a)(1-a) = 1+i$ ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $(1-a)$.

II في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و M و M' التي ألحاقها على التوالي a و $-a$ و z و z' . و نفترض أن $zz' + i = 0$.

0,25 ن | 1 | لتكن N النقطة التي لحقها هو $\overline{z}$ مرافق z . بين أن : $(OM') \perp (ON)$.

0,25 ن | 2 أ | بين أن : $z' - a = i\left(\frac{z-a}{az}\right)$.

0,50 ن | ب | بين أنه إذا كان $z \neq -a$ فإن $z' \neq -a$. و بين أن : $\left(\frac{z'-a}{z'+a}\right) = -\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

0,50 ن | 3 | نفترض أن A و B و M غير مستقيمية . بين أن M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM.

التمرين الخامس : (7,5 ن)

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$. بحيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.

1,00 ن | I 1 | أحسب النهايتين : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما .

0,75 ن | 2 | أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة g_n المعرفة على $]0;1[$ بما يلي : $g_n(x) = f(x) - x^n$

0,50 ن | 3 أ | بين أن الدالة g_n تناقصية قطعا على المجال $]0;1[$.

0,50 ن | ب | استنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\exists!\ \alpha_n \in]0;1[\ ;\ f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$.

0,50 ن | ج | بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

0,75 ن | د | بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . نضع $l = \lim_{n\infty} (\alpha_n)$

0,25 ن | 4 أ | تحقق أن : $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$.

0,25 ن | ب | تحقق أن : $h(\alpha_n) = n\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$. حيث : $h(x) = \frac{-1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

0,25 ن | ج | بين أن $l = 1$.

0,25 ن | د | استنتج أن : $\lim_{n\infty} (\alpha_n)^n = 0$

0,25 ن | II 1 أ | أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(t)\,dt$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$.

0,50 ن | ب | باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_x^1 f(t)\,dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\ln x\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$

0,50 ن | ج | استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي هي : $x = 1$ و $x = e^2$ و $y = 0$.

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

0,50 ن | 2 أ | بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$.

لدينا : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

0,50 ن | ب | بين أن : $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

0,25 ن | ج | استنتج أن : $\lim(u_n) = 4$

ت\6

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \left(e^{-t^2}\right) dt$.

لكل x من $\mathbb{R}$ نضع : $k(x) = \int_1^{x} \left(e^{-t^2}\right) dt$

0,25 ن | 1 أ | تحقق أنه لكل x من $[0;+\infty[$ لدينا : $g(x) = -k(\sqrt{x})$.

0,50 ن | ب | بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0;+\infty[$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

0,50 ن | ج | أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن g تناقصية قطعا على المجال $[0;+\infty[$

0,75 ن | 2 أ | بين أن : $\frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-1}{2\sqrt{x}} e^{-x}\ ;\ (\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*)$

0,50 ن | ب | استنتج أن g قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

التمرين الأول : (3,0 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b \end{pmatrix} \;\; ; \;\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0,50 ن | 1 | أ | بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

0,50 ن | ب | بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي E .

0,50 ن | 2 | أ | بين أن $J^2 \in E$ و استنتج أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,75 ن | ب | بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية .

0,75 ن | ج | بين أن العنصر $M(a,b)$ قاسم للصفر في E إذا و فقط إذا كان $a^2 - 4b^2 = 0$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن a عددا عقديا . و نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$(E) \;\; : \;\; z^2 - az + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0$$

ليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E) .

0,50 ن | 1 | بين أن : $|z_0| \cdot |z_1| = 1$. و أن : $\arg(z_0) + \arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$.

0,50 ن | 2 | أ | نضع $z_0 = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$. بين أن : $a = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}}$.

0,50 ن | ب | استنتج أنه إذا كان $z_0 = i$ فإن : $1 + ia - a^2 - ia^3 + a^4 + ia^5 = 0$

نفترض في هذا السؤال أن $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

0,75 ن | 3 | أ | أكتب العدد z_1 على شكليه المثلثي و الجبري . ثم استنتج قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

0,50 ن | ب | أكتب العدد a على شكليه المثلثي و الجبري .

نعتبر التحويل R الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$. حيث $z' = iz + \sqrt{2}\, e^{\frac{-i\pi}{6}}$.

و نعتبر النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ حيث $a = e^{\frac{i\pi}{12}}$ و $b = e^{\frac{i\pi}{4}}$ و $C = R(B)$.

0,50 ن | 4 | أ | بين أن R دوران محددا مركزه و زاويته .

0,25 ن | ب | تحقق أن : $(c-a) = i(b-a)$.

0,50 ن | ج | نضع $R(C) = D$. بين أن A منتصف القطعة $[BD]$.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

1,00 ن | I | بين أن مجموعة حلول المعادلة $27x - 31y = 1$ في $\mathbb{Z}^2$ هي $\{ (31k - 8; 27k - 7) \;\; ; \;\; k \in \mathbb{Z} \}$.

نعتبر المجموعة التالية : $E = \{0,1,2,\cdots,30\}$.

0,50 ن | II | 1 | حدد العدد الوحيد a من E الذي يحقق $27a \equiv 1 \; [31]$.

ليكن f التطبيق من E نحو E الذي يربط كل عنصر n من E بباقي قسمة العدد $(27n + 4)$ على 31 .

0,50 ن		2	أ	بين أن f تطبيق تبايني من E نحو E .
0,50 ن			ب	بين أن f تطبيق شمولي من E نحو E .
0,50 ن			ج	استنتج أن f تقابل و حدد تقابلة العكسي f^{-1} .

التمرين الرابع : (10 ن)

I **الجزء الأول** : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\,e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} \;;\; x \in\,]-1,0[\, \cup\,]0;+\infty[\\ f(-1) \;\; et \;\; f(0) = e \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,25 ن		1	أ	بين أن : $\forall\, x \in\,]-1,0[\, \cup\,]0,+\infty[\;;\; f(x) = e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}$
0,50 ن			ب	أدرس اتصال الدالة f في الصفر و على يمين العدد -1 .
0,50 ن		2	أ	أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
0,25 ن			ب	بين أن : $\forall\, x \in\,]-1,0[\, \cup\,]0,+\infty[\;;\; f(x) - x = x\left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1\right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$
0,50 ن			ج	استنتج الفرع اللنهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.
0,50 ن		3		بين أن : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right) = +\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .
0,50 ن		4	أ	بين أن : $\forall\, x \in \left[\frac{-1}{2},+\infty\right[\;;\; \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right) dt = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$
0,25 ن			ب	بين أن : $\forall\, t \in \left[\frac{-1}{2},+\infty\right[\;;\; \frac{t^2}{1+t} \leq 2t^2$
0,50 ن			ج	بين أن : $\forall\, x \in \left[\frac{-1}{2},+\infty\right[\;;\; \left\lvert \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right) dt \right\rvert \leq \frac{2}{3}\lvert x\rvert^3$
0,25 ن			د	استنتج أن : $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right) = \frac{-1}{2}$
0,50 ن			هـ	استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0) = \frac{e}{2}$
0,25 ن		5	أ	أدرس تغيرات الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = x - \ln(1+x)$. و استنتج أن : $(\forall\, x > -1)\;;\; g(x) \geq 0$.
0,50 ن			ب	بين أن : $\forall\, x \in\,]-1,0[\, \cup\,]0,+\infty[\;;\; f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{x^2}\, e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$
0,25 ن			ج	ضع جدول تغيرات الدالة f .
1,00 ن		6		أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$ | II

0,25 ن	1	أ	بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^+)\ ;\ f(x)\geq x$.
0,25 ن		ب	استنتج أن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ F(x)\geq \frac{x}{2}$
0,25 ن		ج	أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$
0,50 ن	2	أ	بين أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0,+\infty[\ ;\ F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$
0,25 ن		ب	بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. ثم بين أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0,+\infty[\ ;\ F'(x)=\frac{1}{x}(f(x)-F(x))$
0,50 ن		ج	بين أن : $\forall\ x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ e\leq F(x)\leq f(x)$
0,25 ن		د	استنتج أن الدالة F تزايدية على $\mathbb{R}_*^+$.

الجزء الثالث : نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $u_n=\int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right)dt$ | III

0,25 ن	1	أ	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تناقصية .
0,25 ن		ب	بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n\geq e$.
0,25 ن	2	أ	بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=n\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$
0,25 ن		ب	استنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n\leq f\left(\frac{1}{n}\right)$
0,25 ن		ج	أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

التمرين الأول : (2,0 ن)

1 أ 0,25 ن — تحقق أن : $\forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \;;\; \dfrac{t^3+t}{t+1} = t^2 - t + 2 - \dfrac{2}{t+1}$

ب 1,00 ن — أحسب التكامل التالي : $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}\right)$

2 0,75 ن — بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و احسب نهايتها .

التمرين الثاني : (2,75 ن)

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$. و نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين :

$$\begin{cases} (E) :\; y'' + 2y' + 2y = (x+1)^2 \ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2} \\ (F) :\; y'' + 2y' + 2y = 0 \end{cases}$$

1 0,75 ن — حل المعادلة التفاضلية (F) .

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f(x) = \displaystyle\int_1^x (t\ln t)\,dt$

2 أ 1,00 ن — بين أن الدالة f حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) .

ب 0,50 ن — لتكن y دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ، بين أن الدالة y تكون حلا للمعادلة التفاضلية (E) إذا و فقط إذا كانت الدالة $(y-f)$ حلا للمعادلة (F) .

ج 0,50 ن — استنتج صيغة الحل العام للمعادلة (E) .

التمرين الثالث : (5,5 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1,2]$ بما يلي : $f(x) = Arctan\left(\sqrt{x+2}\right)$

1 أ 0,50 ن — أحسب $f'(x)$ لكل x من $[1,2]$. ثم حدد منحى تغيرات الدالة f على $[1\,;2]$

ب 0,50 ن — تحقق أن : $\forall\, x \in [1;2] \;;\; |f'(x)| \le \frac{1}{6\sqrt{3}}$

ج 0,50 ن — بين أن : $\forall\, x \in [1;2] \;;\; Arctan(x) \le x$

د 1,00 ن — استنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \;;\; \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$

2 أ 0,50 ن — بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \;;\; u_n \in [\alpha, 2]$.

ب 0,50 ن — بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .

ج 1,00 ن — بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \;;\; |u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{6\sqrt{3}}|u_n - \alpha|$

د 1,00 ن — بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و احسب نهايتها .

التمرين الرابع : (5,0 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\, e^{-t^2}\right) dt \ ; \ \forall\, x > 0 \\ f(0) = \ln 2 \end{cases}$$

0,50 ن	**1** أ	بين أن : $(\forall\, x \in \mathbb{R}) \ ; \ x + 1 \leq e^x$
0,50 ن	ب	استنتج أن : $(\forall t > 0) \ ; \ \frac{1}{t} - t \leq \frac{1}{t}e^{-t^2} \leq \frac{1}{t}$
0,50 ن	ج	بين أن : $(\forall\, x > 0) \ ; \ \ln 2 - \frac{3}{2}x^2 \leq f(x) \leq \ln 2$
0,50 ن	د	أدرس اتصال و قابلية اشتقاق الدالة f على يمين الصفر . ثم حدد $f_d'(0)$.
1,00 ن	**2** أ	بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. ثم بين أن : $(\forall\, x > 0) \ ; \ f'(x) = \frac{e^{-4x^2}}{x}\left(1 - e^{3x^2}\right)$
0,50 ن	ب	ضع جدول تغيرات الدالة f . (نقبل أن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$)
0,50 ن	**3** أ	بين أن الدالة f تقابل من المجال $[0;+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده .
1,00 ن	ب	أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ المنحنيين الممثلين على التوالي للدالتين f و f^{-1} في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. حيث : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2\ cm$.

التمرين الخامس : (4,75 ن)

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية :

$$(E) \ : \ z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$$

0,50 ن	**1** أ	بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 .
1,00 ن	ب	حدد الحلين z_1 و z_2 الآخرين للمعادلة (E) بحيث $\mathfrak{Im}(z_1) > 0$.
0,75 ن	ج	حدد في المجموعة $\mathbb{N}$ الأعداد n التي من أجلها يكون العدد $(z_1 - z_0)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

في المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A(i)$ و $B(2+3i)$ و $C(2-3i)$. و ليكن r الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

0,50 ن	**2** أ	حدد لحق النقطة A' صورة A بالدوران r .
0,50 ن	ب	بين أن النقط A' و B و C مستقيمية .
0,75 ن	ج	حدد الصيغة العقدية للتحاكي h الذي مركزه B و يحول C إلى A' .
0,75 ن	د	تحقق أن : $(h^{-1} \circ r)(A) = C$ ثم حدد الصيغة العقدية للتطبيق $(h^{-1} \circ r)$.

التمرين الأول : (1,5 ن)

نعتبر المجموعة التالية : $M = \left\{ A_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \; ; \; n \in \mathbb{Z} \right\}$

0,25 ن — 1 — بين أن M مجموعة غير فارغة .

0,25 ن — 2 — بين أن M جزء مستقر في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

0,25 ن — 3 — حدد العنصر المحايد للضرب $\times$ في M .

0,25 ن — 4 — هل $\times$ تبادلي في M .

0,50 ن — 5 — أحسب $(A_m)^n$ لكل m و n من $\mathbb{N}$. و استنتج $(A_2)^3$.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$. نعتبر A و B ذواتا اللحقين a و 1 على التوالي حيث $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

لتكن f الدالة المعرفة على $(\mathcal{P})\backslash\{B\}$ و التي تربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث : $z' = \frac{z-a}{z-1}$

0,50 ن — 1 — بين أنه إذا كانت $M(z)$ صامدة بالتحويل f فإن z سوف يكون حلا للمعادلة (G) التالية :

$$(G) \; : \; z^2 - 2z + a = 0$$

نفترض أن $a = 1 + e^{i\theta}$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

1,50 ن — 2 — حدد على الشكل المثلثي حلي المعادلة (G) .

في هذا السؤال نفترض أن $a = -1$. و لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ حيث $z \neq 1$ و $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالتحويل f .

0,50 ن — 3 — أ — بين أن : $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM}\right) + \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM'}\right) \equiv 0 \; [2\pi]$.

0,50 ن — ب — بين التكافؤ التالي : $z' \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$

0,50 ن — ج — اقترح طريقة لإنشاء النقطة M' صورة M من الدائرة المثلثية المحرومة من النقطة B .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

الأسئلة 1) و 2) و 3) و 4) مستقلة فيما بينها .

0,25 ن — 1 — أ — بين أن لكل a من $\mathbb{Z}$ لدينا : $a^2 \equiv 1 \; [3]$ أو $a^2 \equiv 0 \; [3]$

0,25 ن — ب — استنتج أن : $a \equiv b \equiv 0 \; [3] \implies a^2 + b^2 \equiv 0 \; [3] \; ; \; \forall \, (a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية بحيث $x^2 + y^2 = 3z^2$

0,50 ن — 2 — أ — بين أن $x \equiv y \equiv 0 \; [3]$ و $3z^2 \equiv 0 \; [9]$.

0,25 ن — ب — استنتج أن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \; [3]$

لكل m من $\mathbb{N}^*$ نضع $a_m = m^2(m^2 - 1)$.

0,50 ن — 3 — أ — بين أن : $a_m \equiv 0 \; [3]$.

0,50 ن — ب — بين أن : $a_m \equiv 0 \; [4]$.

0,25 ن — ج — استنتج أن : $a_m \equiv 0 \; [12]$.

التمرين الرابع : (8,75 ن)

I **الجزء الأول** : لكل عدد حقيقي m نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_m(x) = 2m\,e^x - e^{2x} - 2m$$

و ليكن $(\mathcal{C}_m)$ المنحنى الممثل للدالة f_m في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\ cm$.

1 أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_m(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)$ — 0,75 ن

2 ليكن m و m' عددان حقيقان بحيث $m < m'$. أدرس الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C}_m)$ و $(\mathcal{C}_{m'})$ — 0,25 ن

3 بين أن جميع المنحنيات $\{(\mathcal{C}_m)\ ;\ m \in \mathbb{R}\}$ تمر من نقطة ثابتة A يتم تحديدها . — 0,50 ن

4 بين أنه إذا كان $m \leq 0$ فإن f_m تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$. — 0,50 ن

نفترض في هذا السؤال أن $m > 0$.

5 أ بين أن f_m تقبل مطرافا β_m عند النقطة α_m مع تحديد α_m و β_m . — 0,50 ن

لتكن (Γ) مجموعة النقط $I_m(\alpha_m, \beta_m)$ عندما يتغير m في $\mathbb{R}_*^+$.

ب بين أن (Γ) هو المنحنى الممثل للدالة g التالية : $g(x) = e^{2x} - 2e^x\ ;\ (\forall x \in \mathbb{R})$ — 0,50 ن

ج تحقق أن : $g(x) = -2 - f_1(x)\ ;\ (\forall x \in \mathbb{R})$. — 0,75 ن

و استنتج أن (Γ) و $(\mathcal{C}_1)$ متماثلان بالنسبة للمستقيم $(D) : y = -1$.

6 حدد تقاطع المنحنى $(\mathcal{C}_2)$ و المستقيم (D) . — 0,25 ن

7 أنشئ في نفس المعلم المنحنيات $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ و $(\mathcal{C}_{-1})$ و (Γ) . — 0,50 ن

8 أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور المحصور بين $(\mathcal{C}_2)$ و (D) — 0,50 ن

و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = 0$ و $x = \ln 3$.

II **الجزء الثاني** :

1 بين أن : $0 < \dfrac{g(x)+1}{x} < g'(x)\ ;\ (\forall\, x > 0)$ — 0,50 ن

2 استنتج أن : $x\,g'(x) - g(x) > 1\ ;\ (\forall\, x > 0)$ — 0,25 ن

3 استنتج أن الدالة $x \to \dfrac{g(x)}{x}$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$. — 0,25 ن

لتكن G الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :
$$\begin{cases} G(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt\ ;\ \forall\, x > 0 \\ G(0) = -\ln 2 \end{cases}$$

4 أ باستعمال السؤال 1) من الجزء الثاني، بين أن : — 0,50 ن

$$0 < G(x) + \ln 2 \leq g(2x) - g(x)\ ;\ (\forall\, x > 0)$$

ب استنتج أن G متصلة و قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . — 0,25 ن

5 بين أن : $G(x) \geq g(x) \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt\ ;\ (\forall\, x > 0)$ و استنتج أن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{G(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = +\infty \end{cases}$ — 0,50 ن

6 بين أن الدالة G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$. — 0,75 ن

و بين أن : $G'(x) = \dfrac{g(2x) - g(x)}{x}\ ;\ (\forall\, x > 0)$

7 إعط جدول تغيرات الدالة G . — 0,25 ن

الامتحـــــان الأبيض الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــــا
مدينة أكاديـــــر 2009

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

مــادة الريـــــاضيات
شعبة العـلوم الرياضية أ و ب
المعـــــامل : 9
مدة الانجاز : أربع ساعـــات

التمرين الأول : (3,0 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 ،

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

و صفرها $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. نعتبر المجموعة التالية :

$$E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\ ;\ a^2+b^2=1\ et\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

0,25 ن	1	أ	تحقق أن : $\forall\,(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ ;\ M(a,b)\times M(c,d)=M(ac-bd\,;ad+bc)$
0,50 ن		ب	بين أن E جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

لتكن U مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها 1 . و نذكر أن $(U,\times)$ زمرة تبادلية .

و ليكن f التطبيق المعرف من U نحو E بما يلي : $f(a+ib)=M(a,b)$

0,50 ن	2	أ	بين أن f تشاكل تقابلي من $(U,\times)$ نحو $(E,\times)$.
0,50 ن		ب	استنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .

نضع : $A=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2}&\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{-\sqrt3}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}$ و $A^1=A$ و نضع : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ A^{n+1}=A^n\times A$

0,50 ن	3		أكتب A^n بدلالة n .
0,75 ن	4		حل في المجموعة E المعادلة $X^4=A$.

التمرين الثاني : (4,0 ن)

ليكن $a\in\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$ و نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E):\ \ i\,z^2+(1-i)(1+ia)z+(a^2-1)=0$$

0,50 ن	1	أ	تحقق أن مميز المعدلة (E) هو $\Delta=-2i(a+i)^2$.
0,50 ن		ب	استنتج أن حلي المعادلة (E) هما u و v بحيث $u=i(1+a)$ و $v=1-a$

في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط $A(ia)$ و $B(u)$

و $C(v)$ و $D(v^2)$ و $E(\omega)$ حيث $\omega=\frac{u^2+a}{1-i}$

0,75 ن	2	أ	حدد مجموعة النقط $M(a)$ بحيث تكون O و B و C نقط مستقيمية .
0,50 ن		ب	بين أن C هي صورة A بدوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ و حدد مركزه .

فيما يلي نفترض أن $|a|=1$ و $a^2+(2+i)a+1\neq0$.

0,75 ن	3	أ	بين أن $A\neq D$ و $A\neq E$ و $D\neq E$.
0,50 ن		ب	بين أن ADE مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في النقطة E .
0,50 ن		ج	بين أن O و A و D و E نقط متداورة .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

نعتبر المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2 \ ; \ \forall\, n \geq 0 \\ a_0 = 17 \end{cases}$$

0,25 ن	1	بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ a_n \ \epsilon \ \mathbb{N}^*$
0,50 ن	2	بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ a_n \equiv 7 \ [10]$
0,50 ن	3 أ	بين أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$
0,25 ن	ب	استنتج أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ a_{n+4} = (a_n - 1)^{16} + 1$
0,50 ن	4 أ	بين أن : $36^{16} \equiv 36 \ [100]$
0,50 ن	ب	استنتج أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ a_{4n+2} \equiv 37 \ [100]$

التمرين الرابع : (9,5 ن)

I **الجزء الأول** : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x - x\ln x \quad ; \ \forall\, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

0,50 ن	1 أ	بين أن الدالة f متصلة على المجال $]0;+\infty[$ و متصلة على يمين الصفر . فيما يلي نقبل أن f متصلة على المجال $[0;+\infty[$.
0,50 ن	ب	إعط جدول إشارة $f(x)$ على $[0;+\infty[$.
0,25 ن	2 أ	أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر .
0,50 ن	ب	بين أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. ثم احسب $f'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.
0,50 ن	3	إعط جدول تغيرات الدالة f .
		نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ ; \ u_n = \frac{e^{n-1}}{n^n}$
0,25 ن	4 أ	تحقق أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ ; \ u_n = e^{(f(n)-1)}$.
0,75 ن	ب	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية قطعا و بين أن $\lim(u_n) = 0$
0,50 ن	5	ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. بين أن المعادلة $f(x) = u_n$ تقبل حلا وحيدا v_n في المجال $[1,e]$
0,75 ن	6	بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها .

II **الجزء الثاني** : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة F في م م م $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,50 ن	1	بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$. و احسب $F'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$.
0,75 ن	2 أ	بين أن : $\forall\, x \ \epsilon \ ]0;+\infty[\ ; \ F(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 1) - \left(\frac{x^2}{2}\right)\ln x$
0,50 ن	ب	استنتج أن : $F(0) = \frac{-3}{4}$
0,75 ن	3 أ	إعط جدول تغيرات الدالة F .
0,75 ن	ب	بين أن المعادلة $F(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$. و أن $4 < \alpha < 5$
0,50 ن	4 أ	أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.
0,50 ن	ب	أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{C})$ و حدد نقطة انعطافه .
0,75 ن	5	أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$ و المماس له عند نقطة الانعطاف .

مـــادة الريـــــــاضيات
شعبة العلـوم الرياضية أ و ب
المعـــــــامل : 9
مدة الانجـاز : أربع ســاعــات

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحـــــان الأبيض الموحد
لنيل شهادة البكالوريــــــا
مدينة فــــــاس 2010

التمرين الأول : (3,0 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية ، و نعتبر المجموعة G المعرفة بما يلي :

$$G=\left\{M_\theta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\ ;\ \theta\in\mathbb{R}\right\}$$

0,50 ن | 1 | بين أن G جزء مستقر بالنسبة لضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نعتبر المجموعة : $U=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|=1\}$

0,75 ن | 2 | بين أن $(U,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C}^*,\times)$.

نعتبر التطبيق φ المعرف من U نحو G بما يلي : $\varphi(e^{i\theta})=M_\theta$

0,75 ن | 3 | أ | بين أن φ تشاكل تقابلي من $(U,\times)$ نحو $(G,\times)$.

0,50 ن | ب | إستنتج أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية .

0,50 ن | 4 | أحسب $(M_\theta)^{-1}$ و $(M_\theta)^n$ مع $n\in\mathbb{N}^*$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

I | المستوى منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. و لكل z من $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ نضع $\varphi(z)=i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$

نعتبر النقطتين A و B ذواتا اللحقين $z_A=2i$ و $z_B=i$ على التوالي

و لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي .

0,25 ن | I | 1 | أ | بين أن : $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\ ;\ |\varphi(z)|=\frac{AM}{BM}$

0,25 ن | ب | بين أن : $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{i,2i\}\ ;\ \arg(\varphi(z))\equiv\left(\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi]$

0,50 ن | 2 | حدد طبيعة كل من المجموعتين E و F المعرفتين بما يلي :

$E=\{M(z)\ ;\ |\varphi(z)|=1\}$ و $F=\{M(z)\ ;\ \varphi(z)\in i\mathbb{R}\}$

0,50 ن | II | 1 | بين أن :
$$\begin{cases}\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\ ;\ \arg(\varphi(z)-i)\equiv-\arg(z-i)\ [2\pi]\\ \forall z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}\ ;\ |\varphi(z)-i|=\dfrac{1}{|z-i|}\end{cases}$$

0,25 ن | 2 | بين أنه إذا كانت النقطة $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{2}$

فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى دائرة يتم تحديدها .

0,25 ن | 3 | أنشئ النقطة M' انطلاقا من النقطة M .

0,50 ن | III | 1 | حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\varphi(z)=z$. ليكن u و v الحلين حيث $\mathcal{R}e(u)=1$.

ليكن $z\in\mathbb{C}\backslash\{i,u,v\}$ و نعتبر النقط $M(z)$ و $M'(\varphi(z))$ و $C(u)$ و $D(v)$.

0,25 ن | 2 | أ | بين أن : $\left(\frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v}\right)=-\left(\frac{z-u}{z-v}\right)$

0,25 ن | ب | استنتج أن : $\left(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC}\right)\ [2\pi]$

0,50 ن | ج | بين أنه إذا كانت النقط M و C و D مستقيمية فإن النقط M' و M و C و D مستقيمية كذلك .

و إذا كانت النقط M و C و D غير مستقيمية فإن النقط M' و M و C و D متداورة .

نضع $z = i + e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

0,50 ن | 3 | حدد معيار و عمدة العدد العقدي $\varphi(z)$ بدلالة θ .

التمرين الثالث : (2,0 ن)

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية : $(E) \;:\; 3x - 5y = 13$

0,50 ن | 1 | حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة E .

0,50 ن | 2 | حدد الحلول (x,y) للمعادلة (E) التي تحقق $\frac{x}{y} \in E$.

0,50 ن | 3 | بين أن لكل k من $\mathbb{Z}$ لدينا : $(5k+1) \wedge (3k-2) = (k-5) \wedge 13$

0,50 ن | 4 | حل في $\mathbb{Z}^2$ النظمة التالية : $\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ x \wedge y = 13 \end{cases}$

التمرين الرابع : (4,0 ن)

لتكن φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\varphi(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$

0,50 ن | 1 | أدرس قابلية اشتقاق الدالة φ على يمين الصفر . ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

0,50 ن | 2 | أحسب النهاية $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$ و ادرس تغيرات الدالة φ .

لنحل في $\mathbb{R}^+$ المعادلة $(E) \;:\; \varphi(x) = x$.

من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $\psi(x) = \ln x + 2x$

0,50 ن | 3 | أ | بين التكافؤ التالي : $(\forall\, x > 0) \;;\; \varphi(x) = x \iff \psi(x) = 0$

0,75 ن | ب | بين أن المعادلة $\psi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+^*$. و أن α ينتمي إلى $I = \left]\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right[$

0,50 ن | ج | بين أن $\varphi(I) \subset I$ ثم بين أن : $(\forall x \in I) \;;\; |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{8}$.

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = \varphi(u_n) \;;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in I \end{cases}$

0,50 ن | 4 | أ | بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; u_n \in I$.

ثم بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8}|u_n - \alpha|$.

0,50 ن | ب | استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

ثم احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

0,25 ن | ج | حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n بحيث يكون لدينا $|u_n - \alpha| < 10^{-4}$.

التمرين الخامس : (7,0 ن)

I | **الجزء الأول** : نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x - \ln x} \;;\; \forall\, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

0,25 ن | 1 | بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) \;;\; \ln t \leq t - 1$.

0,25 ن | 2 | أ | بين أن f متصلة على يمين الصفر .

0,50 ن | ب | أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين الصفر ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

0,25 ن | ج | أحسب النهاية التالية : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

0,25 ن | 3 | أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$.

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$.

0,25 ن | 4 | أ | أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الأفصول 1 .

0,50 ن | ب | أرسم في نفس المعلم المستقيم (T) و المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

ليكن x عددا حقيقيا حيث $x \geq 1$. و نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$(\forall\, n \geq 1)\ ;\ v_n = 1 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^1 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$$

| 0,50 ن | 5 | بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة و حدد نهايتها .

II **الجزء الثاني** : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $F(x) = \int_1^x \left(\frac{t}{t-\ln t}\right) dt$

0,50 ن | 1 | أدرس منحى تغيرات الدالة F .

0,50 ن | 2 | حدد إشارة $F(x)$ تبعا لقيم المتغير الحقيقي x .

0,50 ن | 3 | أ | بين أن : $\forall\, x \in]0,1]\ ;\ 0 \leq \frac{x}{x-\ln x} \leq x$

0,25 ن | ب | استنتج أن : $\forall\, x \in]0,1]\ ;\ \frac{x^2-1}{2} \leq F(x) \leq 0$

ثم استنتج أن : $\frac{-1}{2} \leq \lim_{x\to 0^+} F(x) \leq 0$

0,50 ن | 4 | بين أن : $\forall\, x \in [1,+\infty[\ ;\ f(x) \geq 1$ ثم استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

0,50 ن | 5 | أ | ليكن $x > 0$ أحسب التكاملين : $\int_1^x (1+\ln t)\, dt$ و $\int_1^x \left(1+\frac{\ln t}{t}\right) dt$

0,25 ن | ب | بين أن : $\frac{t}{t-\ln t} \leq 1 + \ln t \quad (\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ t \geq 1 \Rightarrow$

0,25 ن | ج | استنتج أن : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ F(x) \leq x\ln x$.

0,50 ن | د | بين أن : $x + \frac{(\ln x)^2}{2} - 1 \leq F(x) \quad (\forall\, x \in [1;+\infty[)$

0,25 ن | و | اعط تأويلا هندسيا للتكامل $\int_1^e \left(\frac{t}{t-\ln t}\right) dt$

التمرين الأول : (3,5 ن)

I المستوى منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. ليكن a عددا عقديا و نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(E)\ :\ z^2 - a\,z + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) . و نعتبر النقط التالية : $A(a)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

I (0,75 ن) بين أن : $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. و أن : $|z_1| \cdot |z_2| = 1$.

نضع $z_1 = e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي .

II 1 أ (0,75 ن) استنتج بدلالة θ الشكل المثلثي للعدد العقدي z_2 .

ب (0,50 ن) بين أن : $a = 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)e^{\frac{i\pi}{6}}$

نفترض في هذا السؤال أن : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. و نعتبر في المستوى التحويل F المرتبط بالتطبيق f المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي : $f(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$

2 أ (0,50 ن) حدد طبيعة و عناصر التحويل F .

ب (0,50 ن) بين أن : $F(M_1) = M_2$.

ج (0,50 ن) استنتج طبيعة الرباعي OM_1AM_2 .

التمرين الثاني : (3,0 ن)

1 (0,25 ن) بين أن العدد 251 قاسم أولي للعدد 2008 .

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية : $(E)\ :\ 2008\,x + 120y = 8$.

2 أ (0,25 ن) بين أن المعادلة (E) قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$.

ب (0,75 ن) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

نضع : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \underbrace{888\cdots88}_{n\ fois}$

3 أ (0,50 ن) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \frac{8}{9}(10^n - 1)$

ب (0,50 ن) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n \equiv 0\ [2008] \iff 10^n \equiv 1\ [251]$

ج (0,50 ن) بين أن : $(\forall k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 10^k \equiv 1\ [251]$

د (0,25 ن) استنتج أن العدد 2008 يقبل مضاعفا يكتب في نطمة العد العشري بالرقم 8 فقط .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

لتكن $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 .

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ونعتبر المجموعة E المعرفة بـ : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix}\ ;\ (a,b)\,\epsilon\,\mathbb{R}^2 \right\}$

1 (0,50 ن) بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية .

2 (0,50 ن) بين أن $(E,\times)$ جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

3 (0,50 ن) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية .

نعتبر التطبيق f المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ بما يلي : $f\big(M(a,b)\big) = a + b + ib$

4 أ (0,50 ن) بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$.

0,50 ن | ب | بين أن كل مصفوفة $M(a,b)$ من $E^* = E - \{0\}$ تقبل مقلوبا في E^* و حدده .

0,50 ن | ج | استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(E,+,\times)$.

0,50 ن | د | بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \left(M(0,1)\right)^n = M\left(-2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right)\ ;\ 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$

التمرين الرابع : (10 ن)

I | نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x) = (2-x)e^x - 2$

0,50 ن | I | 1 | أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

0,50 ن | 2 | أدرس تغيرات الدالة φ ثم ضع جدول تغيراتها .

0,50 ن | 3 | بين أن $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى $[1;+\infty[$ و أن $1{,}59 < \alpha < 1{,}60$.

II | نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}\ ;\ \forall\, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$. حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\ cm$.

0,25 ن | II | 1 | أدرس اتصال الدالة f في الصفر .

0,50 ن | 2 | بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ثم احسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,25 ن | 3 | أ | أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر .

0,75 ن | ب | بين أن الدالة f قابلة الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$. و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) = \frac{x\,\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$

0,50 ن | ج | بين أن : $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,25 ن | 4 | أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

0,50 ن | 5 | أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

III | لكل x من $\mathbb{R}^+$ نضع : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ و $G(x) = \displaystyle\int_0^x (t^2\,e^{-t})\,dt$

0,50 ن | III | 1 | أحسب $G(x)$ ثم احسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$

0,25 ن | 2 | بين أن الدالة F تزايدية على $\mathbb{R}^+$.

0,25 ن | 3 | أ | بين أن : $\forall\, t \in [\ln 2\ ;\ +\infty[\ ;\ f(t) \leq 2\,t^2\,e^{-t}$

0,50 ن | ب | استنتج أن الدالة F مكبورة على $\mathbb{R}^+$.

نقبل أن الدالة F تقبل نهاية عند $+\infty$ و نضع : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L \in \mathbb{R}$

0,75 ن | IV | 1 | أ | بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{e^{-nx}}{e^x - 1} + \displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} e^{-px}$

0,50 ن | ب | بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ 0 \leq \displaystyle\int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt \leq \dfrac{\alpha(2-\alpha)}{n}$

0,50 ن | ج | أحسب التكامل التالي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\,e^{-nt}\,dt$

0,25 ن | د | حدد النهاية التالية : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x)$

0,75 ن | 2 | أ | بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ ;\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt = F(x) - \sum_{p=1}^{p=n} I_p(x)$

0,50 ن | ب | استنتج أن الدالة : $x \to \displaystyle\int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt$ تقبل نهاية عند $+\infty$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

نضع : $L_n = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, e^{-nt}\, dt \quad ; \quad (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

0,25 ن | ج | بين أن : $L - L_n = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right) \quad ; \quad (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

0,25 ن | د | بين أن المتتالية $(L_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ متقاربة .

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$

0,25 ن | هـ | بين أن المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ متقاربة و أن نهايتها هي $L' = \frac{L}{2}$.

الامتحـــان الأبيض الموحد
لنيل شهادة البكالوريـــا
مدينة الربـــاط 2009

مـادة الرياضيات
شعبة العلوم الرياضية أ و ب
المعامل : 9
مدة الانجاز : أربع ساعات

التمرين الأول : (3,5 ن)

في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ التي وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

و صفرها $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ ، نعتبر المجموعة المعرفة بما يلي :

$$E=\left\{M(a)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+\frac{1}{a}&a-\frac{1}{a}\\a-\frac{1}{a}&a+\frac{1}{a}\end{pmatrix}\ ;\ a\in\mathbb{R}^*\right\}$$

نضع : $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ و $k=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

0,75 ن — 1 — أحسب $A^2-3A+2I$ ثم استنتج أن A تقبل مقلوبا في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ وجب تحديده .

0,75 ن — 2 أ — أحسب J^2 و k^2 و $J\times k$ و $k\times J$.

0,25 ن — ب — أحسب $M(a)$ بدلالة المصفوفتين J و k .

0,50 ن — ج — بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

نعتبر التطبيق f من $\mathbb{R}^*$ نحو E المعرف بما يلي : $f(a)=M(a)$.

0,75 ن — 3 أ — بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

0,50 ن — ب — استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(E,\times)$ ثم حدد مقلوب المصفوفة $M(a)$ في $(E,\times)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

ليكن a و b عددين نسبيين و غير منعدمين

0,50 ن — 1 — بين الاستلزام التالي : $a\wedge b=1\ \Rightarrow\ a\wedge\big(b(a+b)\big)=1$

نعتبر في $(\mathbb{Z}_*)^2$ المعادلة التالية : $(E):\ x^2+y^2+xy-31x=0$.

و ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) نضع $d=x\wedge y$.

0,50 ن — 2 أ — بين أنه يوجد (a,b) من $(\mathbb{Z}_*)^2$ بحيث $a\wedge b=1$ و $a(31-da)=bd(a+b)$.

0,50 ن — ب — استنتج أن العدد a يقسم العدد d .

0,50 ن — 3 أ — بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي c غير منعدم بحيث $c(a^2+b^2+ab)=31$

1,00 ن — ب — حل في $(\mathbb{Z}_*)^2$ المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

نعتبر في مجموعة الاعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات الجهول z التالية :

$$(E):\ z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8=0$$

0,25 ن — 1 أ — بين أن (E) تقبل حلا حقيقيا وجب تحديده .

0,25 ن — ب — حل في $(\mathbb{C})$ المعادلة (E) .

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. و ليكن r التطبيق الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ بحيث $z_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$. و التطبيق h الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ بحيث $z_2=\sqrt{2}\,z$.

0,50 ن	2 أ	حدد طبيعة كل من التطبيقين r و h و اعط عناصرهما المميزة .
		نضع $F = h \circ r$.
0,50 ن	ب	بين أنه إذا كانت $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ بالتطبيق F فإن $z' = (1+i)z$.
0,50 ن	3 أ	بين أنه إذا كانت $F(M) = M'$ فإن المثلث OMM' قائم الزاوية و متساوي الساقين .
0,50 ن	ب	اقترح طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M .
		ليكن n عددا صحيحا طبيعيا ، و نعرف النقط $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بما يلي : $\begin{cases} A_{n+1} = F(A_n) \\ aff(A_0) = -1+i \end{cases}$
0,25 ن	4 أ	ضع في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 .
0,75 ن	ب	ما هي قيم العدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها تكون النقط O و A_0 و A_n مستقيمية .

التمرين الرابع : (3,0 ن)

		لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نعتبر التكامل التالي : $I_n = \int_0^1 (1-x)^n\, e^{2x}\, dx$
0,25 ن	1 أ	بين أن : $2\, I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.
0,50 ن	ب	بين أن : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$.
0,25 ن	2	استنتج النهايتين التاليتين : $\lim_{n\infty}(nI_n)$ et $\lim_{n\infty}(I_n)$
		لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $U_n = \left(\frac{2^n}{n!}\right) I_n$
0,25 ن	3 أ	بين أن : $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$
0,25 ن	ب	استنتج أن : $U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$
0,25 ن	ج	استنتج النهاية التالية : $\lim_{n\infty}(U_n)$
0,50 ن	4 أ	بين أن : $U_{n+1} = U_n - \frac{2^n}{(n+1)!}$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$
0,50 ن	ب	بين أن : $U_n = \frac{1}{2}\left[e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}\right]$; $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$
		و استنتج قيمة النهاية : $\lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}\right)$

التمرين الخامس : (7,0 ن)

	I	لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{1}{x^2} + 1 - 4\ln x$
0,50 ن	I 1 أ	أدرس تغيرات الدالة g .
0,75 ن	ب	بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$. و بين أن : $1 < \alpha < 2$
0,25 ن	ج	استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$.
		نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}$
		و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,50 ن	2 أ	بين أن الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$.
0,75 ن	ب	أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ و بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{4\alpha^2(1+\alpha^2)}$.
0,25 ن	3 أ	اعط معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي أفصولها 1 .
0,25 ن	ب	بين أن : $\ln x \leq x - 1$; $(\forall\, x > 0)$.

$(\forall\, x > 0)\ ;\ f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1)\left(\frac{4-(1+x^2)^2}{4(1+x^2)^2}\right)$: استنتج أن	ج			0,50 ن
أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ و المماس (T) .	د			0,50 ن
أرسم $(\mathcal{C})$ و (T) في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ حيث $f(\alpha) \approx 0{,}04$ و $\alpha \approx 1{,}45$ و $\|\vec{\jmath}\| = 10$ و $\|\vec{\imath}\| = 1$.		4		0,50 ن
نعرف الدالة العددية F المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,dt$				
بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. و أن : $F'(x) = \frac{(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2}$		1	II	0,75 ن
بين أن : $(\forall\, x > 0)\ ;\ F(x) = \frac{1}{2}\left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - Arctan(x)\right) + \left(\frac{x\ln x}{1+x^2}\right)$		2		0,50 ن
استنتج النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$	أ	3		0,50 ن
ضع جدول تغيرات الدالة F .	ب			0,50 ن

التمرين الأول : (3,5 ن)

0,25 ن | 1 | بين العدد 2003 أولي .

0,75 ن | 2 | أ | حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية : $(E)\ :\ 123x + 2003y = 1$

0,25 ن | ب | استنتج عددا صحيحا معلوما k_0 بحيث : $123\ k_0\ \equiv 1\ [2003]$.

0,50 ن | ج | بين التكافؤ التالي حيث k عدد نسبي : $123x \equiv 456[2003] \iff x \equiv 456k_0[2003]$

0,25 ن | د | حدد في $\mathbb{Z}$ مجموعة حلول المعادلة التالية : $123x \equiv 456[2003]$

0,25 ن | هـ | بين أنه يوجد عدد طبيعي وحيد n يحقق : $1 \leq n < 2003$ و $123n \equiv 456[2003]$.

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا بحيث $1 \leq a < 2003$.

0,50 ن | 3 | أ | بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي m بحيث : $am \equiv 1\ [2003]$.

0,50 ن | ب | ليكن $b \in \mathbb{Z}$. حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $ax \equiv b\ [2003]$

0,25 ن | ج | استنتج أن : $(2002!)^2 \equiv 1\ [2003]$

التمرين الثاني : (2,75 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O, \vec{u}, \vec{v})$. لتكن M و N و P ثلاث نقط مختلفة ألحاقها على التوالي m و n و p .

0,50 ن | 1 | بين أن المثلث MNP قائم الزاوية في N إذا وفقط إذا كان : $i\left(\frac{p-n}{m-n}\right) \in \mathbb{R}^*$

ليكن $z \in \mathbb{C}^*\backslash\{-1;1\}$ و نعتبر فيما يلي z و z^2 و z^4 ألحاق M و N و P على التوالي .

0,25 ن | 2 | أ | تحقق من أن النقط M و N و P مختلفة مثنى مثنى .

0,75 ن | ب | بين أن المثلث MNP قائم الزاوية في N إذا وفقط إذا كانت النقطة M تنتمي إلى المنحنى (Γ) الذي معادلته : $(\Gamma):\ x^2 - y^2 + x = 0$ محروما من نقطتين وجب تحديدهما .

0,75 ن | ج | حدد طبيعة المنحنى (Γ) و عناصره المميزة .

0,50 ن | د | أنشئ المنحنى (Γ)

التمرين الثالث : (4,0 ن)

نعتبر المجموعة التالية : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0,50 ن | 1 | بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية .

0,75 ن | 2 | أ | بين أن : $\forall\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ ;\ M(a,b) \times M(c,d) = M(ac-3bd\,;ad+bc-2bd)$

0,75 ن | ب | استنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة .

نضع $E^* = E\backslash\{M(0,0)\}$ و نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : $\varphi\ :\ E^* \to \mathbb{C}^*$

$$M(a,b) \ \to\ (a-b) + i\,b\sqrt{2}$$

0,50 ن | 3 | أ | بين أن E^* جزء مستقر في $(E,\times)$.

0,75 ن | ب | بين أن φ تشاكل تقابلي من $(E^*,\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$.

0,75 ن | 4 | بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

التمرين الرابع : (9,75 ن)

I **الجزء الأول** : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

0,75 ن — **1** أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن — **2** استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

II **الجزء الثاني** : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \;;\; \forall\, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

و ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,50 ن — **1** أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

0,25 ن — **2** بين أن الدالة f متصلة في الصفر .

0,75 ن — **3** أدرس اشتقاق الدالة f في الصفر ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

0,75 ن — **4** بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)$

0,25 ن — **5** اعط جدول تغيرات الدالة f .

0,75 ن — **6** بين أن المستقيم $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$.

0,50 ن — **7** أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ في م م م $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

0,25 ن — **8** أ ليكن $n \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$.

0,75 ن — ب بين أن : $\alpha_n > n$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$. و استنتج النهاية $\lim_{n\infty}(\alpha_n)$

III **الجزء الثالث** : نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_1^{x^2} f(t)\, dt$

0,50 ن — **1** أ باستعمال مبرهنة المتوسط بين أن : $(\forall x \geq 1)\ (\exists c \epsilon [1, x^2]) : F(x) = (x^2 - 1) f(c)$

0,50 ن — ب بين أن : $(x^2 - 1) f(1) \leq F(x) \leq (x^2 - 1) f(x^2)$; $(\forall x \geq 1)$

و استنتج النهاية التالية : $\lim F(x)$

0,50 ن — ج حدد النهاية $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{F(x)}{x}\right)$ و استنتج الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_F)$ بجوار $+\infty$

0,50 ن — **2** حدد الدالة المشتقة للدالة F و اعط جدول تغيراتها .

0,25 ن — **3** اعط معادلة نصف المماس للمنحنى $(\mathcal{C}_F)$ عند النقطة التي أفصولها 1 .

0,50 ن — **4** أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_F)$.

IV **الجزء الرابع** : نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{f(t)}{t^3}\right) dt$

0,25 ن — **1** بين أن المتتالية $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا .

0,50 ن — **2** أ بين أن : $u_n = \int_1^n \left(1 - \frac{e^t}{1 + e^t}\right) dt$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

0,50 ن — ب استنتج u_n بدلالة n ثم حدد النهاية $\lim_{n\infty}(u_n)$.

التمرين الأول : (3,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 ، نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعتين التاليتين :

$$A=\left\{M_a=\begin{pmatrix}e^a&ae^a\\0&e^a\end{pmatrix}\ ;\ a\in\mathbb{R}\right\}$$

$$B=\left\{N_b=\begin{pmatrix}1&\ln b\\0&1\end{pmatrix}\ ;\ b\in\mathbb{R}_+^*\right\}$$

1 — 0,25 ن — تحقق أن : $I\in A$ و $I\in B$.

2 أ — 0,25 ن — بين أن : $M_a\times M_b=M_{a+b}$; $\forall(M_a,M_b)\in A^2$.

ب — 0,50 ن — بين أن $(A,\times)$ زمرة تبادلية .

نعتبر المجموعة التالية : $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix}e^a&ae^a\\0&e^a\end{pmatrix}\ ;\ a\in\mathbb{Z}\right\}$.

ج — 0,50 ن — بين أن $(E,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(A,\times)$.

لكل $M_a\in A$ نضع $(M_a)^0=I$ و $(M_a)^{-n}=((M_a)^{-1})^n$

و $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ (M_a)^{n+1}=(M_a)^n\times M_a$.

د — 0,50 ن — حدد بدلالة a و k صيغة $(M_a)^k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

3 أ — 0,25 ن — بين أن B جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

ب — 1,00 ن — بين أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ و $(B,\times)$ متشاكلتان تقابليا . ثم استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(B,\times)$.

4 — 0,25 ن — هل المجموعة $A\cup B$ مستقرة بالنسبة للضرب $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ؟ و علل الجواب .

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن p عددا أوليا بحيث $p\geq 5$ و $p\neq 2011$.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ px+y^{p-1}=2011$.

1 — 0,25 ن — تحقق أن العدد 2011 عدد أولي .

نفترض أن (x,y) حل للمعادلة (E) .

2 أ — 0,50 ن — بين أن العدد p لا يقسم العدد y .

ب — 0,50 ن — استنتج أن p يقسم العدد 2010 ثم حدد قيم العدد p .

ج — 0,75 ن — حدد الزوج (x,y) في حالة $p=67$.

3 — 0,50 ن — حل في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة (E) في الحالة $p=5$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم ، و نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E)\ :\ z^2-(3m-2i)z+2m^2-4mi=0$$

1 — 0,50 ن — حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

نأخذ في هذا السؤال $m=(1+i)$ و ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث $|z_1|<|z_2|$

2 أ — 0,50 ن — أكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ب — 0,50 ن — تحقق من أن $(-z_1)$ هو جذر مكعب للعدد z_2 ، ثم استنتج على الشكل الجبري الجذرين المكعبين الآخرين للعدد z_2 .

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. لتكن A و B و C النقط التي ألحاقها على التوالي : i و $2m$ و $m-2i$. و نفترض أن العدد m ليس تخيليا صرفا .

3 أ — 0,50 ن — بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

خارج المثلث ABC ، ننشئ النقطة D بحيث يكون المثلث BCD متساوي الساقين و قائم الزاوية في D . و ليكن d لحق النقطة D .

ب — 0,50 ن — بين أن : $d=\dfrac{3m-im+2-2i}{2}$ أو $d=\dfrac{3m+im-2-2i}{2}$

ج — 0,50 ن — حدد m لكي يكون الرباعي $ABDC$ مربعا .

التمرين الرابع : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحناها في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I الجزء الأول :

1 أ — 0,50 ن — أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)$ و استنتج الفروع اللانهائية .

ب — 0,50 ن — أدرس تغيرات الدالة f و ضع جدول تغيراتها .

ج — 0,50 ن — بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين 0 و α بحيث $\alpha>1$. و استنتج إشارة $f(x)$ على $]-1,+\infty[$

د — 0,25 ن — أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4 .

2 أ — 0,50 ن — بين أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,1[$.

ب — 0,50 ن — بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq4}$ تناقصية قطعا . و استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

II الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(t)=\dfrac{\ln(1+t^2)}{t} & ;\ \forall\, t\neq0\\ \varphi(0)=0\end{cases}$$

1 أ — 0,25 ن — تحقق أن الدالة φ فردية .

ب — 0,50 ن — أدرس اتصال الدالة φ و قابلية اشتقاقها في الصفر .

ج — 0,25 ن — بين أن : $\varphi'(t)=\frac{1}{t^2}\,f(t^2)$; $(\forall t\epsilon\mathbb{R}^*)$

د — 0,50 ن — استنتج جدول تغيرات الدالة φ و بين أن : $\varphi(\sqrt{\alpha})=\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt$

2 أ — 0,25 ن — بين أن g دالة زوجية .

ب — 0,50 ن — بين أن g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و احسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ج — 0,25 ن — ضع جدول تغيرات الدالة g .

3 أ — 0,50 ن — احسب التكامل التالي : $I=\displaystyle\int_1^x\left(\frac{2\ln t}{t}\right)dt$

ب — 0,50 ن — استنتج أن : $(\forall x\geq1)\ ;\ g(x)-g(1)=(\ln x)^2+\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

ج — 0,50 ن — بين أن : $(\forall x\geq0)\ ;\ \ln(1+x)\leq x$

د — 0,25 ن — استنتج أن : $(\forall x\geq1)\ ;\ 0\leq\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt\leq\frac{1}{2}$

هـ — 0,50 ن — أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ استنتج طبيعة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$.

III **الجزء الثالث** : نعتبر المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)$

0,50 ن **1** بين أن : $(\forall k\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln(1+k)-\ln k<\frac{1}{k}$

0,50 ن **2** استنتج أن : $(\forall k\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 2\ln(k+2)-3\ln(1+k)+\ln k<f\left(\frac{1}{k}\right)$

و أن : $(\forall k\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 2\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)-\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)<f\left(\frac{1}{k}\right)$

0,50 ن **3** استنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln\left(\frac{(n+2)^2}{4(n+1)}\right)<S_n$ ثم احسب النهاية $\lim\limits_{n\infty}(S_n)$

IV **الجزء الرابع** : ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$.

0,25 ن **1** بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,x^k+\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{1+x}$

0,25 ن **2** بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}\,x^k}{k}+(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$

0,25 ن **3** استنتج أن : $f(x)=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\left(\frac{2k-1}{k}\right)x^k+\frac{2(-1)^{n+1}x^{n+2}}{1+x}+(-1)^{n+2}\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt$

0,50 ن **4** أ بين أن : $0\leq\int_0^x\frac{t^{n+1}}{1+t}dt\leq x^{n+2}$

0,25 ن ب استنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}\int_0^x\left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right)dt=0$

0,50 ن ج بين أن : $\forall\ x\ \epsilon\ ]0,1[\ \ ;\ \ f(x)=\lim\limits_{n\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{2k-1}{k}\right)x^k\right)$

التمرين الأول : (3,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 ، نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة E التالية : $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-y\\y&x+y\end{pmatrix}\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,25 ن — 1 أ — نضع $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$. تحقق أن $J\in E$ و أن $I\in E$.

0,25 ن — ب — بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$

0,25 ن — 2 أ — تحقق أن : $J^2=J-I$.

0,25 ن — ب — استنتج أن E جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

0,50 ن — 3 — بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية .

0,25 ن — 4 أ — لكل عددين حقيقيين x و y ، بين التكافؤ التالي : $x=y=0 \Leftrightarrow x^2+xy+y^2$

ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^{2*}$ و نضع $\Delta=x^2+yx+y^2$.

0,50 ن — ب — أحسب الجداء التالي : $M(x,y)\times M\left(\frac{x+y}{\Delta};\frac{-y}{\Delta}\right)$

0,50 ن — ج — استنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

نضع $F=(\mathbb{R}_*)^2$ و نزود F بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي :

$$\forall\,(x,y)\in F\ ;\ \forall\,(a,b)\in F\ ;\ (x,y)\top(a,b)=(ax-by\,;ay+bx+by)$$

و نعتبر التطبيق φ المعرف من F نحو E بما يلي : $\varphi(x,y)=M(x,y)$

0,50 ن — 5 أ — بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(F,\top)$ نحو $(E,\times)$.

0,25 ن — ب — استنتج البنية الجبرية للمجموعة $(F,\top)$.

التمرين الثاني : (6,5 ن)

المستوى منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. ليكن m عنصرا من $\mathbb{C}^*$ و نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z التالية :

$$(E)\ :\ z^2-(2-\sqrt{3}+i)mz+2(i-\sqrt{3})m^2=0$$

0,50 ن — 1 أ — بين أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta=\left(2+\sqrt{3}-i\right)^2m^2$.

0,50 ن — ب — حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

0,50 ن — ج — ليكن z_1 و z_2 حلي (E) حيث $\arg(z_1)\equiv\arg(m)\ [2\pi]$. أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على شكله الأسي

نعتبر التطبيق F الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $z'=e^{\left(\frac{5i\pi}{6}\right)}z$.

0,75 ن — 2 أ — حدد طبيعة التطبيق F و عناصره المميزة .

0,50 ن — ب — حدد صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها $\Omega(1+i)$ و شعاعها 2 بالتطبيق F .

لكل عدد صحيح طبيعي n نربط النقطة $M_n(z_n)$ بحيث $\begin{cases}M_{n+1}=F(M_n)\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\\ aff(M_0)=i=z_0\end{cases}$

0,50 ن — 3 أ — بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ z_n=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right)}$

0,75 ن — ب — بين أن : $\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2\ ;\ M_n=M_p \Leftrightarrow n\equiv p\ [12]$

0,50 ن		ج		حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) التالية : $(E)\ :\ 12x-5y=3$
0,25 ن		د		استنتج مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط M_n منتمية إلى نصف المحور الحقيقي الموجب .
				نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) التالية : $(S)\ :\ \begin{cases} x\equiv 0\ [12] \\ x\equiv 3\ [5] \end{cases}$
				ليكن (k_0,l_0) حلا خاصا للمعادلة (E) .
0,50 ن		4	أ	بين أن العدد $x_0=12k_0=5l_0+3$ حل خاص للنظمة (S) .
0,25 ن			ب	بين أن x حل للنظمة (S) إذا و فقط إذا كان $x=x_0\ [60]$.
0,50 ن			ج	حل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) .
0,50 ن		5		حدد المجموعة التالية : $R_n=\{\,n\in\mathbb{N}\ ;\ M_n=M_0\ \ et\ \ n\equiv 3\ [5]\,\}$

التمرين الثالث : (10 ن)

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=(x-1)^n\ln x\ \ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)$

و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل لكل دالة f_n في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

	I			**الجزء الأول** : نضع : $g_n(x)=n\ln x+1-\frac{1}{x}\ \ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*),(\forall\, x>0)$
0,25 ن		1	أ	أدرس تغيرات الدالة g_n على المجال $]0,+\infty[$.
0,25 ن			ب	أحسب $g_n(1)$ و استنتج إشارة الكمية $(x-1)g_n(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.
0,25 ن		2	أ	بين أن : $f_n'(x)=(x-1)^{n-1}\,g_n(x)\ \ ;\ (\forall\, x>0)$
0,25 ن			ب	أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $]0,+\infty[$
0,25 ن			ج	أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$.
0,50 ن			د	أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$.
0,50 ن		3		أنشئ $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ في نفس المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
0,75 ن		4		أحسب مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ و المستقيمين ذوا المعادلتين $x=1$ و $x=e$.
	II			**الجزء الثاني** : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,1[\,\cup\,]1;+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\left(\frac{f_1(t)}{(t-1)^4}\right)dt\ \ ;\ \ \left|\begin{array}{l} x>0 \\ x\neq 1\end{array}\right. \\ F(0)=0 \end{cases}$$

0,50 ن		1		بين أن : $\forall\, x\in\,]0,1[\ ;\ 2\ln x\displaystyle\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{(t-1)^3}\right)dt\le F(x)\le \ln x\int_x^{x^2}\frac{1}{(t-1)^3}dt$
0,25 ن		2	أ	احسب التكامل التالي : $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{(t-1)^3}dt$
0,75 ن			ب	استنتج أن : $\forall\, x\in\,]0,1[\ ;\ \dfrac{(x^2+2x)\ln x}{(x^2-1)^2}\le F(x)\le\dfrac{(x^2+2x)\ln x}{2(x^2-1)^2}$
0,50 ن			ج	أدرس اتصال الدالة F على يمين الصفر .
0,50 ن			د	أحسب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)$ و اعط تأويلا هندسيا لها .
0,50 ن			هـ	أدرس اشتقاق الدالة F على يمين الصفر . ثم أوِّل النتيجة هندسيا .
0,75 ن		3	أ	بين أن : $(\forall\, x>1)\ ;\ \dfrac{(x^2+2x)\ln x}{2(x^2-1)^2}\le F(x)\le\dfrac{(x^2+2x)\ln x}{(x^2-1)^2}$
0,50 ن			ب	استنتج النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$
0,50 ن		4	أ	أدرس اشتقاق الدالة F على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$.
0,25 ن			ب	إعط جدول تغيرات الدالة F . (لاحظ أن : $x^3+3x^2-x+1\ge 0\ \ ;\ (\forall\, x>0)$)
0,50 ن		5		أرسم منحنى الدالة F في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

الجزء الثالث : لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $J_n = \int_1^2 \frac{(t-1)^n}{t} dt \quad I_n = \int_1^2 f_n(t)\, dt$ — III

0,25 ن — 1 — بين أن : $(n+1)\, I_n = \ln 2 - J_{n+1}\ ; \ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

0,25 ن — 2 أ — بين أن : $\int_1^2 \frac{(t-1)^{n+1}}{t^2} dt = (n+1)\, J_n - \frac{1}{2}\ ; \ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

0,50 ن — ب — استنتج أن : $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}\ ; \ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

0,50 ن — ج — أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\infty} I_n$ و $\lim_{n\infty} (n+1)\, I_n$ و $\lim_{n\infty} J_n$

الامتحـــــــــان الأبيض الموحد لنيل شهادة البكالوريــــــــــا مدينة وجـــــــــــــدة 2010	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر والبحث العلمي المركز الوطني للتقويم والامتحانات	مـــــادة الريـــــــــاضيات شعبة العـلوم الرياضية أ و ب المعـــــــــــــامل : 9 مدة الانجـاز : أربع ساعــــات

التمرين الأول : (5,5 ن)

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطة A ذات اللحق $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$
نربط كل نقطة M ذات اللحق $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ بالنقطة M' ذات اللحق $z'=\frac{\sqrt{3}}{2}+iy$. و نعتبر المجموعة $E=\{M\in(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}\,MA=2MM'\}$

0,50 ن — 1 — بين أن : $E=\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ \ et\ \ x^2-3y^2=1\}$

نضع : $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$ و $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

0,50 ن — 2 — أ — حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f و تحقق أن f دالة زوجية .

0,50 ن — ب — أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة ذات الأفصول 1 .

0,50 ن — ج — حدد مقارب المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

0,75 ن — د — بين أن : $E=(\mathcal{C}_f)\cup(\mathcal{C}_{-f})$ ثم أنشئ المجموعة (E) .

لكل نقطتين $M(a+ib)$ و $M(c+id)$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية ، نضع :
$$M(a+ib)\ \top\ M(c+id)=M\big(ac+3bd+i(ad+bc)\big)$$

1,00 ن — 3 — أ — بين أن القانون $\top$ تجميعي .

0,75 ن — ب — بين أن $(E,\top)$ جزء مستقر من $(\mathcal{P},\top)$.

1,00 ن — ج — بين أن $(E,\top)$ زمرة ، هل هي تبادلية ؟

التمرين الثاني : (4,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E):\ \ 109x-226y=1$

0,50 ن — 1 — أ — حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 . و استنتج أن (E) قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$.

0,50 ن — ب — بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الأزواج $(141+226k\ \ ;\ 68+109k)$ حيث k عدد نسبي .

0,75 ن — ج — استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد d أصغر من أو يساوي 226 و عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد e بحيث : $109d=1+226e$ (يجب تحديد قيمتي d و e)

0,50 ن — 2 — بين أن العدد 227 عدد أولي .

نضع : $A=\{0;1;2;\cdots;226\}$.
نعتبر التطبيقين f و g المعرفين من A نحو A بما يلي :
$f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{109} على العدد 227 .
$g(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{141} على العدد 227 .

0,50 ن — 3 — أ — تحقق أن : $g\big(f(0)\big)=0$

0,50 ن — ب — بين أن : $\forall\ a\in A\backslash\{0\}\ ;\ a^{226}\equiv 1\ [227]$

0,75 ن — ج — بين أن : $(\forall a\in A)\ ;\ f\big(g(a)\big)=a$. و بين أن : $(\forall a\in A)\ ;\ g\big(f(a)\big)=a$

0,50 ن — د — ماذا يمكن أن نستنتج بخصوص الدالتين f و g .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم p نضع : $I_p = \int_1^e x^2(\ln x)^p \, dx$

0,50 ن | 1 | أ | أحسب التكامل I_1 .

0,50 ن | ب | بين أن : $I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right) I_p \quad ; \quad (\forall p \in \mathbb{N}^*)$

0,50 ن | ج | استنتج قيمتي التكاملين I_2 و I_3 .

0,50 ن | 2 | أ | بين أن المتتالية $(I_p)_{p\geq 1}$ تناقصية .

0,50 ن | ب | بين أن المتتالية $(I_p)_{p\geq 1}$ متقاربة .

0,50 ن | ج | بين أن : $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p = 0$

التمرين الرابع : (7,0 ن)

I | **الجزء الأول** : لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي :

$g(x) = 1 + x^2 - 2x\,(1+x)\ln(1+x)$

0,50 ن | 1 | أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

0,50 ن | 2 | اعط جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن | 3 | بين أنه يوجد عنصر وحيد α من $]0;+\infty[$ بحيث $g(\alpha) = 0$ و أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

0,50 ن | 4 | حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

II | **الجزء الثاني** : نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. $(2\ cm)$

1,00 ن | 1 | أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

0,50 ن | 2 | أ | بين أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن | ب | بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

1,00 ن | 3 | أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. و نأخذ : $\alpha \approx 0,7$ و $f(\alpha) \approx 0,4$

III | **الجزء الثالث** : نعتبر التكامل التالي : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$

1,00 ن | 1 | أحسب التكامل I . (يمكن وضع : $t = \frac{\pi}{4} - x$)

1,00 ن | 2 | أحسب بالوحدة cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$ (يمكنك وضع $t = \operatorname{Arctan} x$)

الامتحان الأبيض الموحد
لنيل شهادة البكالوريا
مدينة الخميسات 2011

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات

مادة الرياضيات
شعبة العلوم الرياضية أ و ب
المعامل : 9
مدة الانجاز : أربع ساعات

التمرين الأول : (3,5 ن)

نعتبر المجال $G = [0,1[$.

ليكن $*$ التطبيق المعرف من $G \times G$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $a * b = a + b - E(a+b)$

حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

1. بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G . — 0,75 ن
2. بين أن $*$ تبادلي و تجميعي في المجموعة G . — 0,75 ن
3. بين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا في G وجب تحديده . — 0,50 ن
4. بين أن كل عنصر a من G يقبل مماثلا a' بالنسبة للقانون $*$ (ينبغي تحديده) — 0,50 ن
5. ليكن $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ ، حل في المجموعة G المعادلة التالية : $(F) : \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n\ fois} = \frac{1}{n}$ — 1,00 ن

التمرين الثاني : (4,0 ن)

يتكون هذا التمرين من جزئين مستقلين .

I **الجزء الأول** : نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_\theta) : z^2 - 2iz - \left(1 + e^{2i\theta}\right) = 0$;

حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $\left]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ، بين القاعدتين التاليتين : — 0,50 ن

$$\begin{cases} e^{ix} - e^{iy} = 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ e^{ix} + e^{iy} = 2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \end{cases}$$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ) ثم اكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي . — 0,50 ن

لتكن A و B النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2 .

3. أ) بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية و أن المثلث OAB قائم الزاوية . — 0,50 ن

ب) ما هي قيمة البارامتر الحقيقي θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الساقين . — 0,50 ن

II **الجزء الثاني** : نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $b+i$

حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ و ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و النقطة B' هي صورة B بالدوران r .

1. إعط الكتابة العقدية للدوران r ثم احسب $aff(B')$ بدلالة a و b . — 0,50 ن
2. بين التكافؤ التالي : $a + b = \sqrt{3} \iff B' \in (Oy)$. — 0,50 ن

ثم عبر في هذه الحالة عن $aff(B')$ بدلالة a .

نفترض فيما يلي أن $a = \sqrt{3}$ و $b = 0$.

و لتكن C و D النقطتين ذواتا اللحقين $c = -i$ و $d = 2 + \sqrt{3}(1-2i)$ على التوالي .

3. أ) ما هي طبيعة كل من المثلثين ABC و ACD ؟ — 0,50 ن

ب) نضع $E = r(D)$ و لتكن F صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AC}$ ، حدد لحقي النقطتين E و F . ثم بين أن المثلث BEF متساوي الأضلاع . — 0,50 ن

التمرين الثالث : (2,5 ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $(E) : \ ax \equiv 1\ [p]$

حيث a عنصر من المجموعة $A_p = \{1,2,\cdots,(p-1)\}$ و $p \geq 3$ عدد أولي .

0,50 ن | 1 أ | بين أن العدد a^{p-2} حل للمعادلة (E) .

0,50 ن | ب | ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{p-1} على العدد p . بين أن $r \in A_p$ و أن r هو الحل الوحيد للمعادلة (E) في المجموعة A_p .

فيما يلي نعتبر أن : $p = 31$

0,50 ن | 2 أ | حدد قيمتي r اللتان من أجلهما $a = 2$ ثم $a = 3$.

0,50 ن | ب | حل في $\mathbb{Z}$ المعادلتين التاليتين : $\begin{cases} (F_1) : \ 2x \equiv 1\ [31] \\ (F_2) : \ 3x \equiv 1\ [31] \end{cases}$

0,50 ن | ج | استنتج مجموعة حلول المعادلة $(F) : \ 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0\ [31]$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

التمرين الرابع : (10 ن)

I **الجزء الأول** : لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = e^x - (x+1)$

0,50 ن | 1 | بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \ ; \ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t)\,dt$

0,50 ن | 2 | حدد منحى تغيرات الدالة h على كل من المجالين $[0,+\infty[$ و $]-\infty,0]$.

0,50 ن | 3 | بين أن : $(\forall\ x \ \epsilon\ \mathbb{R}_+^*) \ ; \ \frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x}$

و بين أن : $(\forall\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}_+^*) \ ; \ 0 \leq \int_0^x h(t)dt \leq x\,h(x)$

0,50 ن | 4 | بين أن : $(\forall\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}_-^*) \ ; \ \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

و بين أن : $(\forall\ x\ \epsilon\ \mathbb{R}_-^*) \ ; \ x\,h(x) \leq \int_0^x h(t)dt \leq 0$

0,50 ن | 5 | أحسب النهاية : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{h(x)}{x}\right)$, ثم استنتج النهاية : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right)$

II **الجزء الثاني** : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \ ; \ \forall\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

0,25 ن | 1 | بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

0,50 ن | 2 | أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

0,50 ن | 3 | بين أن f قابلة للاشتقاق في الصفر .

0,50 ن | 4 | بين أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*) \ ; \ f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$ حيث : $\varphi(x) = (1-x)e^x - 1$

0,50 ن | 5 | أدرس تغيرات الدالة φ على $\mathbb{R}$. و استنتج إشارتها على $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن | 6 | ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن | 7 | أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مبرزا المماس في النقطة ذات الأفصول 0 .

III **الجزء الثالث** : لتكن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; \forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

1 بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ينبغي تحديده . — 0,50 ن

2 **أ** بين أن : $\forall\, x \,\epsilon\,]0;+\infty[\; ; \; f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\, e^{x} - 1}{2(e^{x} - 1)^2}$ — 0,50 ن

ب بين أن : $e^{2x} - 2x\, e^{x} - 1 \geq 0 \; ; \; (\forall x \epsilon \mathbb{R}^{+})$ ثم استنتج أن : $\dfrac{-1}{2} \leq f'(x) < 0$ — 0,50 ن

3 **أ** بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \; ; \; (\forall n \epsilon \mathbb{N})$ — 0,50 ن

ب استنتج أن : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (1 - \alpha) \; ; \; (\forall n \epsilon \mathbb{N})$ و حدد النهاية التالية $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n)$ — 0,50 ن

IV **الجزء الرابع** : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} f(t)\, dt$

1 بين أن : $0 \leq F(x) \leq x\, f(x) \; ; \; (\forall\, x \geq 0)$ ثم استنتج أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ — 0,50 ن

2 بين أن : $F(x) \leq x\, f(x) \; ; \; (\forall\, x \leq 0)$ ثم استنتج النهايتين: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{F(x)}{x}$ — 0,50 ن

3 بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{x(3 - e^{x})}{e^{2x} - 1} \; ; \; \forall\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}^{*} \\ F'(0) = 1 \end{cases}$ — 0,50 ن

4 ضع جدول تغيرات الدالة الدالة F ثم ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_F)$ في م م م $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. — 0,50 ن

نعطي : $\ln 3 \approx 1{,}1$ و $F(\ln 3) \approx 0{,}44$.

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة جوان 2014

اختبار مادة الرياضيات

الشعبة : رياضيات

المعامل : 7

المدة : أربع ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(2;1;-1)$ و $B(-1;2;4)$
و $C(0;-2;3)$ و $D(1;1;-2)$ و المستوي (P) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

المطلوب : أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

1) النقط A و B و C تعين مستويا.
2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P) .
3) $x-2y-z-1=0$ هي معادلة المستوي (ACD) .
4) $\begin{cases} x=2t \\ y=-2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$; $t\epsilon\mathbb{R}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (C) .
5) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) تساوي $\frac{3}{2}$.
6) النقطة $E(-2;-1;1)$ هي المسقط العمودي للنقطة C على (P) .
7) سطح الكرة ذات المركز D و نصف القطر $\frac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=0$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$
2) A ، B ، C و D نقط في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ لاحقاتها على الترتيب : $z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$.

أ) بين أن : $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC) .

ب) تحقق أن : $\frac{z_B+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

3) أ) بين أن : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}\,e^{\frac{i\pi}{2}}$. و استنتج أن D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته و زاويته .

ب) بين أن المثلث ADB قائم و أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها.

ج) استنتج إنشاء الرباعي $ABCD$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) : $2013x-1962y=54$. حيث x و y عددان صحيحان.

أ) أحسب $PGCD(2013;1962)$.

ب) استنتج أن المعادلة E تقبل حلولا.

ج) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 0\,[6]$.

د) استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ حيث $74<x_0<80$ ثم حل المعادلة (E) .

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (E) .

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب) عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث $671a-654b=18$ و $PGCD(a,b)=18$

التمرين الرابع : (6 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (2-x)e^x - 1$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1{,}2 < \alpha < -1{,}1$ و $1{,}8 < \beta < 1{,}9$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ و فسر النتيجتين هندسيا.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ و استنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$.

4) أحسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

5) أ) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1 . أحسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث $a(\lambda) = \int_1^{\lambda} (f(x) - 1)\, dx$.

ب) أحسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (5 نقاط)

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب :
$a = -2 + 6i$ و $b = -1 + 2i$.

1) أكتب العدد المركب $1 + i$ على شكل أسي .

2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث $z' = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} z + 2$.

أ) D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d = 2i$. جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S . ماذا تستنتج ؟

ب) بين أن : $z' - d = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} (z - d)$ و استنتج طبيعة و عناصر التحويل S .

3) أ) (Δ) المستقيم ذو المعادلة $3x + 5y = 11$. تحقق أن النقطة $M_0(-3; 4)$ تنتمي إلى (Δ)
ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

ب) M_0' صورة M_0 بالتحويل S . بين أن المستقيمين (BM_0') و (BA) متعامدان .

4) x و y عددان صحيحان من المجال $[-5; 5]$ ، عين مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدان . حيث M' هي صورة M بالتحويل S .

التمرين الثاني : (4,5 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$

المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ كما هو مبين في الشكل أدناه

1) بين أن الدالة f متزايدة تماما .

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
(Δ) المستقيم الذي معادلته : $y = x$.

أ) باستعمال المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المستقيم (Δ) ، مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 دون حسابها .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

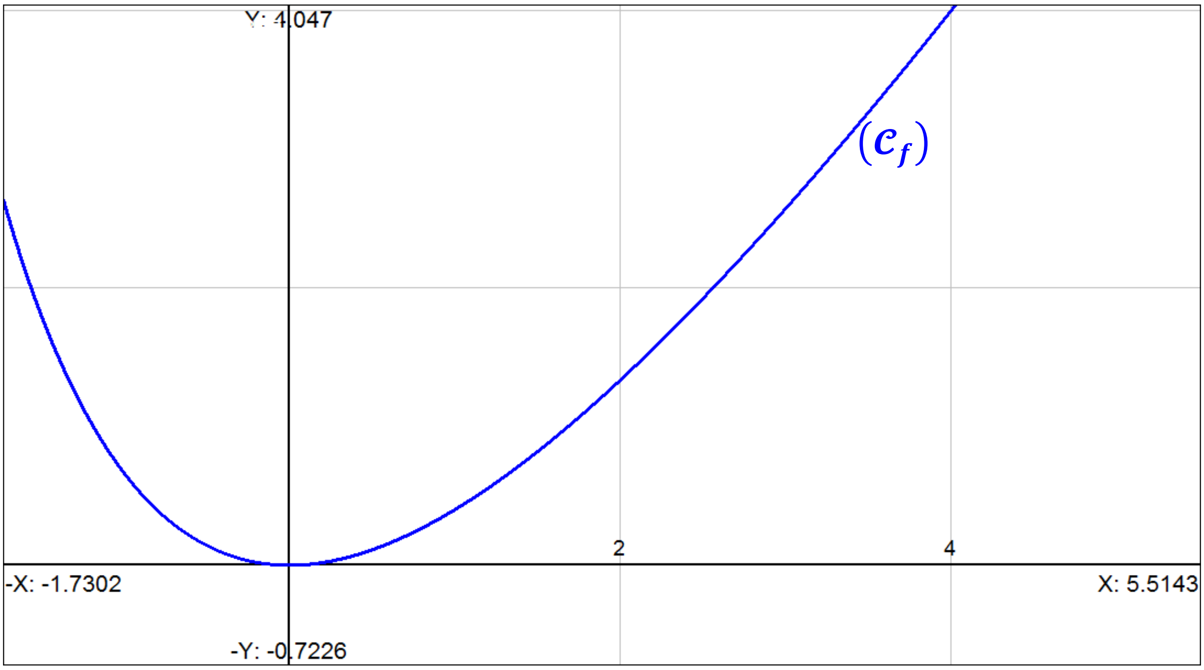
3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 3$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة. و استنتج أنها متقاربة .

4) أ) أدرس إشارة العدد $7u_{n+1} - 6u_n$ ، و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_{n+1} \le \frac{6}{7} u_n$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 3 \left(\frac{6}{7}\right)^n$.

ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.



التمرين الثالث : (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$ و $\vec{u}(1,2,-2)$ شعاع توجيه له .

(Δ') المستقيم المعرف بجملة المعادلتين : $\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$

1) حدد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .

2) بين أن (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

3) (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ) . بين أن معادلة المستوي (P) هي : $2x+y+2z-3=0$

4) $M(1+t\,;1+2t\,;3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ) حيث $t\epsilon\mathbb{R}$.
أحسب d المسافة بين M و المستوي P .

5) أ) عين إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) ، ثم عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A' و يوازي (Δ) .

ب) بين أن (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$.

6) أ) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(t)=BM^2$. بين أن : $f(t)=9t^2-24t+20$

ب) بين أن f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$.

ج) تحقق أن : $d=\sqrt{f(t_0)}$

التمرين الرابع : (5,5 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$
$(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ) أدرس تغيرات الدالة f .

ب) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري).

ج) عين فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع حامل محور الفواصل ثم ارسم $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]0;e^2]$.

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1-\ln x$
$(\mathcal{C}_g)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) عين الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ ثم أرسم $(\mathcal{C}_g)$ على المجال $]0,e^2]$.

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$

أ) أحسب $h'(x)$ و استنتج دالة أصلية للدالة $x\longmapsto(\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) أحسب العدد : $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(f(x)-g(x)\right)dx$

Epreuve : Mathématiques
Section : Mathématiques
Coefficient : 4
Durée : 4 heures

REPUBLIQUE TUNISIENNE

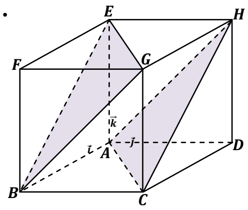
MINISTERE DE L'EDUCATION

Examen Du
BACCALAUREAT
Session principale
Session de Juin 2014

Le sujet original comporte 4 pages , la page annexe 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1) : (4 *points*) :

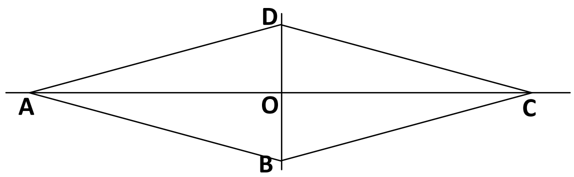
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $ABCDEFGH$ le cube tel que $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 6\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 6\vec{k}$. On désigne par P le plan (ACH) et par Q le plan (EGB).



1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AH}$.
   b) En déduire une équation du plan P
   c) Montrer que les plans P et Q sont parallèles et donner une équation du plan Q
2) soit S la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z = 0$
   a) Déterminer le rayon de S et les coordonnées de son centre I
   b) Soit J le projeté orthogonal de A sur le plan Q, montrer que $[AJ]$ est un diamètre de S
   c) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des deux plans P et Q.
3) Soit t la translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$
   a) Soit A' et J' les images respectives de A et J par t. Déterminer les coordonnées de A' et J'
   b) Déterminer S' l'image de la sphère S par t
   c) Montrer que S' est tangente aux deux plans P et Q et déterminer leurs points de contact

Exercice 2) : (5 *points*) :

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AC = 3BD$.



1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f
   b) Monter que O est le centre de f.
2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que $OA = 9OD'$
   b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que $BB'DD'$ est un losange.
3) Soit $g = f \circ S_{(AC)}$
   a) Déterminer la nature de g
   b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g
   c) Déterminer l'axe (Δ) de g
   d) La droite (Δ) coupe les droites (AB) , (BD') , (DB') et (CD) respectivement en M , N , P et Q. Montrer que $MQ = 3NP$.

Exercice 3) : (4 *points*) :

1) Soit a un entier tel que $a = 1\ (mod 10)$.
   a) Montrer que $a^9 + a^8 + \cdots + a + 1 = 0\ (mod 10)$.
   b) En déduire que $a^{10} = 1\ (mod\ 10^2)$.(On pourra utiliser $a^{10} - 1 = (a-1)(a^9 + \cdots + a + 1)$
2) Soit b un entier.
   a) Déterminer les restes possibles de b^4 dans la division euclidienne par 10.
   b) En déduire que $b^4 = 1\ (mod 10)$ si et seulement si b est premier avec 10.
3) Soit b un entier premier avec 10.
   a) Montrer que $b^{40} = 1\ (mod\ 10^2)$.
   b) Déterminer les deux derniers chiffres de 67^{42} .

Exercice 4) : (7 *points*) :

Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \ln(1 + \tan x)$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to \left(\frac{-\pi}{4}\right)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $\left]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variations de f .

2) a) vérifier que les points O , $A\left(\frac{\pi}{4}, \ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de $(\mathcal{C})$.($\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$)

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2 - f(x)$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$

(On rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$)

c) Justifier alors le point I est un centre de symetrie de la courbe $(\mathcal{C})$.

Dans l'annexe ci-jointe on a placé les points I et A dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

3) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par $\mathcal{S}_1$ la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OA) et les droites d'équations $x = 0$. et $x = \frac{\pi}{8}$. et on désigne par $\mathcal{S}_2$ la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite (OA) et les droites d'équations $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{\pi}{4}$.

a) Justifier que les surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ont la même aire

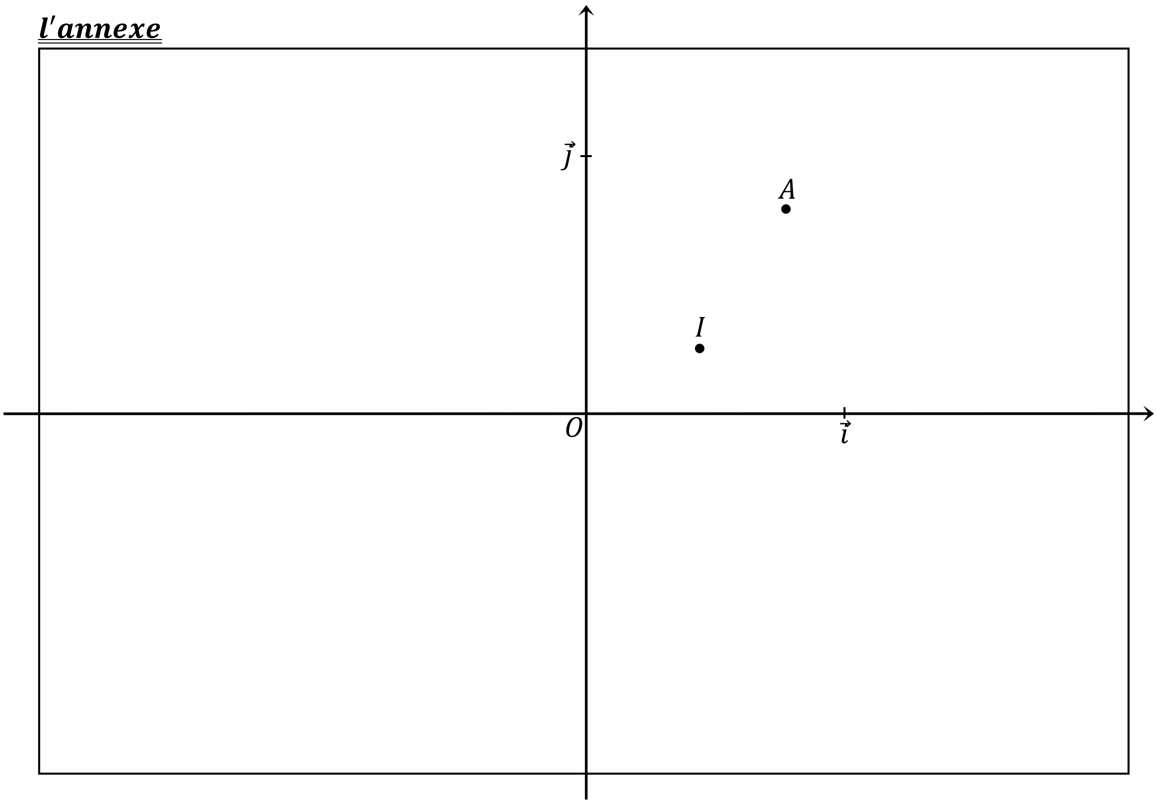
b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, dx$

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera . On note f^{-1} la réciproque de f.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour x appartenant à J

c) Donner la valeur de $\int_0^{\ln 2} \left(\frac{e^x}{1 + (e^x - 1)^2}\right) dx$

l'annexe



أجوبة امتحان الدورة العادية 2003

التمرين الأول 1 أ

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) .

إذن : $x^2(x^2+7)=y(2x+y)$

بما أن : $x=\delta a$ و $y=\delta b$

فإن : $(\delta a)^2((\delta a)^2+7)=(\delta b)(2\delta a+\delta b)$

يعني : $\delta^2(a^2(\delta^2a^2+7))=\delta^2(b(2a+b))$ $(*)$

نختزل بالعدد الغير المنعدم δ^2 نجد : $\boxed{a^2(\delta^2a^2+7)=b(2a+b)}$

التمرين الأول 1 ب

لدينا حسب المعطيات : $x\wedge y=\delta$.

إذن $\delta a\wedge\delta b=$ (لأن $x=\delta a$ و $y=\delta b$)

نقسم طرفي هذه المتساوية على العدد الغير المنعدم δ نجد : $a\wedge b=1$

و منه : $a^2\wedge b=1$

من خلال النتيجة $(*)$ نستنتج أن b يقسم الجداء $a^2(\delta^2a^2+7)$.

إذن حسب $Gauss$ نستنتج أن $b/(\delta^2a^2+7)$ (لأن $a^2\wedge b=1$)

إذن يوجد عدد نسبي k حيث $(\delta^2a^2+7)=kb$.

نعوض في المتساوية $(*)$ التعبير (δ^2a^2+7) بالتعبير kb نجد :

$kb\,a^2=b(2a+b)$

نختزل بعد ذلك بالعدد الغير المنعدم b نجد : $k\,a^2=(2a+b)$

التمرين الأول 1 ج

ننطلق من الكتابة : $k\,a^2=(2a+b)$.

يعني $a(ka-2)=b$. إذن العدد a يقسم العدد b .

يعني أن العدد a يقسم الجداء $b\times 1$.

و بما أن $a\wedge b=1$ فإنه حسب $Gauss$ نستنتج أن a يقسم العدد 1 .

و نعلم أن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه .

إذن : $a=1$.

التمرين الأول 1 د

بتعويض a بالعدد 1 في المتساوية $(*)$ نجد : $\delta^2+7=b(2+b)$

إذن : $\delta^2+7=b^2+2b$.

يعني : $\delta^2+7+1=\delta^2+2b+1$

يعني : $\delta^2+8=(b+1)^2$

التمرين الأول 2

لنحل في $(\mathbb{N}^*)^2$ المعادلة : $(E)\ :\ x^2(x^2+7)=y(2x+y)$.

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) و δ القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y

إذن حسب النتائج التي تم التوصل إليها من خلال هذا التمرين نستنتج أن :

$x=\delta$ و $(b+1)^2=\delta^2+8$.

إذن : $(b+1)^2=x^2+8$.

يعني : $(b+1)^2-x^2=8$.

يعني أن : $(b+1-x)(b+1+x)=8\quad(2)$.

بما أن x و b عنصران من $\mathbb{N}^*$.

فإن $(b+1+x)$ عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

و منه $(b+1-x)$ عدد صحيح طبيعي كذلك .

إذن الحالات التي تتحقق فيها المتساوية (2) هي :

$\begin{cases}(b+1-x)=4\\(b+1+x)=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}(b+1-x)=2\\(b+1+x)=4\end{cases}$

$\begin{cases}(b+1-x)=8\\(b+1+x)=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}(b+1-x)=1\\(b+1+x)=8\end{cases}$

نحل هذه النظمات الأربع و نلاحظ أنه في حالة واحدة فقط يكون الحلان صحيحان طبيعيان و هي الحالة $\begin{cases}b+1-x=2\\b+1+x=4\end{cases}$ التي تعطي : $\begin{cases}b=2\\x=1\end{cases}$

و بما أن $y=b\delta=bx$ فإن $y=2$.

و بالتالي المعادلة تقبل حلا وحيدا في $(\mathbb{N}^*)^2$ و هو الزوج $(1,2)$.

التمرين الثاني 1 أ

لدينا المنحنى (E) هو مجموعة النقط $M(x,y)$

حيث $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

نلاحظ في البداية أن : $\sqrt{16-x^2}\ge 0\ ;\ \forall x\in[-4;4]$.

إذن :

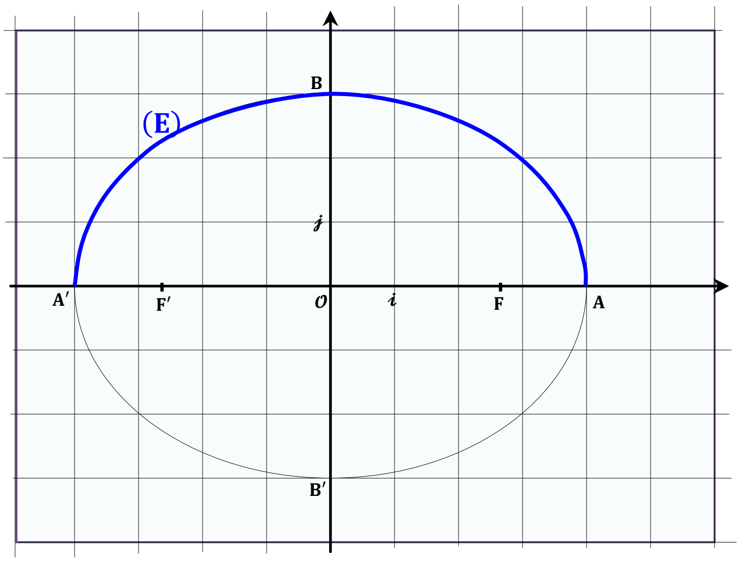
$$\begin{aligned}(E)&=\left\{M(x,y)\ /\ y=\tfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\ ;\ y\ge 0\right\}\\&=\left\{M(x,y)\ /\ y^2=\frac{9}{16}(16-x^2)\ ;\ y\ge 0\right\}\\&=\left\{M(x,y)\ ;\ y^2+\frac{9}{16}x^2=9\ ;\ y\ge 0\right\}\\&=\left\{M(x,y)\ ;\ \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\ ;\ y\ge 0\right\}\end{aligned}$$

إذن المنحنى (E) هو النصف العلوي للاهليلج الذي مركزه O و رؤوسه $A(4;0)$ و $A'(-4;0)$ و $B(0;3)$

و الرأس $B'(0;-3)$ لا ينتمي إلى (E) .

بؤرتا هذا الاهليلج هما $F(\sqrt{7},0)$ و $F'(-\sqrt{7},0)$.

التمرين الثاني 1 ب



التمرين الثاني 2 أ

لنحسب التكامل التالي : $I(x_1)=\frac{3}{4}\int_{x_1}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$

نضع : $x=4\cos t$ حيث $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ إذن $dx=-4\sin t\,dt$.

إذا كان $x=x_1$ فإن $t=t_1$ لأن $x_1=4\cos t_1$

إذا كان $x=4$ فإن $t=0$ لأن $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

إذن التكامل $I(x_1)$ يصبح :

$$\begin{aligned}I(x_1)&=\frac{3}{4}\int_{t_1}^{0}(4\sin t)(-4\sin t)\,dt\\&=-12\int_{t_1}^{0}\sin^2 t\,dt\end{aligned}$$

نستعين بقاعدتي $Euler$ في إخطاط الدوال المثلثية :

$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

و ذلك للحصول على : $\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$

إذن التكامل يصبح :

$$\begin{aligned} I(x_1) &= -12\int_{t_1}^{0}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)\right)dt \\ &= -12\left(\left[\frac{t}{2}\right]_{t_1}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_{t_1}^{0}\right) \\ &= -12\left(\frac{-t_1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin(2t_1)}{2}\right)\right) \\ &= 6t_1 - 3\sin(2t_1) \end{aligned}$$

التمرين الثاني 2 ب

لدينا M_1 نقطة من المنحنى (E) و أفصولها x_1 .

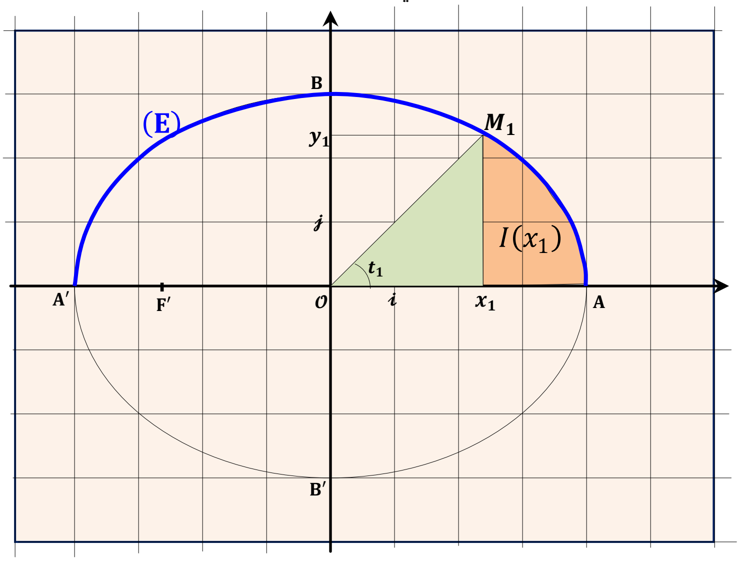
إذن أرتوبها y_1 يحقق : $y_1 = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x_1^2}$

و نعلم كذلك أن $x_1 = 4\cos(t_1)$. إذن نحصل على :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{3}{4}\sqrt{16 - (4\cos(t_1))^2} = \frac{3}{4}\sqrt{16(1 - \cos^2(t_1))} \\ &= \frac{3}{4}\sqrt{16\ \sin^2(t_1)} = \frac{3}{4}\cdot 4\sin(t_1) = 3\sin(t_1) \end{aligned}$$

التمرين الثاني 2 ج

نستعين أثناء الحساب بالشكل التالي :



$$\begin{aligned} S(x_1) &= S(Ox_1M_1) + I(x_1) \\ &= \frac{x_1 \times y_1}{2} + 6\,t_1 - 3\sin(2t_1) \\ &= \frac{4\cos(t_1) \times 3\sin(t_1)}{2} + 6\,t_1 - 3\sin(2t_1) \\ &= 6\cos(t_1)\sin(t_1) + 6\,t_1 - 3\sin(2t_1) \\ &= 3\sin(2t_1) + 6\,t_1 - 3\sin(2t_1) \\ &= 6\,t_1 \end{aligned}$$

التمرين الثاني 2 د

$$S(x_1) = 6t_1 \implies S = S(0) = \frac{6\pi}{2} = 3\pi$$

التمرين الثاني 2 و

$$S(x_1) = \frac{S}{2} \iff 6t_1 = \frac{3\pi}{2} \iff t_1 = \frac{\pi}{4}$$

التمرين الثاني 2 ه

لدينا $x_1 = 4\cos(t_1)$ و $y_1 = 3\sin(t_1)$.

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = 4\cos(t_1)\,\vec{i} + 3\sin(t_1)\,\vec{j}$

من أجل $t_1 = \frac{\pi}{4}$ نحصل على $\overrightarrow{OM_1} = 2\sqrt{2}\,\vec{i} + \frac{3}{2}\sqrt{2}\,\vec{j}$.

و نعلم أن $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.

إذن : $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}$.

إذن النقطة M_1 معرفة بالزوج $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ في المعلم $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

التمرين الثالث I 1

نختار مصفوفتين $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من المجموعة E

و نبين أن مجموعهما هو مصفوفة من E .

$$\begin{aligned} M(a,b) + M(c,d) &= \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+c)+(b+d) & -(b+d) \\ (b+d) & (a+c) \end{pmatrix} \\ &= M\big((a+c)\,;\,(b+d)\big) \in E \end{aligned}$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

و بنفس الطريقة لدينا :

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(c,d) &= \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c+d & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac-bd)+(bc+ad+bd) & -(bc+ad+bd) \\ (bc+ad+bd) & (ac-bd) \end{pmatrix} \\ &= M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big) \in E \end{aligned}$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الثالث I 2

لنبين أن $(E,+,\times)$ **حلقة** **تبادلية** و **واحدية** .

$(E,+)$ زمرة تبادلية
× تجميعي
× توزيعي بالنسبة لـ *

× تبادلي في E .

× يقبل عنصرا محايدا في E .

لدينا E جزء مستقر من الزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

إذن $+$ قانون تركيب داخلي في E .

بما أن $+$ تبادلي و تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

فإن $+$ تبادلي و تجميعي كذلك في E .

و بما أن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لـ $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

فإن $M(0,0)$ هو العنصر المحايد لـ $+$ في E .

و لدينا : $M(a,b) + M(-a\,,-b) = M(0,0)$.

و كذلك : $M(-a\,,-b) + M(a,b) = M(0,0)$

إذن كل مصفوفة $M(a,b)$ من E تقبل مماثلة $M(-a\,,-b)$

من E بالنسبة للقانون $+$. و بالتالي $(E,+)$ زمرة تبادلية .

من جهة أخرى لدينا $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية

و E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

إذن $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E .

لأن $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و لدينا كذلك $M(a,c) \times M(1,0) = M(a,c)$

و كذلك : $M(1,0) \times M(a,c) = M(a,c)$

إذن المصفوفة $M(1,0)$ هي العنصر المحايد للضرب $\times$ في E .

و لدينا كذلك : $M(a,b)\times M(c,d)$
$$= M\big((ac-bd)\,;\,(bc+ad+bd)\big)$$
$$= M(c,d)\times M(a,b)$$

إذن $\times$ تبادلي في المجموعة E .

خلاصة : لقد توصلنا إلى النتائج التالية :

- $(E,+)$ زمرة تبادلية .
- $\times$ قانون تجميعي في E .
- $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E .
- $\times$ يقبل عنصرا محايدا $M(1,0)$ في E .
- $\times$ تبادلي في E .

و بالتالي $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية .

التمرين الثالث I 3 أ

ليكن x و y عددين حقيقيين حيث $x^2+xy+y^2=0$.

نضيف إلى طرفي هذه المتساوية في حالتين xy و $-xy$

لنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases} x^2+xy+y^2-xy=-xy \\ x^2+xy+y^2+xy=xy \end{cases}$

هذه النظمة بعد تنظيمها نحصل على : $\begin{cases} x^2+y^2=-xy\geq 0 \\ (x+y)^2=xy\geq 0 \end{cases}$

نستنتج إذن أن الكمية xy سالبة و موجبة في آن واحد .

إذن $xy=0$ و منه $x^2+y^2=0$.

هذه الكتابة الأخيرة يعني أن (x,y) نقطة من الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O و شعاعها 0 .

يعني بكل بساطة : $x=y=0$.

عكسيا : إذا كان $x=y=0$. فإن : $x^2+xy+y^2=0$.

و بالتالي نستنتج التكافؤ التالي :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ (x^2+xy+y^2)\iff(x=y=0)$$

التمرين الثالث I 3 ب

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E .

إذن : $det\big(M(a,b)\big)=\begin{vmatrix} a+b & -b \\ b & a\end{vmatrix}=a^2+ab+b^2$

و بذلك تكون $M(a,b)$ قابلة للقلب إذا كان $a^2+ab+b^2\neq 0$.

العناصر (a,b) التي من أجلها $a^2+ab+b^2=0$ هي $(a,b)=(0,0)$.

إذن لكي يكون $a^2+ab+b^2\neq 0$

يكفي أن يكون $a\neq b$ أو $a\neq 0$ أو $b\neq 0$.

نستنتج أن جميع عناصر المجموعة $E\backslash\{\,M(0,0)\,\}$ قابلة للقلب .

و لدينا : $\big(M(a,b)\big)^{-1}$
$$=\frac{1}{det\big(M(a,b)\big)}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\begin{pmatrix} (a+b)+(-b) & -(-b) \\ (-b) & (a+b)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{a^2+ab+b^2}\,M\big((a+b)\,;\,-b\big)$$

التمرين الثالث I 3 ج

تكون الحلقة $(E,+,\times)$ جسم تبادلي إذا تحققت الشروط التالية :

1) $(E,+)$ زمرة تبادلية
2) $(E\backslash\{M(0,0)\},\times)$ زمرة
3) القانون $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$

نعتبر المجموعة $(E\backslash\{M(0,0)\}\,;\times)$.

لدينا $\times$ قانون تركيب داخلي في $E\backslash\{M(0,0)\}$.

لأن E جزء مستقر من الزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

و لدينا $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في $E\backslash\{M(0,0)\}$.

و كل عنصر من $E\backslash\{M(0,0)\}$ يقبل مماثلا (مقلوبا) في $E\backslash\{M(0,0)\}$

إذن $(E\backslash\{M(0,0)\}\,;\times)$ زمرة

و نعلم حسب نتائج الأسئلة السابقة أن $(E\,,+)$ زمرة تبادلية .

و كذلك $\times$ تبادلي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $E\backslash\{M(0,0)\}$.

نستنتج إذن من هذه النتائج أن $(E,+,\times)$ **جسم** **تبادلي** .

- $\times$ تبادلي في $E\backslash\{M(0,0)\}$.
- $(E,+)$ زمرة تبادلية
- $(E\backslash\{M(0,0)\},\times)$ زمرة
- $\times$ توزيعي على $+$

التمرين الثالث II 1

ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

هذا يعني أن : $\exists\,(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\ ;\ \sigma=\sigma_1+i\sigma_1$

لكي يكون $(1,\sigma)$ أساس الفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

يكفي أن تكون الأسرة $(1,\sigma)$ مولدة للفضاء $(\mathbb{C},+,\cdot)$ و أن تكون حرة .

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا و نضع $z=m_1+m_2\sigma$.

إذن : $z=x+iy=m_1+m_2(\sigma_1+i\sigma_2)$

يعني : $\begin{cases} x=m_1+m_2\sigma_2 \\ y=m_2\sigma_2\end{cases}$ و منه : $\begin{cases} m_1=\left(x-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}y\right)\in\mathbb{R} \\ m_2=\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)\in\mathbb{R}\end{cases}$

إذن : $(\forall z\in\mathbb{C})\,,(\,\exists(m_1,m_2)\in\mathbb{R}^2)\ ;\ z=m_1+m_2\sigma$

و هذا يعني أن الأسرة $(1,\sigma)$ مُولدة للفضاء $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

لتكن $x+\sigma y$ تأليفة خطية منعدمة للعددين 1 و σ إذن $x+\sigma y=0$

يعني : $x+(\sigma_1+i\sigma_2)y=0$.

و منه : $x+\sigma_1 y=0$ و $\sigma_2 y=0$.

يعني : $x=0$ و $y=0$.

و هذا يعني أن الأسرة $(1,\sigma)$ حرة .

و بالتالي $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

التمرين الثالث II 2

لكي يكون التطبيق ψ تشاكلا تقابليا من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$.

يكفي أن يحقق ما يلي : $1)\ :\ \forall\,(\,M(a,b)\,;M(c,d)\,)\in E^2\ ;$
$$\psi\big(M(a,b)+M(c,d)\big)=\psi\big(M(a,b)\big)+\psi\big(M(c,d)\big)$$
$$2)\ :\ \forall\,z\in\mathbb{C}\ ;\ \exists!\,M(x,y)\in E\ :\ \psi\big(M(x,y)\big)=z$$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

لدينا : $\psi\big(M(a,b)+M(c,d)\big)=\psi\big(M(a+c\,;b+d)\big)$
$$=(a+c)+\sigma(b+d)$$
$$=(a+\sigma b)+(c+\sigma d)$$
$$=\psi\big(M(a,b)\big)+\psi\big(M(c,d)\big)$$

إذن ψ تشاكل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$

ليكن $z=a+\sigma b$ عنصرا من $\mathbb{C}$.

لنحل المعادلة $\varphi\big(M(x,y)\big)=a+\sigma b$ ذات المجهول $M(x,y)$ في E

لدينا : $\psi\big(M(x,y)\big)=a+\sigma b$

يعني : $x+\sigma y=a+\sigma b$

بما أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$ فإن كل عدد عقدي يُكتب بكيفية وحيدة على شكل تأليفة خطية للعددين 1 و σ .

نستنتج أن $x=a$ و $y=b$.

أي : $(\forall\,a+\sigma b\in\mathbb{C}),(\exists!\,M(x,y)\in E)\ :\ \psi\big(M(x,y)\big)=a+\sigma b$

إذن ψ تقابل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$.

و بالتالي ψ تشاكل تقابلي من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$.

التمرين الثالث — II 3

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z + 1 = 0$

بعد حساب المميز Δ نجد : $\Delta = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن هذه المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين .

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$$

التمرين الثالث — II 4

من أجل : $\sigma = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا :

$$\begin{aligned} \sigma^2 + 1 &= \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma \end{aligned}$$

إذن : $\sigma^2 = (\sigma - 1)$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} \psi\big(M(a,b) \times M(c,d)\big) &= \psi\big(M(ac - bd\ ;\ bc + ad + bd)\big) \\ &= (ac - bd) + \sigma(bc + ad + bd) \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} \psi\big(M(a,b)\big) \times \psi\big(M(c,d)\big) &= (a + \sigma b) \times (c + \sigma d) \\ &= ac + ad\,\sigma + bc\,\sigma + bd\,\sigma^2 \\ &= ac + ad\,\sigma + bc\,\sigma + bd\,(\sigma - 1) \\ &= ac + ad\,\sigma + bc\,\sigma + bd\,\sigma - bd \\ &= (ac - bd) + \sigma(bc + ad + bd) \end{aligned}$$

إذن: $\psi\big(M(a,b) \times M(c,d)\big) = \psi\big(M(a,b)\big) \times \psi\big(M(c,d)\big)$

و بالتالي ψ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$.

التمرين الرابع — I 1

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{-\infty} - \frac{1}{2} = -\infty$$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C})$ على يمين 0 .

لدينا :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \underbrace{\left(\frac{4}{x}\right)}_{0^+}\underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{0^+} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$$

إذن المستقيم $y = \frac{-1}{2}$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع — I 2 أ

f دالة قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا :

$$f'(x) = 4\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{4(x - 2x\ln x)}{x^4} = \frac{4(1 - 2\ln x)}{x^3}$$

التمرين الرابع — I 2 ب

لدينا : $\forall\, x \in\,]0,+\infty[\ ;\quad f'(x) = \dfrac{4(1 - 2\ln x)}{x^3}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - 2\ln x)$.

إذا كان $x = \sqrt{e}$ فإن $f'(x) = 0$.

إذا كان $x > \sqrt{e}$ فإن $f'(x) < 0$.

إذا كان $x < \sqrt{e}$ فإن $f'(x) > 0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e} - \frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

التمرين الرابع — I 3

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f :

f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]1,\sqrt{e}[$.

إذن f تقابل من المجال $]1,\sqrt{e}[$ نحو المجال $]f(1), f(\sqrt{e})[$.

أي f تقابل من $]1,\sqrt{e}[$ نحو $]-0{,}5\ ;\ 0{,}2[$.

و بما أن $0 \in\,]-0{,}5\ ;\ 0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا α في المجال $]1,\sqrt{e}[$ بالتقابل f .

أي : $\exists!\ \alpha \in\,]1,\sqrt{e}[\ ;\ f(\alpha) = 0 \quad (1)$

و بنفس الطريقة : f متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\sqrt{e}, +\infty[$.

إذن f تقابل من أي مجال J يوجد ضمن $]\sqrt{e}, +\infty[$ نحو صورته $f(J)$.

أي أن f تقابل من $]\sqrt{e}, 3[$ نحو $]-0{,}01\ ;\ 0{,}2[$.

و بما أن $0 \in\,]-0{,}01\ ;\ 0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا β في المجال $]\sqrt{e}, 3[$ بالتقابل f .

أي : $\exists!\ \beta \in\,]\sqrt{e}, 3[\ ;\ f(\beta) = 0 \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين α و β حيث $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$.

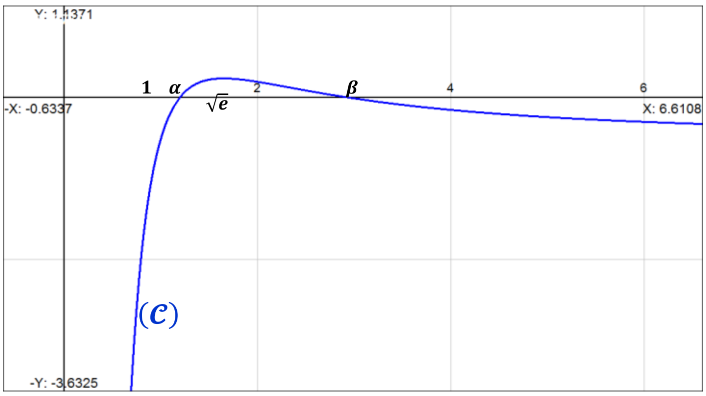
التمرين الرابع — I 4

معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة ذات الأفصول 1 تُكتب على شكل :

$$\begin{aligned} (T)\ :\ y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= 4(x - 1) + \left(\frac{-1}{2}\right) \\ &= 4x - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

و بالتالي : $(T)\ :\ y = 4x - \frac{9}{2}$

التمرين الرابع — I 5



التمرين الرابع II 1

$$t \ge 0 \Rightarrow -t^2 \le 0 \Rightarrow 1-t^2 \le 1 \Rightarrow (1-t)(1+t) \le 1 \Rightarrow \boxed{(1-t) \le \frac{1}{1+t}} \; ; \; avec\ (1+t) \neq 0 \quad (1)$$

$$t \ge 0 \Rightarrow 1+t \ge 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{1+t} \le 1} \; ; \; avec\ (1+t) \neq 0 \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{\forall\, t\, \epsilon\, [0,+\infty[\; ; \; (1-t) \le \frac{1}{1+t} \le 1}$$

التمرين الرابع II 2

ليكن a عنصرا من المجال $[0,+\infty[$.

$$t \ge 0 \Rightarrow (1-t) \le \frac{1}{1+t} \le 1$$

$$\Rightarrow \int_0^a (1-t)\,dt \le \int_0^a \left(\frac{1}{1+t}\right) dt \le \int_0^a 1\,dt$$

car ces fonctions sont continues et $0 < a$

$$\Rightarrow \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^a \le [\ln|1+t|]_0^a \le [t]_0^a$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{a^2}{2}\right) \le \ln(1+a) \le a$$

التمرين الرابع III 1

لدينا f_n دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.
لأنها عبارة عن فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$.
ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $f_n'(x) = n\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{n(1-2\ln x)}{x^2}$

بما أن : $\forall\, x > 0 \; ; \; \frac{n}{x^3} \ge 0$

فإن إشارة $f_n'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2\ln x)$.
نستنتج إذن الجدول التالي :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{n}{2e} - \frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{-1}{2}$

التمرين الرابع III 2

دراسة التقعر و نقط الإنعطاف يستدعي حساب المشتقة الثانية لـ f_n .

$$f_n''(x) = \frac{x^3\left(\frac{-2n}{x}\right) - 3x^2 n(1-2\ln x)}{x^6} = \frac{n(6\ln x - 5)}{x^4}$$

إذن $f_n''(x)$ تنعدم إذا كان $6\ln x - 5 = 0$.

يعني : $\ln x = \frac{5}{6}$ أي : $x = e^{\frac{5}{6}}$.

إذا كان : $x > e^{\frac{5}{6}}$. فإن : $6\ln x - 5 > 0$. و منه : $f_n''(x) > 0$

إذا كان : $x < e^{\frac{5}{6}}$. فإن : $6\ln x - 5 < 0$. و منه : $f_n''(x) < 0$

نلاحظ أن $f_n''(x)$ تنعدم في النقطة ذات الأفصول $e^{\frac{5}{6}}$
و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن $(\mathcal{C}_n)$ يقبل نقطة انعطاف و هي $\left(e^{\frac{5}{6}} \; ; \; \frac{5n}{6}e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2}\right)$.

التمرين الرابع III 3 أ

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

إذا كان : $x = 0$. فإن : $f_{n+1}(x) = f_n(x)$

إذا كان : $x > 0$. فإن : $f_{n+1}(x) > f_n(x)$

إذا كان : $x < 0$. فإن : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

التمرين الرابع III 3 ب

x	0	1	$+\infty$
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$	$(\mathcal{C}_n)$ يوجد فوق $(\mathcal{C}_{n+1})$	$(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$ يتقاطعان	$(\mathcal{C}_n)$ يوجد فوق $(\mathcal{C}_{n+1})$

التمرين الرابع III 4

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,\sqrt{e}[$.
إذن f_n تقابل من أي مجال I يوجد ضمن $]0,\sqrt{e}[$ نحو صورته $f_n(I)$.
و منه f_n تقابل من $]1,\sqrt{e}[$ نحو $]-0{,}5 \; ; \; 0{,}2[$.
و بما أن $0\, \epsilon\,]-0{,}5 \; ; \; 0{,}2[$ فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا u_n من المجال $]1,\sqrt{e}[$.

يعني : $\exists!\; u_n\, \epsilon\,]1,\sqrt{e}[\; ; \; f_n(u_n) = 0 \quad (1)$

و بنفس الطريقة لدينا f_n متصلة و تناقصية قطعا على $]\sqrt{e},+\infty[$.
إذن f_n تقابل من أي مجال J يوجد ضمن $]\sqrt{e},+\infty[$ نحو صورته $f_n(J)$.
و منه f_n تقابل من $]\sqrt{e} \; ; n[$ نحو $]\, f_n(n) \; ; \; 0{,}2[$.
و بما أن : $0\, \epsilon\,]\, f_n(n) \; ; \; 0{,}2[$ لأن $\frac{\ln n}{n} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$.
فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا v_n من المجال $]\sqrt{e} \; ; n[$.

يعني : $\exists!\; v_n > \sqrt{e} \; ; \; f_n(v_n) = 0 \quad (2)$.

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين u_n و v_n حيث $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$.

التمرين الرابع III 5

لدينا : $\sqrt{e} > u_n > 1$ إذن حسب (III(3
نستنتج أن $f_{n+1}(u_n) > f_n(u_n)$.
و نعلم أن : $f_{n+1}(u_{n+1}) = f_n(u_n) = 0$.
إذن : $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$.
و بما أن f_{n+1} دالة تزايدية قطعا على $]1,\sqrt{e}[$.
فإن دالتها العكسية تزايدية قطعا كذلك .

و منه : $f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_n)) > f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_{n+1}))$

يعني : $u_n > u_{n+1} \; ; \; (\forall n \ge 4)$.

و بالتالي $(u_n)_{n\ge 4}$ متتالية تناقصية قطعا .

التمرين الرابع III 6 أ

$$\forall\, a \ge 0 \;\; ; \;\; a - \frac{a^2}{2} \le \ln(1+a) \le a \;\; : \;\; \text{لدينا}$$

$$u_n > 1 \;\Rightarrow\; u_n - 1 > 0$$

$$\Rightarrow\; (u_n - 1) - \frac{(u_n-1)^2}{2} \le \ln(u_n) \le (u_n - 1)$$

$$\Rightarrow\; \frac{2(u_n-1) - (u_n-1)^2}{2} \le \ln(u_n) \le (u_n - 1)$$

$$\Rightarrow\; \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \le \ln(u_n) \le (u_n - 1) \quad (*)$$

التمرين الرابع III 6 ب

$$f_n(u_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{n\ln(u_n)}{(u_n)^2} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \ln(u_n) = \frac{(u_n)^2}{2n}$$

$$(*) \;\Rightarrow\; \ln(u_n) \le u_n - 1 \;\Rightarrow\; \frac{(u_n)^2}{2n} \le u_n - 1 \quad (7)$$

$$(*) \;\Rightarrow\; \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \le \ln(u_n)$$

$$\Rightarrow\; \frac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \le \frac{(u_n)^2}{2n}$$

$$\Rightarrow\; (u_n - 1) \le \frac{2(u_n)^2}{2n(3-u_n)}$$

$$\Rightarrow\; (u_n - 1) \le \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} \quad (8)$$

$$(7)\;\; et \;\; (8) \;\Rightarrow\; \frac{(u_n)^2}{2n} \le (u_n - 1) \le \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} \quad (9)$$

التمرين الرابع III 6 ج

$$u_n < \sqrt{e} \;\Rightarrow\; \frac{(u_n)^2}{2n} \le \frac{e}{2n} \quad (10)$$

$$u_n < \sqrt{e} \;\Rightarrow\; 3 - u_n > 3 - \sqrt{e}$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{3-\sqrt{e}} < 1$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{3-u_n} < 1 \quad (11)$$

$$(10) \times (11) \;\Rightarrow\; \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} < \frac{e}{n} \quad (12)$$

(9) et (10) et (12)

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2n} \le \frac{(u_n)^2}{2n} \le (u_n - 1) \le \frac{(u_n)^2}{n(3-u_n)} \le \frac{e}{n}$$

$$\Rightarrow\; (\forall\, n \ge 4) \;\; ; \;\; \frac{1}{2n} \le u_n - 1 \le \frac{e}{n}$$

التمرين الرابع III 6 د

$$we\ have \;:\; \underbrace{\left(\frac{1}{2n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \le u_n - 1 \le \underbrace{\left(\frac{e}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}$$

$$Therefor \;:\; \lim_{n\infty}(u_n - 1) = 0$$

$$which\ means \;:\; \lim_{n\infty}(u_n) = 1$$

التمرين الرابع III 7 أ

$$n \ge 4 \;\Rightarrow\; \frac{5n}{6} e^{\frac{-5}{3}} \ge \frac{20}{6} e^{\frac{-5}{3}} \approx 0{,}63 > 0{,}5$$

$$\Rightarrow\; \frac{5n}{6} e^{\frac{-5}{3}} \ge 0{,}5$$

$$\Rightarrow\; \frac{5n}{6} e^{\frac{-5}{3}} - \frac{1}{2} \ge 0$$

$$\Rightarrow\; f_n\left(e^{\frac{5}{6}}\right) \ge f_n(v_n)$$

$$\Rightarrow\; e^{\frac{5}{6}} \le v_n \;\; ; \;\; car\;\; f_n \;\; est \;\; \searrow \;\; sur \;\; \left]\sqrt{e}, +\infty\right[$$

التمرين الرابع III 7 ب

$$f_n(v_n) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{n\ln(v_n)}{(v_n)^2} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \ln(v_n) = \frac{(v_n)^2}{2n} \quad (*)$$

$$v_n > e^{\frac{5}{6}} \;\Rightarrow\; \ln(v_n) > \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow\; \frac{(v_n)^2}{2n} > \frac{5}{6} \;\; ; \;\; d'après(*)$$

$$\Rightarrow\; (v_n)^2 > \frac{10n}{6}$$

$$\Rightarrow\; v_n > \sqrt{\frac{10n}{6}}$$

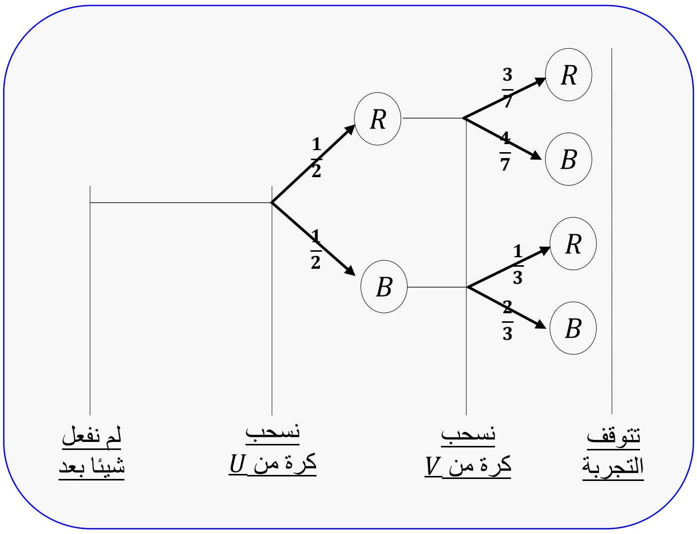
$$\Rightarrow\; v_n > \underbrace{\left(\sqrt{\frac{10n}{6}}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} +\infty}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = +\infty}$$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2003

التمرين الأول 1

نحول معطيات التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :



من خلال هذه الشجرة لدينا : $p(R_1) = p(B_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

التمرين الأول 2

$$p_{B_1}(B_2) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$p_{R_1}(B_2) = \frac{p(R_1 \cap B_2)}{p(R_1)} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{7}$$

التمرين الأول 3

$$\begin{aligned} p(B_2) &= p(R_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap B_2) \\ &= p(R_1) \times p_{R_1}(B_2) + p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{21} \end{aligned}$$

التمرين الأول 4

الطريقة الأولى : استعمال تقنية الحدث المؤكد .

$$p(B_2) + p(R_2) = 1 \iff p(R_2) = 1 - p(B_2) \iff p(R_2) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21}$$

الطريقة الثانية : استعمال الشجرة .

$$\begin{aligned} p(R_2) &= p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap R_2) \\ &= p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) + p(B_1) \times p_{B_1}(R_2) \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{21} \end{aligned}$$

التمرين الثاني 1 أ

It's an easy calculus, just do it

التمرين الثاني 1 ب

$$\Delta' = p^2 - 16 = (3\cos\theta + 5i\sin\theta)^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z_1 = p + (3\cos\theta + 5i\sin\theta) = 2\,e^{-i\theta} \\ z_2 = p - (3\cos\theta + 5i\sin\theta) = 8\,e^{i\theta} \end{cases}$$

التمرين الثاني 2 أ

ليكن θ عنصرا من $[0,2\pi[$. $aff(M_1) = 2\,e^{-i\theta} = x + iy$

$$\begin{aligned} &\iff 2\cos(-\theta) + 2i\sin(-\theta) = x + iy \\ &\iff \begin{cases} 2\cos\theta = x \\ -2\sin\theta = y \end{cases} \\ &\Longrightarrow x^2 + y^2 = (2\cos\theta)^2 + (-2\sin\theta)^2 \\ &\Longrightarrow x^2 + y^2 = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &\Longrightarrow x^2 + y^2 = 4 \\ &\Longrightarrow x^2 + y^2 = 2^2 \\ &\Longrightarrow M_1(x,y) \in \mathcal{C}(O\,;2) \end{aligned}$$

التمرين الثاني 2 ب

P منتصف $[M_1M_2]$ $\iff aff(P) = \dfrac{aff(M_1) + aff(M_2)}{2}$

$$\begin{aligned} &\iff aff(P) = \frac{2\,e^{-i\theta} + 8\,e^{i\theta}}{2} \\ &\iff aff(P) = 5\cos\theta + 3i\sin\theta \\ &\iff aff(P) = p = x + iy \quad ; \begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 3\sin\theta \end{cases} \\ &\Longrightarrow p^2 - (3\cos\theta + 5i\sin\theta)^2 = 16 \\ &\Longrightarrow (x+iy)^2 - \left(\frac{3x}{5} + \frac{5i}{3}y\right)^2 = 16 \\ &\Longrightarrow \frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{9}y^2 = 16 \\ &\Longrightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \end{aligned}$$

عندما يتغير العدد θ في المجال $[0,2\pi[$ فإن النقطة P تتغير على الإهليلج (Γ) الذي مركزه O و رؤوسه $A(5,0)$ و $A'(-5,0)$ و $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$. و بؤرتاه $F(4,0)$ و $F'(-4,0)$.

التمرين الثاني 3 أ

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{C}\backslash\{4\}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{b+4}{b-4}\right) = -\left(\frac{a+4}{a-4}\right) &\iff (b+4)(4-a) = (b-4)(a+4) \\ &\iff 2\,ab = 32 \\ &\iff ab = 16 \end{aligned}$$

التمرين الثاني 3 ب

لدينا $z_1 = 2\,e^{-i\theta} \neq 4$ و $z_2 = 8\,e^{i\theta} \neq 4$.

إذن : $z_1z_2 = 16\,e^{i\theta}\,e^{-i\theta} = 16$.

و منه حسب 3) أ) : $\left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right)$

التمرين الثاني 3 ج

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_2+4}{z_2-4}\right) = -\left(\frac{z_1+4}{z_1-4}\right) &\iff \left(\frac{4-z_1}{-4-z_1}\right) = -\left(\frac{4-z_2}{-4-z_2}\right) \\ &\iff \left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) = -\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right) \\ &\Longrightarrow \arg\left(\frac{z_F - z_1}{z_{F'} - z_1}\right) \equiv \pi + \arg\left(\frac{z_F - z_2}{z_{F'} - z_2}\right) \; [2\pi] \\ &\Longrightarrow \left(\overline{\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1F'}}\right) \equiv \pi + \left(\overline{\overrightarrow{M_2F}, \overrightarrow{M_2F'}}\right) \; [2\pi] \end{aligned}$$

التمرين الثاني 4 أ

لدينا : $P(5\cos\theta \;;\; 3\sin\theta)$.

إذن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي :

$$(T) \;:\; \frac{5x\cos\theta}{5^2} + \frac{3y\sin\theta}{3^2} = 1$$

$$(T) \;:\; 3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$$

التمرين الثاني 4 ب

لدينا : $(T) \;:\; 3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$

إذن : $(T) \;:\; y = \left(\frac{-3\cos\theta}{5\sin\theta}\right)x + \left(\frac{3}{\sin\theta}\right)$

إذن ميل المستقيم (T) هو $\left(\frac{-3\cos\theta}{5\sin\theta}\right)$. (1)

لنحسب الآن ميل المستقيم m (M_1M_2) .

لدينا : $M_1\begin{pmatrix}2\cos\theta\\-2\sin\theta\end{pmatrix}$ و $M_2\begin{pmatrix}8\cos\theta\\8\sin\theta\end{pmatrix}$.

إذن : $m = \frac{8\sin\theta - (-2\sin\theta)}{8\cos\theta - 2\cos\theta} = \frac{5\sin\theta}{3\cos\theta}$

إذن ميل المستقيم (M_1M_2) هو $\left(\frac{5\sin\theta}{3\cos\theta}\right)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن (T) و (M_1M_2) متعامدان .

لأن جداء ميليهما يساوي (-1) .

يعني : $\left(\frac{-3\cos\theta}{5\sin\theta}\right)\times\left(\frac{5\sin\theta}{3\cos\theta}\right) = -1$

التمرين الثالث 1

نضع : $A = \begin{pmatrix}3 & 2\sqrt{2}\\2\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$.

نلاحظ أن : $3^2 - 2\times 2^2 = 1$

إذن : $A = M(3,2) \in E$.

التمرين الثالث 2 أ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M(a,b)\times M(c,d) &= \begin{pmatrix}a & b\sqrt{2}\\ b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c & d\sqrt{2}\\ d\sqrt{2} & c\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}ac+2bd & (bc+ad)\sqrt{2}\\ (bc+ad)\sqrt{2} & ac+2bd\end{pmatrix}\\ &= M\big((ac+2bd)\;;\;(ad+bc)\big) \quad (*)\end{aligned}$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}(ac+2bd) - 2(bc+ad)^2 &= (ac)^2 + 4(bd)^2 - 2(bc)^2 - 2(ad)^2\\ &= c^2\underbrace{(a^2-2b^2)}_{=1} + 2d^2\underbrace{(2b^2-a^2)}_{=1}\\ &= c^2 + 2d^2 = 1\end{aligned}$$

إذن : $M(ac+2bd \;;\; bc+ad) \in E$.

يعني : $\forall\, M(a,b), M(c,d) \in E \;;\; M(a,b)\times M(c,d) \in E$.

و بالتالي E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

و لدينا حسب النتيجة $(*)$:

$$\begin{aligned}M(a,b)\times M(c,d) &= M(ac+2bd \;;\; ad+bc)\\ &= M(ca+2db \;;\; cb+da)\\ &= M(c,d)\times M(a,b)\end{aligned}$$

إذن القانون $\times$ تبادلي في E .

التمرين الثالث 2 ب

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E .

$$\begin{aligned}\big(M(a,b)\big)^{-1} &= \frac{1}{det\big(M(a,b)\big)}\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{a^2-2b^2}\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{1}\begin{pmatrix}a & -b\sqrt{2}\\ -b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}\\ &= M(a\,,-b) \in E\end{aligned}$$

و بالتالي مقلوب كل مصفوفة $M(a,b)$ هو المصفوفة $M(a\,,-b)$.

أو بتعبير آخر : $\big(M(a,b)\big)^{-1} = M(a\,,-b)$

التمرين الثالث 2 ج

من خلال الأسئلة السابقة حصلنا على أن $\times$ قانون تركيب داخلي في المجموعة E لأن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

و بما أن $\times$ تجميعي في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. فإن $\times$ تجميعي كذلك في E

و بما أن المصفوفة $I = M(1,0)$ هي العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

فإن $I = M(1,0)$ هي العنصر المحايد لـ $\times$ في E .

و ذلك لأن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون دائما وحيدا .

و توصلنا كذلك إلى أن كل مصفوفة $M(a,b)$ لها مماثلة في E

و هي المصفوفة $M(a\,,-b)$.

إذن نستنتج من هذه الأشياء أن $(E,\times)$ زمرة

و نضيف على أن $\times$ تبادلي في E .

و بالتالي $(E,\times)$ زمرة تبادلية .

التمرين الثالث 3 أ

ليكن X عنصر من G .

إذن يوجد m من $\mathbb{N}$ حيث $X = A^m$.

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) \;:\; A^n \in E$.

و لنبرهن على صحة هذه العبارة بالترجع .

من أجل $n = 0$ لدينا $A^0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = M(1,0) \in E$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (P_n) صحيحة .

إذن $A^n \in E$ و $A \in E$.

و بما أن $\times$ قانون تركيب داخلي في E .

فإن : $A^n \times A \in E$ يعني : $A^{n+1} \in E$.

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

لقد حصلنا على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases}(P_0) \;\; est \;\; vraie\\ (P_n) \implies (P_{n+1}) \;;\; \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n) \;\; est \;\; toujours \;\; vraie$.

يعني : $A^n \in E \;;\; (\forall n\in\mathbb{N})$.

من أجل المصفوفة $X = A^m$ نجد $X = A^m \in E$.

و بالتالي نحصل على استلزام ثمين و هو : $X \in E \implies X \in G$

و من هذا الاستلزام نستنتج أن : $G \subseteq E$.

التمرين الثالث 3 ب

لكي نبين أن : $H = \{\, B^n \;;\; n \in \mathbb{N} \,\}$

يكفي أن نبين : $(A^n)^{-1} = B^n \;;\; (\forall n\in\mathbb{N})$

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) \;:\; (A^n)^{-1} = B^n$.

من أجل $n = 0$ لدينا : $(A^0)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = I = B^0$

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن $(A^n)^{-1} = B^n$.

لدينا : $(A^{n+1})^{-1} = (A^n \times A)^{-1} = A^{-1} \times (A^n)^{-1}$
$= B \times B^n = B^n \times B = B^{n+1}$

إذن : $(A^{n+1})^{-1} = B^{n+1}$. أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

نحصل إذن على الوضعية التالية : $\begin{cases} (P_0) \ \ est \ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : (P_n) $est \ toujours \ vraie$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ (A^n)^{-1} = B^n$

و بالتالي : $H = \{ B^n \ ; \ n \in \mathbb{N} \}$.

التمرين الثالث | 3 | ج

في البداية يجب أن نبين الخاصية التالية :

$$(\sharp) \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ A^m \times B^n \ \in \ G \cup H$$

ليكن m و n عددان صحيحان طبيعيان. و نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $m \geq n$.

لدينا : $A^m \times B^n = A^{m-n} \times (A \times B)^n = A^{m-n} \times I^n = A^{m-n} \in G \subset G \cup H$

إذن : $\forall \ (m \geq n) \ ; \ A^m \times B^n \ \in \ G \cup H$

الحالة الثانية : إذا كان $m \leq n$.

لدينا : $A^m \times B^n = (A \times B)^m \times B^{n-m} = I^n \times B^{n-m} = B^{n-m} \ \in \ H \ \subset G \cup H$

إذن : $\forall \ (m \leq n) \ ; \ A^m \times B^n \ \in \ G \cup H$.

و بالتالي : $(\sharp) \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ A^m \times B^n \ \in \ G \cup H$

نستغل إذن هذه الخاصية الثمينة للإجابة على السؤال ج) :

لدينا $G \cup H$ جزء غير فارغ من المجموعة E .

لأن G و H جزءان غير فارغان من E .

لتكن X و Y مصفوفتين من الاتحاد $G \cup H$ و نفصل بين **أربع حالات** :

الحالة الأولى : إذا كان $X \in G$ و $Y \in G$.

إذن : $\exists \ (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ X = A^n \ \ et \ \ Y = A^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^n \times (A^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^n \times B^m \in G \cup H$.

إذن : $\forall \ (X,Y) \in G^2 \ ; \ X \times Y^{-1} \in G \cup H$

الحالة الثانية : إذا كان $X \in H$ و $Y \in H$.

إذن : $\exists \ (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ X = B^n \ \ et \ \ Y = B^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = B^n \times (B^m)^{-1}$

يعني : $X \times Y^{-1} = B^n \times A^m \in G \cup H$

إذن : $\forall \ (X,Y) \in H^2 \ ; \ X \times Y^{-1} \in G \cup H$

الحالة الثالثة : إذا كان $X \in G$ و $Y \in H$.

إذن : $\exists \ (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ X = A^n \ \ et \ \ Y = B^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = A^n \times (B^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = A^n \times A^m = A^{m+n} \in G \subset G \cup H$

إذن : $(\forall X \in G), (\forall Y \in H) \ ; \ X \times Y^{-1} \in G \cup H$

الحالة الرابعة : إذا كان $X \in H$ و $Y \in G$

إذن : $\exists \ (m,n) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ X = B^n \ \ et \ \ Y = A^m$

و منه : $X \times Y^{-1} = B^n \times (A^m)^{-1}$

أي : $X \times Y^{-1} = B^n \times B^m = B^{m+n} \in H \subset G \cup H$

إذن : $(\forall X \in H), (\forall Y \in G) \ ; \ X \times Y^{-1} \in G \cup H$

خلاصة القول : نستنتج من جميع هذه الحالات الأربع أن :

$$\forall \ (X,Y) \in (G \cup H)^2 \quad ; \quad X \times Y^{-1} \ \in \ G \cup H$$

إذن حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية .

نستنتج أن $(G \cup H, \times)$ زمرة جزئية من الزمرة الأم $(E, \times)$.

التمرين الرابع | I | 1 | أ

لدينا : $g_n(x) = x + e^{-nx}$.

إذن g_n دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا : $g_n'(x) = 1 - n\, e^{-nx} = e^{-nx}(e^{nx} - n)$.

بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ e^{-nx} > 0$.

فإن إشارة $g_n'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(e^{nx} - n)$.

إذا كان : $x = \frac{\ln n}{n}$. فإن : $g_n'(x) = 0$.

إذا كان : $x > \frac{\ln n}{n}$. فإن : $g_n'(x) > 0$.

إذا كان : $x < \frac{\ln n}{n}$. فإن : $g_n'(x) < 0$.

و أضيف النهايتين عند محدات مجموعة تعريف الدالة g_n .

$$\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + e^{-nx}) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g_n(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + e^{-nx}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{nx}{n}\left(1 + \frac{n}{nx\, e^{nx}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\lim_{\substack{t \to -\infty \\ t = nx}} t\left(1 + \frac{n}{te^t}\right)\right) = \frac{1}{n}\Big((-\infty)\big(1 + (-\infty)\big)\Big) = +\infty$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{\ln n}{n}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$	
g_n	$+\infty$	$\searrow$	$g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين الرابع | I | 1 | ب

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g_n .

g_n دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بأكمله.

و الدالة g_n تناقصية على المجال $\left]-\infty, \frac{\ln n}{n}\right[$.

و الدالة g_n تزايدية على المجال $\left]\frac{\ln n}{n}, +\infty\right[$.

إذن g_n تقبل مطرافا عند $u_n = \frac{\ln n}{n}$ و هذا المطراف عبارة عن قيمة دنوية معرفة بما يلي : $g_n(u_n) = g_n\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \frac{1 + \ln n}{n}$

التمرين الرابع | I | 2 | أ

$$\lim_{x \to -\infty} g_n(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + e^{-nx}) = \lim_{x \to -\infty} x\left(1 + \frac{n}{nx\, e^{nx}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\lim_{\substack{t \to -\infty \\ t = nx}} t\left(1 + \frac{n}{te^t}\right)\right) = \frac{1}{n}\Big((-\infty)\big(1 + (-\infty)\big)\Big) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + e^{-nx}) = +\infty + 0 = +\infty$$

التمرين الرابع — I 2 ب

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{n}{nx\, e^{nx}}\right) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (g_n(x) - 1x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-nx} = 0$$

إذن نحن أمام الوضعية التالية :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g_n(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (g_n(x) - 1x) = 0 \end{cases}$$

يعني أن المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$ بجوار $(+\infty)$.

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{n}{nx\, e^{nx}}\right) = 1 + (-\infty) = -\infty$$

إذن نحن أمام الوضعية التالية :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g_n(x)}{x} = -\infty \end{cases}$$

إذن $(\mathcal{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

التمرين الرابع — I 3 أ

لدراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ ندرس إشارة الفرق $g_1(x) - g_2(x)$.

لدينا :
$$\begin{aligned} g_1(x) - g_2(x) &= (x + e^{-x}) - (x + e^{-2x}) \\ &= (e^{-x} - e^{-2x}) \\ &= e^{-x}(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

بما أن : $e^{-x} > 0 \;\; : \;\; (\forall x \epsilon \mathbb{R})$

فإن إشارة الفرق $g_1(x) - g_2(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(1 - e^{-x})$ و نفصل هنا بين ثلاث حالات ممكنة :

الحالة الأولى : إذا كان $x = 0$.

فإن $(1 - e^{-x}) = 0$ و منه $g_1(x) = g_2(x)$.

إذن $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$ يتقاطعان في النقطة $(0,1)$.

الحالة الثانية : إذا كان $x > 0$.

فإن $(1 - e^{-x}) > 0$ و منه $g_1(x) > g_2(x)$.

إذن المنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يوجد فوق المنحنى $(\mathcal{C}_2)$.

الحالة الثالثة : إذا كان $x < 0$.

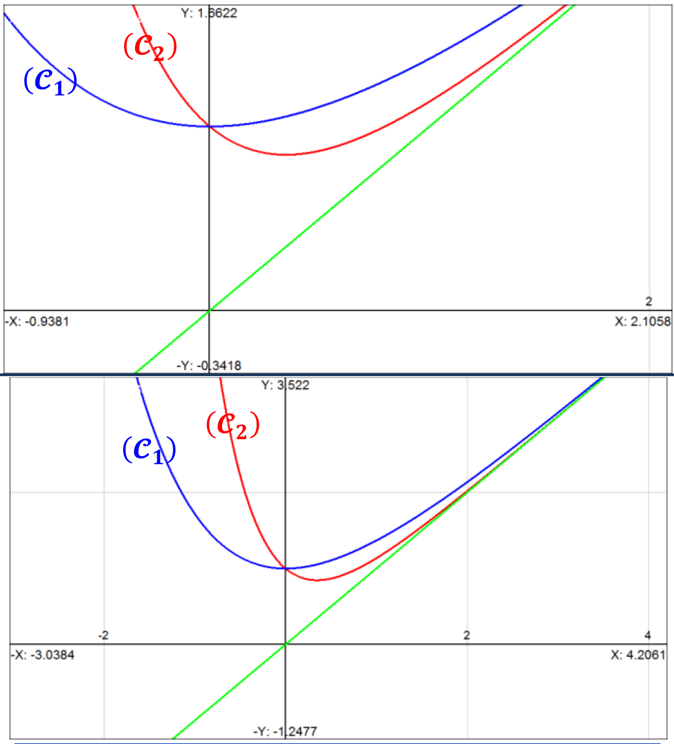
فإن $(1 - e^{-x}) < 0$ و منه $g_1(x) < g_2(x)$.

إذن المنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يوجد أسفل المنحنى $(\mathcal{C}_2)$.

خلاصة :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_1(x) - g_2(x)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$	$(\mathcal{C}_2)$ يوجد فوق $(\mathcal{C}_1)$	$(0,1)$ نقطةتقاطع	$(\mathcal{C}_1)$ يوجد فوق $(\mathcal{C}_2)$

التمرين الرابع — I 3 ب



التمرين الرابع — I 4 أ

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x \underbrace{t}_{u(t)} \cdot \underbrace{e^{-2t}}_{v'(t)} \, dt \\ &= [u(t)\cdot v(t)]_0^x - \int_0^x u'(t)\cdot v(t)\, dt \\ &= \left[t \cdot \left(\frac{e^{-2t}}{-2}\right)\right]_0^x - \int_0^x 1 \cdot \left(\frac{e^{-2t}}{-2}\right) dt \\ &= \left[\frac{-t\, e^{-2t}}{2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_0^x \\ &= \frac{-x\, e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{-e^{-2x}}{4}(2x + 1 - e^{2x}) \end{aligned}$$

إذن : $I(x) = \dfrac{-e^{-2x}}{4}(2x + 1 - e^{2x})$

التمرين الرابع — I 4 ب

لدينا : $\forall\, x \,\epsilon\, [0, \ln 2] \;;\; h_2(x) = x + e^{-2x}$

إذن h_2 متصلة على المجال $[0 , \ln 2]$.

و كذلك : $\forall\, x \,\epsilon\, [0, \ln 2] \;;\; h_2(x) = x + e^{-2x}$

إذن حجم مجسم الدوران الذي يُولده دوران التمثيل المبياني لـ h_2 حول محور الأفاصيل هو :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\ln 2} (h_2(x))^2\, dx = \pi \int_0^{\ln 2} (x + e^{-2x})^2\, dx \\ &= \pi \int_0^{\ln 2} (x^2 + e^{-4x} + 2x\, e^{-2x})\, dx \\ &= \pi \left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ln 2} + \left[\frac{-e^{-4x}}{4}\right]_0^{\ln 2} + 2 \times I(\ln 2) \right) \\ &= \pi \left(\frac{(\ln 2)^3}{3} - \frac{\ln 2}{4} + \frac{39}{64} \right) \end{aligned}$$

التمرين الرابع | I | 5 |

حصلنا من خلال السؤال 1) ب) على ما يلي :

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{\ln n}{n} \\ v_n = g_n(u_n) = \left(\dfrac{1+\ln n}{n}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)=0 \\ \lim\limits_{n\infty}(v_n)=\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1+\ln n}{n}\right)=\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac1n+\dfrac{\ln n}{n}\right)=0\end{cases}$$

و بالتالي $(u_n)_{n\in\mathbb N}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb N}$ متتاليتان متقاربتان و تؤولان معا إلى الصفر .

التمرين الرابع | II | 1 |

لدينا : $f_n(x) = x + e^{nx}$.

إذن f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb R$ بأكمله و ذلك لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb R$. و لدينا :

$$f_n'(x) = (x+e^{nx})' = 1 + n\,e^{nx} > 0$$

و هذا يعني أن الدالة f_n تزايدية قطعا على $\mathbb R$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين الرابع | II | 2 |

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb R$.

إذن f_n تقابل من $\mathbb R$ نحو $\mathbb R$.

و بما أن 0 عدد حقيقي فإنه يمتلك سابقا واحدا α_n في $\mathbb R$ بالتقابل f_n .

أو بتعبير آخر : $(\exists!\ \alpha_n \in \mathbb R)\ ;\ f_n(\alpha_n)=0$.

أو بتعبير أخير نقول أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb R$ و هو α_n .

التمرين الرابع | II | 3 | أ

بما أن f_n تقابل من $\mathbb R$ نحو $\mathbb R$.

فإن f_n تقابل من أي مجال I يوجد ضمن $\mathbb R$ نحو صورته $f_n(I)$.

نختار المجال $\left]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right[$ و نختار $n=1$.

إذن f_1 تقابل من $\left]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right[$ نحو $\left]\frac{-1}{2}-\ln 2 ; \frac{-1}{2}+e^{-\frac12}\right[$.

و باستعمال القيم المقربة للتبسيط نقول :

f_1 تقابل من $\left]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right[$ نحو $]-0,2\ ;\ 0,1[$.

و بما أن $0\in]-0,2\ ;\ 0,1[$ فإن 0 يمتلك سابقا واحدا α_1 من المجال $\left]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right[$.

يعني : $\exists!\ \alpha_1 \in \left]-\ln 2 ; \frac{-1}{2}\right[\ ;\ f_1(\alpha_1)=0$

التمرين الرابع | II | 3 | ب

لدينا : $f_1(\alpha_1)=0$. إذن : $(\alpha_1 + e^{\alpha_1}) = 0$.

و منه : $-\alpha_1 = e^{\alpha_1}$. و نَفصِلُ بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $(x-\alpha_1)>0$.

فإن : $x>\alpha_1$. و منه : $e^x > e^{\alpha_1}$

يعني : $e^x > -\alpha_1$. إذن : $(e^x+\alpha_1)>0$.

الحالة الثانية : إذا كان $(x-\alpha_1)<0$.

فإن : $x<\alpha_1$. و منه : $e^x<e^{\alpha_1}$

يعني : $e^x<-\alpha_1$. إذن : $(e^x+\alpha_1)<0$.

نستنتج إذن من هاتين الحالتين أن الكميتين $(x-\alpha_1)$ و $(e^x+\alpha_1)$ لهما نفس الإشارة دائما .

التمرين الرابع | II | 4 | أ

$$\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt e}x \Rightarrow \varphi'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt e}$$

$$x\le\frac{-1}{2}\ \Big|\ \begin{aligned} &\Rightarrow e^x \le e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt e} \\ &\Rightarrow e^x - \frac{1}{\sqrt e}\le 0 \\ &\Rightarrow \forall x\in\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right]\ ;\ \varphi'(x)\le0 \\ &\Rightarrow \varphi\ est\ \searrow\ sur\ \left]-\infty,\frac{-1}{2}\right]\end{aligned}$$

التمرين الرابع | II | 4 | ب

نعلم أن الدالة Exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb R$.

إذن نستطيع تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن $\mathbb R$.

من أجل ذلك ، نختار المجال الذي طرفاه α_1 و x حيث $x<\frac{-1}{2}$

إذن يوجد c محصور بين α_1 و x . و يُحقق :

$$\frac{e^x-e^{\alpha_1}}{x-\alpha_1}=e^c \Leftrightarrow \frac{e^x+\alpha_1}{x-\alpha_1}=e^c$$

و بما أن $(e^x+\alpha_1)$ و $(x-\alpha_1)$ لهما نفس الإشارة فإن الخارج $\frac{e^x+\alpha_1}{x-\alpha_1}$ موجب دائما .

إذن : $\left|\frac{e^x+\alpha_1}{x-\alpha_1}\right| = |e^c| = e^c$

و منه : $|e^x+\alpha_1| = e^c|x-\alpha_1|\quad(1)$

من جهة أخرى لدينا : $c\in]\alpha_1\,;x[$

يعني : $c<x<\frac{-1}{2}$. و منه : $e^c < \frac{1}{\sqrt e}$.

نضرب طرفي آخر متفاوتة في العدد الموجب $|x-\alpha_1|$

نحصل على ما يلي : $e^c|x-\alpha_1| \le \frac{1}{\sqrt e}|x-\alpha_1|\quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{\forall x\in\left]-\infty,\frac{-1}{2}\right[\ ;\ |e^x+\alpha_1|\le\frac{1}{\sqrt e}|x-\alpha_1|}$$

التمرين الرابع | II | 5 | أ

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ \frac{-1}{\sqrt e}\le\beta_n\le\frac{-1}{2}$

من أجل $n=0$ لدينا : $\frac{-1}{\sqrt e}\le\beta_0=\frac{-1}{2}\le\frac{-1}{2}$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن : $\frac{-1}{\sqrt e}\le\beta_n\le\frac{-1}{2}$

إذن : $e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \le e^{\beta_n} \le e^{\frac{-1}{2}}$. و منه : $-e^{\frac{-1}{2}} \le -e^{\beta_n} \le -e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}}$

و منه : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \le -e^{\beta_n} \le -e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}}$

بالاستعانة بالآلة الحاسبة نجد : $-e^{\frac{-1}{\sqrt{e}}} \approx -0{,}54 < \frac{-1}{2}$

إذن : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \le -e^{\beta_n} \le \frac{-1}{2}$ ، أي : $\frac{-1}{\sqrt{e}} \le \beta_{n+1} \le \frac{-1}{2}$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$.

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{-1}{\sqrt{e}} \le \beta_n \le \frac{-1}{2}$

ما يهمنا في هذا التأطير هو الشق $\beta_n \le \frac{-1}{2}$ $(*)$.

و ذلك من أجل تطبيق نتيجة السؤال ب) .

لدينا حسب نتيجة السؤال ب) :

$$\left(\forall x \le \frac{-1}{2}\right)\ ;\ |e^x + \alpha_1| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|x - \alpha_1|$$

إذن من أجل $x = \beta_n$ المنتمي إلى المجال $\left]-\infty, \frac{-1}{2}\right]$ حسب $(*)$

نستنتج ما يلي :

$$x = \beta_n \Rightarrow \left|e^{\beta_n} + \alpha_1\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Rightarrow \left|-e^{\beta_n} - \alpha_1\right| = \left|e^{\beta_n} + \alpha_1\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|\beta_n - \alpha_1|$$

$$\Rightarrow |\beta_{n+1} - \alpha_1| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|\beta_n - \alpha_1| \quad (\blacksquare)$$

$$\Rightarrow |\beta_n - \alpha_1| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|\beta_{n-1} - \alpha_1|$$

$$\le \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 |\beta_{n-2} - \alpha_1|$$

$$\le \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^3 |\beta_{n-3} - \alpha_1|$$

$$\le \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n |\beta_{n-n} - \alpha_1|$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |\beta_n - \alpha_1| \le \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{-1}{2} - \alpha_1\right|$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |\beta_n - \alpha_1| \le \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right|$

التمرين الرابع II 5 ب

لدينا : $\alpha_1 \in \left]-\ln 2\ ;\ \frac{-1}{2}\right[\Rightarrow -\ln 2 < \alpha_1 < \frac{-1}{2}$

$$\Rightarrow -0{,}6 < \alpha_1 < -0{,}5$$

$$\Rightarrow -0{,}1 < \left(\frac{1}{2} + \alpha_1\right) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{e}} < \left(\frac{1}{2} + \alpha_1\right) < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right| < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left|\frac{1}{2} + \alpha_1\right| < \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$\Rightarrow |\beta_n - \alpha_1| < \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الموجب $\frac{1}{\sqrt{e}}$

و هو عدد أصغر من 1 . إذن : $\boxed{\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1} = 0}$

و بذلك نحصل على الوضعية التالية : $|\beta_n - \alpha_1| < \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$

أو بتعبير آخر نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow{n\infty} 0} \le (\beta_n - \alpha_1) < \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$$

و حتي الوضعية التالية صحيحة كذلك :

$$\underbrace{0}_{\xrightarrow{n\infty} 0} \le |\beta_n - \alpha_1| < \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$$

من أي وضعية من الوضعيات المتكافئة الثلاثة نستنتج حسب مصاديق تقارب المتتاليات أن : $\lim_{n\infty}(\beta_n - \alpha_1) = 0$

و بالتالي : $\lim_{n\infty}(\beta_n) = \alpha_1$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2004

التمرين الأول 1 أ

$$\begin{aligned} n \text{ عدد فردي } &\Leftrightarrow (\exists k\in\mathbb{N})\ ;\ n = 2k+1 \\ &\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{N})\ ;\ n^2 = (2k+1)^2 \\ &\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{N})\ ;\ n^2 = 4k^2+4k+1 \\ &\Rightarrow (\exists k\in\mathbb{N})\ ;\ n^2 = 4k(k+1)+1 \end{aligned}$$

k و $(k+1)$ عددان صحيحان طبيعيان و متتابعان . إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي . و هذا يعني أن الجداء $k(k+1)$ عدد زوجي دائما .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ n^2 = 4(2m)+1 \\ &\Rightarrow (\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ n^2 = 8m+1 \\ &\Rightarrow (\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ n^2 - 1 = 8m \\ &\Rightarrow (\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ n^2 \equiv 1\ [8] \end{aligned}$$

التمرين الأول 1 ب

ليكن n عددا زوجيا . إذن : $(\exists k\in\mathbb{N})\ ;\ n = 2k$.
العدد الصحيح الطبيعي k يُمكن أن يكون فرديا أو زوجيا .
الحالة الأولى : إذا كان k عددا زوجيا .
إذن يوجد p من $\mathbb{N}$ بحيث $k = 2p$.
و منه $n = 4p$ يعني $n^2 = 16p^2 = 8(2p^2)$.
إذن 8 قاسم للعدد n^2 . أي $n^2 \equiv 0\ [8]$.
الحالة الثانية : إذا كان k عددا فرديا.
إذن يوجد q من $\mathbb{N}$ بحيث $k = 2q+1$.
و منه $n = 4q+2$ يعني $(n^2-4) = 8(2q^2+2q)$
إذن 8 قاسم للعدد (n^2-4) . أي $n^2 \equiv 4\ [8]$.
الخلاصة : إذا كان n عددا زوجيا فإن $n^2 \equiv 0\ [8]$ أو $n^2 \equiv 4\ [8]$.

التمرين الأول 2 أ

أذكركم في البداية بأن مجموع ثلاثة أعداد فردية هو عدد فردي و أن مُربع أي عدد فردي يكون دائما عددا فرديا.
نفترض أن العدد $(a^2+b^2+c^2)$ مربع كامل .
إذن : $(\exists d\in\mathbb{N})\ ;\ a^2+b^2+c^2 = d^2 \quad (1)$
بما أن a و b و c أعداد فردية ، فإن العدد $(a^2+b^2+c^2)$ فردي
إذن حسب نتيجة السؤال 1) أ) : $\begin{cases} a^2 \equiv 1\ [8] \\ b^2 \equiv 1\ [8] \\ c^2 \equiv 1\ [8] \end{cases}$
عند المرور إلى المجموع نجد : $a^2+b^2+c^2 \equiv 3\ [8] \quad (2)$
لدينا d و d^2 عددان فرديان .
إذن حسب نتيجة السؤال 1) أ) نكتب : $d^2 \equiv 1\ [8] \quad (3)$
من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $3 \equiv 1\ [8]$
يعني أن العدد 8 يقسم العدد 2 . و هذا مستحيل.
إذن ما افترضناه كان خاطئا .
و بالتالي $(a^2+b^2+c^2)$ ليس مربعا كاملا.

التمرين الأول 2 ب

لدينا a و b و c أعداد فردية .
إذن حسب نتيجة السؤال 1) أ) : $\begin{cases} a^2 \equiv 1\ [8] \\ b^2 \equiv 1\ [8] \\ c^2 \equiv 1\ [8] \end{cases}$
و منه نستنتج أن : $(a^2+b^2+c^2) \equiv 3\ [8] \quad (4)$
و بما أن a و b و c أعداد فردية فإن $(a+b+c)$ عدد فردي كذلك.
و منه حسب نتيجة السؤال 1) أ) : $(a+b+c)^2 \equiv 1\ [8] \quad (5)$
من (4) و (5) : $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv 1-3\ [8]$
يعني : $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv -2\ [8]$
و نعلم أن : $-2 \equiv 6[8]$
إذن : $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv 6\ [8]$
و منه : $2(ab+ac+bc) \equiv 6\ [8] \quad (*)$
لأن : $(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+ac+bc)$

التمرين الأول 2 ج

نفترض أن العدد $2(ab+ac+bc)$ مربع كامل.
إذن : $(\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ 2(ab+ac+bc) = m^2$
و لدينا $2(ab+ac+bc)$ عدد زوجي.
إذن m و m^2 عددان زوجيان كذلك.
إذن حسب نتيجة 1) ب) نستنتج أن : $m^2 \equiv 0\ [8]$ أو $m^2 \equiv 4\ [8]$
في **الحالة الأولى** : إذا كان $m^2 \equiv 0\ [8]$.
لدينا حسب نتيجة السؤال 2) ب) : $m^2 \equiv 6\ [8]$.
إذن : $6 \equiv 0\ [8]$. و هذا تناقض لأن 8 لا يقسم 6 .
و بالتالي $2(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا .
في **الحالة الثانية** : إذا كان $m^2 \equiv 4\ [8]$.
لدينا حسب نتيجة السؤال 2) ب) : $m^2 \equiv 6\ [8]$.
إذن $6 \equiv 4\ [8]$. و هذا مستحيل لأن 8 لا يقسم العدد 2.
و بالتالي $2(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا.

التمرين الأول 2 د

نفترض أن العدد $(ab+bc+ac)$ مربع كامل.
إذن : $(\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ (ab+bc+ac) = m^2$
و لدينا a و b و c أعداد فردية.
إذن $(ab+bc+ac)$ عدد فردي كذلك.
و منه m و m^2 عددان فرديان كذلك.
و منه حسب نتيجة السؤال 1) أ) نكتب : $m^2 \equiv 1\ [8]$.
أي : $(ab+bc+ac) \equiv 1\ [8]$
و منه : $2(ab+bc+ac) \equiv 2\ [8]$
لكن $2(ab+bc+ac) \equiv 6\ [8]$ و ذلك حسب النتيجة $(*)$.
إذن : $6 \equiv 2\ [8]$
يعني أن العدد 8 يقسم العدد 4 . (تناقض)
إذن ما افترضناه كان خاطئا .
و بالتالي : $(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا.

التمرين الثاني 1 أ

لتكن M_a و M_b مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M_a \times M_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & \frac{a}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{1}{ab}\right) \\ 0 & \frac{1}{ab} \end{pmatrix} = M_{ab} \in E \end{aligned}$$

بما أن M_a و M_b مصفوفتين من E .
فإن : $a \neq 0$ و $b \neq 0$. ومنه : $ab \neq 0$.
و بالتالي : $M_a \times M_b = M_{ab}$

التمرين الثاني 1 ب

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين .

لدينا :
$$\varphi : (\mathbb{R}^*,\times) \longrightarrow (E,\times)$$
$$a \longrightarrow \varphi(a) = M_a$$

و لدينا : $\varphi(a\times b) = M_{ab} = M_a \times M_b = \varphi(a)\times\varphi(b)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

و لدينا : $(\forall y\epsilon E)(\exists!\, a\,\epsilon\,\mathbb{R}^*)\ ;\ y = \varphi(a) = M_a$

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

التمرين الثاني 1 ج

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$ ، فإنه نستطيع استنتاج البنية الجبرية للمجموعة $(E,\times)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{R}^*,\times)$. و ذلك عبر التشاكل التقابلي φ .

لدينا $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1 و كل عنصر a يقبل $\frac{1}{a}$ كمماثل .

إذن $(E,\times)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$ و كل مصفوفة M_a تقبل مصفوفة مماثلة و هي المصفوفة $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$.

$$and\ we\ got\ :\ \begin{cases} \varphi(1) = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ \varphi\left(\frac{1}{a}\right) = M_{\frac{1}{a}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a} - a\right) \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{cases}$$

التمرين الثاني 2 أ

لتكن N_a و N_b مصفوفتين من F .

$$\begin{aligned} N_a \times N_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab - b\left(a - \frac{1}{a}\right) & \frac{a}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) - \frac{b}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -ab\sqrt{3} + ab\sqrt{3} & -a\left(b - \frac{1}{b}\right) + ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{b}{a} & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a} - \frac{1}{\frac{b}{a}}\right) \\ 0 & \frac{1}{\frac{b}{a}} \end{pmatrix} = M_{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

إذن : $\forall\,(N_a,N_b)\,\epsilon\,F^2\ ;\ N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$

التمرين الثاني 2 ب

نضع : $G = E \cup F$.

لنبرهن في البداية على الخاصيتين التاليتين :

$$\begin{cases} \forall\,(a,b)\,\epsilon\,(\mathbb{R}^*)^2\ ;\ M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}} \\ \forall\,(a,b)\,\epsilon\,(\mathbb{R}^*)^2\ ;\ N_b \times M_a = N_{ab} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_a \times N_b &= \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b - \frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab - \frac{1}{ab}\right) \\ -ab\sqrt{3} & -ab \end{pmatrix} \\ &= N_{ab} \end{aligned}$$

نحن الآن مُسلحون بأربع خاصيات مهمة و هي :

$$\begin{array}{ll} M_a \times M_b = M_{ab} & (1) \\ N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}} & (2) \\ M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}} & (3) \\ N_b \times M_a = N_{ab} & (4) \end{array}$$

باستعمال هذه الخاصيات الأربع الثمينة نبين بكل بساطة على أن $\times$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $G = E \cup F$. و سوف نستعمل البرهان بفصل الحالات . لتكن X و Y مصفوفتين من G .

الحالة الأولى : إذا كان $X\,\epsilon\,E$ و $Y\,\epsilon\,E$.

إذن حسب الخاصية رقم 1) نكتب : $X \times Y\,\epsilon\,E\ \subset G$

الحالة الثانية : إذا كان $X\,\epsilon\,F$ و $Y\,\epsilon\,F$.

إذن حسب الخاصية رقم 2) نكتب : $X \times Y\,\epsilon\,E\ \subset G$

الحالة الثالثة : إذا كان $X\,\epsilon\,E$ و $Y\,\epsilon\,F$.

إذن حسب الخاصية رقم 3) نكتب : $X \times Y\,\epsilon\,F\ \subset G$

الحالة الرابعة : إذا كان $X\,\epsilon\,F$ و $Y\,\epsilon\,E$.

إذن حسب الخاصية رقم 4) نكتب : $X \times Y\,\epsilon\,F\ \subset G$

الخلاصة : $\forall\,(X,Y)\,\epsilon\,G^2\ ;\ X \times Y\,\epsilon\,G$

إذن $\times$ قانون تركيب داخلي في G .

البحث عن العنصر المحايد لـ $\times$ في المجموعة G .

نعلم أن المصفوفة I هي العنصر المحايد للضرب $\times$ في E . و ذلك حسب نتيجة السؤال 1) ج) .

و نعلم أن العنصر المحايد إذ وُجِد يكون دائما وحيدا . يكفي إذن أن نبين أن :

$(\forall A\epsilon G)\ ;\ A \times M_1 = M_1 \times A = A$

لتكن A مصفوفة من المجموعة $G = E \cup F$ و نَفصِل بين حالتين :

الحالة الأولى : $A\,\epsilon\,E$

إذن : $(\exists!\,a\,\epsilon\,\mathbb{R}^*)\ ;\ A = M_a$

و لدينا حسب الخاصية 1) : $M_1 \times M_a = M_a$ و $M_a \times M_1 = M_a$

إذن : $(\forall A\epsilon E)\ ;\ A \times M_1 = M_1 \times A = A$

الحالة الثانية : $A\,\epsilon\,F$

إذن : $(\exists!\,a\,\epsilon\,\mathbb{R}^*)\ ;\ A = N_a$

و منه حسب الخاصية رقم 4) : $N_a \times M_1 = N_{a\times 1} = N_a$

و نستنتج كذلك حسب الخاصية رقم 3) : $M_1 \times N_a = N_{\frac{a}{1}} = N_a$

إذن : $(\forall A\epsilon F)\ ;\ A \times M_1 = M_1 \times A = A$

الخلاصة : $(\forall A\epsilon G)\ ;\ A \times M_1 = M_1 \times A = A$

و بالتالي : المصفوفة M_1 هي العنصر المحايد للقانون $\times$ في المجموعة G

- دراسة تماثل عناصر المجموعة G بالنسبة للقانون $\times$.

لدينا $(E,\times)$ زمرة تبادلية و مماثل كل عنصر M_a في E هو العنصر $M_{\frac{1}{a}}$ بالقانون $\times$.

تتكون المجموعة G من اتحاد مجموعتين و هما E و F . لنبحث إذن عن مماثلات عناصر F .

لتكن N_a مصفوفة من المجموعة F .

إذن حسب الخاصية رقم 2) : $N_a \times N_a = M_{\frac{a}{a}} = M_1$

إذن كل عنصر N_a من F يتماثل مع نفسه .

و بالتالي جميع عناصر G تمتلك مماثلات من E و من F

أي أن كل عنصر من G يمتلك مماثلا من G بالقانون $\times$.

خلاصة السؤال ب) : المجموعة $(G,\times)$ زمرة لأن $\times$ قانون تركيب داخلي في G و يقبل عنصرا محايدا وحيدا و هو المصفوفة M_1 . و كل مصفوفة من G تقبل مماثلة وحيدة من G بالقانون $\times$.

التمرين الثالث 1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+z+1=0$.

نحسب Δ نجد : $\Delta = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين مترافقين :

$$z_1 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{-2i\pi}{3}} = \bar{j}$$
$$z_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$$

التمرين الثالث 2 أ

$$z = e^{i\theta} \;\Rightarrow\; |z| = 1 \;\Rightarrow\; z\bar{z} = 1$$
$$\Rightarrow\; z(1+z+\bar{z}) = z + z^2 + z\bar{z}$$
$$\Rightarrow\; z(1+z+\bar{z}) = z + z^2 + 1$$

التمرين الثالث 2 ب

لدينا z' مُعرف لأنه إذا كان $\theta \neq \pm\frac{2\pi}{3}$ فإن $z^2+z+1 \neq 0$.

و لدينا حسب السؤال أ) : $(1+z+z^2) = z(1+z+\bar{z})$

$$\Leftrightarrow\; z' = \frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1}{z(1+z+\bar{z})}$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} |z'| = \left|\dfrac{1}{z(1+z+\bar{z})}\right| \\ \arg(z') \equiv \arg\left(\dfrac{1}{z(1+z+\bar{z})}\right)\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} |z'| = \left|\dfrac{1}{z}\right| \cdot \left|\dfrac{1}{1+z+\bar{z}}\right| = 1 \cdot \left(\dfrac{1}{1+2\cos\theta}\right) \\ \arg(z') \equiv \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) + \arg\left(\dfrac{1}{1+z+\bar{z}}\right)\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} |z'| = \left(\dfrac{1}{1+2\cos\theta}\right) \\ \arg(z') \equiv -\arg(z) + 0\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} |z'| = \left(\dfrac{1}{1+2\cos\theta}\right) \\ \arg(z') \equiv -\theta\ \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\; z' = \left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)e^{-i\theta}$$

التمرين الثالث 2 ج

$$z' = x + iy = \left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \dfrac{\cos(-\theta)}{1+2\cos(-\theta)} \\ y = \dfrac{\sin(-\theta)}{1+2\cos(-\theta)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; x^2+y^2 = \frac{\cos^2(-\theta)+\sin^2(-\theta)}{(1+2\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow\; x^2+y^2 = \left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow\; x^2+y^2 = \left(\frac{1+2\cos\theta-2\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow\; x^2+y^2 = \left(1-2\left(\frac{\cos\theta}{1+2\cos\theta}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow\; x^2+y^2 = (1-2x)^2$$

التمرين الثالث 2 د

$$x^2+y^2 = (1-2x)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2 = 1-4x+4x^2$$
$$\Leftrightarrow\; -3x^2+4x+y^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}y^2 = \frac{-1}{3}$$
$$\Leftrightarrow\; \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}y^2 = \frac{-1}{3} + \frac{4}{9}$$
$$\Leftrightarrow\; \boxed{\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1}$$

إذن $M(z')$ تنتمي إلى الهذلول الذي مركزه $C\left(\frac{2}{3},0\right)$ و رأساه هما $S_1(1,0)$ و $S_2\left(\frac{1}{3},0\right)$. و مقارباه هما المستقيمان (Δ) و (Δ') المعرفان بما يلي :

$$\begin{cases} (\Delta)\ :\ y = \sqrt{3}\,x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ (\Delta')\ :\ y = -\sqrt{3}\,x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

التمرين الرابع I 1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=-x}} -\left(\frac{e^u}{u}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{\substack{u\to0^+ \\ u=-x}} -\left(\frac{e^u}{u}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{\substack{u\to0^- \\ u=-x}} -\left(\frac{e^u}{u}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{\substack{u\to-\infty \\ u=-x}} -\left(\frac{e^u}{u}\right) = -0^- = 0$$

التمرين الرابع I 2

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$.

لدينا : $f'(x) = \dfrac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2} = \dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$

بما أن $\dfrac{-e^{-x}}{x^2} < 0$ فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(x+1)$ و نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	0

التمرين الرابع I 3 أ

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C})$

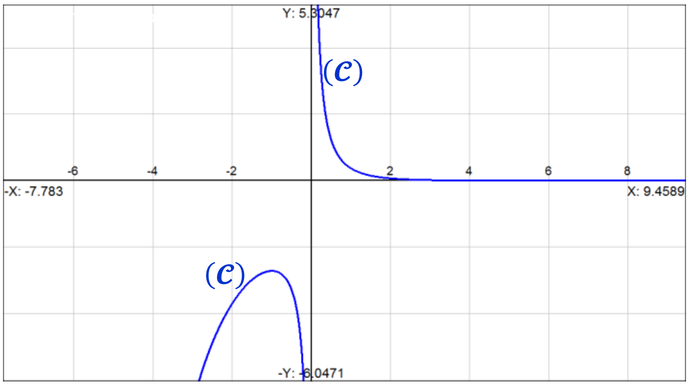
و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي بجوار $(\mathcal{C})$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

إذن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب موجه نحو الأسفل.

التمرين الرابع — I 3 ب



التمرين الرابع — II 1

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x) = e^x - x - 1$

φ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و ذلك لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. و لدينا : $\varphi'(x) = e^x - 1 \;;\; (\forall x \in \mathbb{R})$

إذا كان $x = 0$ فإن : $\varphi'(x) = 0$.

إذا كان $x > 0$ فإن : $\varphi'(x) > 0$.

إذا كان $x < 0$ فإن : $\varphi'(x) < 0$.

و لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$

و لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty$

نستنتج جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
φ	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن 0 قيمة دنوية للدالة φ على $\mathbb{R}$.

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \;;\; \varphi(x) \geq 0$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \;;\; e^x - x - 1 \geq 0$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}) \;;\; e^x \geq x + 1$

التمرين الرابع — II 2

$$
\begin{aligned}
x \in \mathbb{R} \;&\Rightarrow\; e^x \geq x + 1 \\
&\Rightarrow\; \frac{1}{e^x} \leq \frac{1}{x+1} \\
&\Rightarrow\; e^{-x} \leq \frac{1}{x+1} \\
&\Rightarrow\; x\,e^{-x} \leq \frac{x}{x+1} \;;\; avec\ x > 0 \\
&\Rightarrow\; \frac{x^2}{x}\,e^{-x} \leq \frac{x}{x+1} \;;\; avec\ x > 0 \\
&\Rightarrow\; x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1} \;;\; avec\ x > 0
\end{aligned}
$$

و بالتالي : $(\forall x > 0) \;;\; x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$

التمرين الرابع — II 3 أ

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) \;:\; 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

نريد إثبات صحة هذه العبارة باستعمال الترجع.

من أجل $n = 0$. لدينا : $0 < u_0 = 1 \leq \frac{1}{0+1}$

إذن العبارة (P_0) صحيحة.

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. و نفترض أن (P_n) صحيحة.

$$
\begin{aligned}
(P_n)\ est\ vraie \;&\Rightarrow\; u_n \leq \frac{1}{n+1} \\
&\Rightarrow\; n\,u_n + u_n \leq 1 \\
&\Rightarrow\; n\,u_n + (2u_n - u_n) \leq 1 \\
&\Rightarrow\; n\,u_n + 2\,u_n \leq 1 + u_n \\
&\Rightarrow\; (n+2)u_n \leq (1 + u_n) \\
&\Rightarrow\; \frac{(n+2)u_n}{(1+u_n)} \leq 1 \\
&\Rightarrow\; \frac{u_n}{(1+u_n)} \leq \frac{1}{(n+2)} \quad (*)
\end{aligned}
$$

و لدينا حسب الافتراض : $u_n \geq 0$.

إذن حسب نتيجة السؤال 2) : $(u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{u_n}{1+u_n} \quad (**)$

$$
\begin{aligned}
(*)\ et\ (**) \;&\Rightarrow\; 0 < (u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{1}{n+2} \\
&\Rightarrow\; 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)+1} \\
&\Rightarrow\; (P_{n+1})\ est\ vraie
\end{aligned}
$$

لقد حصلنا على الأشياء التالية : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) \;;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

التمرين الرابع — II 3 ب

بما أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; \underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}{0} < u_n \leq \underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}{\left(\frac{1}{n+1}\right)}$

فإنه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty} (u_n) = 0$

التمرين الأول — II 4 أ

$$
\begin{aligned}
k \in \mathbb{N} \;&\Rightarrow\; u_k = u_{k-1}\,e^{-u_{k-1}} \\
&\Rightarrow\; \frac{1}{u_k} = \frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}} \\
&\Rightarrow\; \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln\left(\frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}}\right) \\
&\Rightarrow\; \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln(e^{u_{k-1}}) - \ln(u_{k-1}) \\
&\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} u_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k-1}) \\
&\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_k)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right)=v_n-\sum_{k=1}^{n-1}\ln(u_k)-\underbrace{\ln(u_0)}_{=0}$$

$$\Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\ln(u_k)\right)=v_n$$

$$\Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln\left(\frac{1}{u_k}\right)+\ln(u_k)\right)=v_n$$

$$\Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\ln 1=v_n$$

$$\Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)+0=v_n$$

$$\Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)=v_n$$

التمرين الرابع II 4 ب

$$\ln\left(\frac{1}{u_n}\right)=v_n\ \Rightarrow\ \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right)=\lim_{n\infty}(v_n)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{\lim\limits_{n\infty}(u_n)}=\lim_{n\infty}(v_n)$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\infty}(v_n)=+\infty$$

التمرين الرابع III 1 أ

$$\int_{x^2}^{4x^2}\frac{1}{t}\,dt=[\ln t]_{x^2}^{4x^2}=\ln(4x^2)-\ln(x^2)=\ln 4$$

التمرين الرابع III 1 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال $(1(II$: $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x\geq x+1$

إذن من أجل العدد الحقيقي $(-x)$ نحصل على : $e^{-x}\geq -x+1$

يعني : $e^{-x}-1\geq -x\quad (1)$

و لدينا : $x>0\ \Rightarrow\ -x<0$

$$\Rightarrow\ e^{-x}<1$$

$$\Rightarrow\ e^{-x}-1<0\quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x>0)\ ;\ -x\leq e^{-x}-1\leq 0$

التمرين الرابع III 2 أ

ليكن x عددا حقيقيا موجبا . $t\ \epsilon\ \mathbb{R}^+\ \Rightarrow\ -t\leq e^{-t}-1\leq 0$

$$\Rightarrow\ -1\leq\frac{e^{-t}}{t}-\frac{1}{t}\leq 0$$

$$\Rightarrow\ -\int_{x^2}^{4x^2}1\,dt\leq\int_{x^2}^{4x^2}\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)dt-\int_{x^2}^{4x^2}\left(\frac{1}{t}\right)dt\leq\int_{x^2}^{4x^2}0\,dt$$

On a introduit l'intégrale car ces fonctions sont toutes continues et que $x^2\leq 4x^2$

$$\Rightarrow\ -[t]_{x^2}^{4x^2}\leq F(x)-[\ln|t|]_{x^2}^{4x^2}\leq[constante]_{x^2}^{4x^2}$$

$$\Rightarrow\ -3x^2\leq F(x)-\ln 4\leq 0$$

التمرين الرابع III 2 ب

$$-3x^2\leq F(x)-\ln 4\leq 0$$

$$\Rightarrow\ -3x\leq\frac{F(x)-\ln 4}{x}\leq 0\ ;\ car\ x>0$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{-3x}_{x\to 0^+\ \searrow\ 0}\leq\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right)\leq\underbrace{0}_{x\to 0^+\ \searrow\ 0}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right)=0$$

و بالتالي F دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر

و العدد المشتق على اليمين هو $F_d'(0)=0$.

و منه F دالة متصلة على اليمين في الصفر لأن الاشتقاق يستلزم الاتصال .

التمرين الرابع III 3 أ

$$t\geq 1\ \Rightarrow\ \frac{1}{t}\leq 1$$

$$\Rightarrow\ \frac{e^{-t}}{t}\leq e^{-t}\ ;\ e^{-t}>0$$

$$\Rightarrow\ f(t)\leq e^{-t}$$

التمرين الرابع III 3 ب

$$t\geq 1\ \Rightarrow\ 0\leq f(t)\leq e^{-t}$$

$$\Rightarrow\ 0\leq\int_{x^2}^{4x^2}f(t)\,dt\leq\int_{x^2}^{4x^2}e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow\ 0\leq F(x)\leq\left(e^{-x^2}-e^{-4x^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ 0\leq F(x)\leq e^{-x^2}\left(1-e^{-3x^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{0}_{x\to+\infty\ \searrow\ 0}\leq F(x)\leq\underbrace{e^{-x^2}\left(1-e^{-3x^2}\right)}_{x\to+\infty\ \searrow\ 0}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}F(x)=0$$

التمرين الرابع III 4 أ

لدينا f دالة متصلة على المجال $]0;+\infty[$. إذن فهي تقبل عدة دوال أصلية على هذا المجال . و بالخصوص تقبل دالة أصلية φ معرفة بما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,dt\ ;\ a>0\\ \varphi'(x)=f(x)\end{cases}$$

$$F(x)=\int_{x^2}^{4x^2}f(t)\,dt=\int_{x^2}^{a}f(t)\,dt+\int_a^{4x^2}f(t)\,dt$$

$$=\int_a^{4x^2}f(t)\,dt-\int_a^{x^2}f(t)\,dt$$

$$=\varphi(4x^2)-\varphi(x^2)$$

$$\Rightarrow\ F'(x)=8x\,\varphi'(4x^2)-2x\,\varphi'(x^2)$$

$$=8x\,f(4x^2)-2x\,f(x^2)$$

$$=\frac{8x\,e^{-4x^2}}{4x^2}-\frac{2x\,e^{-x^2}}{x^2}$$

$$=\frac{2\,e^{-x^2}\left(e^{-3x^2}-1\right)}{x}$$

$$\Rightarrow\ (\forall\,x>0)\ ;\ F'(x)=\frac{2\,e^{-x^2}\left(e^{-3x^2}-1\right)}{x}$$

التمرين الرابع III 4 ب

لدينا : $(\forall\, x > 0)\ ;\ F'(x) = \dfrac{2\, e^{-x^2}\left(e^{-3x^2} - 1\right)}{x}$

و نلاحظ أن : $(\forall\, x > 0)\ ;\ \dfrac{2\, e^{-x^2}}{x} > 0$

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $\left(e^{-3x^2} - 1\right)$.

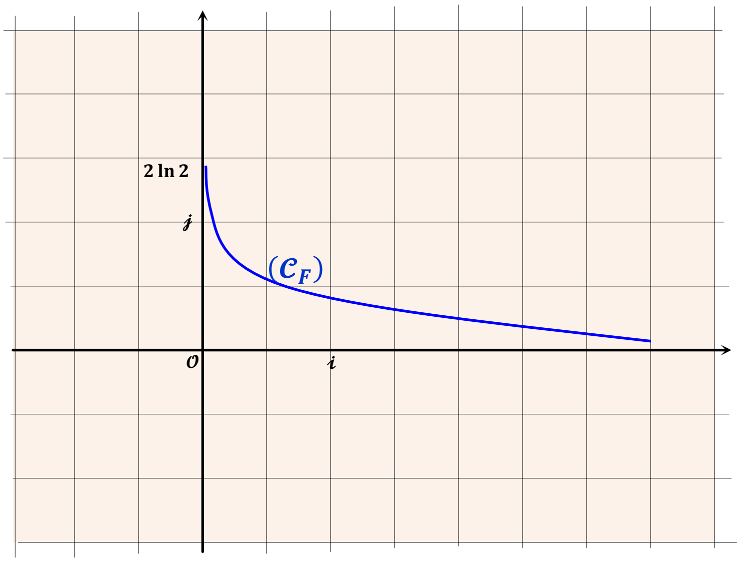
$$\begin{aligned} x > 0 &\Longrightarrow -3x^2 < 0 \\ &\Longrightarrow e^{-3x^2} < 1 \\ &\Longrightarrow \left(e^{-3x^2} - 1\right) < 0 \\ &\Longrightarrow F'(x) < 0 \end{aligned}$$

إذن : $(\forall\, x > 0)\ ;\ F'(x) < 0$

و هذا يعني أن الدالة F تناقصية قطعا على المجال $]0 ; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	
F	$2\ln 2$ ↘	0

التمرين الرابع III 4 ج



التمرين الرابع III 5 أ

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_x^{4x} \underbrace{e^{-t}}_{v'(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{u(t)}\, dt \\ &= \left[u(t)\cdot v(t)\right]_x^{4x} - \int_x^{4x} v(t)\cdot u'(t)\, dt \\ &= \left[(\ln t)(-e^{-t})\right]_x^{4x} - \int_x^{4x} (-e^{-t})\cdot\left(\frac{1}{t}\right) dt \\ &= e^{-x}\ln x - e^{-4x}\ln(4x) + \int_{(\sqrt{x})^2}^{4(\sqrt{x})^2} \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) dt \\ &= e^{-x}\ln x - e^{-4x}\ln(4x) + F\left(\sqrt{x}\right) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{G(x) = e^{-x}\ln x - e^{-4x}\ln(4x) + F\left(\sqrt{x}\right)}$

التمرين الرابع III 5 ب

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} (e^{-x} - e^{-4x})\ln x &= \lim_{x\to 0^+} e^{-x}(1 - e^{-3x})\ln x \\ &= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{(3xe^{-x})}_{x\to 0^+ \ \to\ 0} \underbrace{\left(\frac{e^{-3x} - e^{0}}{-3x - 0}\right)}_{x\to 0^+\ \to\ 1} \underbrace{(x\ln x)}_{x\to 0^+\ \to\ 0} = 0 \end{aligned}$$

التمرين الرابع III 5 ج

لدينا :
$$\begin{aligned} G(x) &= F\left(\sqrt{x}\right) - e^{-4x}(\ln 4 + \ln x) + e^{-x}\ln x \\ &= F\left(\sqrt{x}\right) + (e^{-x} - e^{-4x})\ln x - e^{-4x}\ln x \end{aligned}$$

إذن : $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x)$

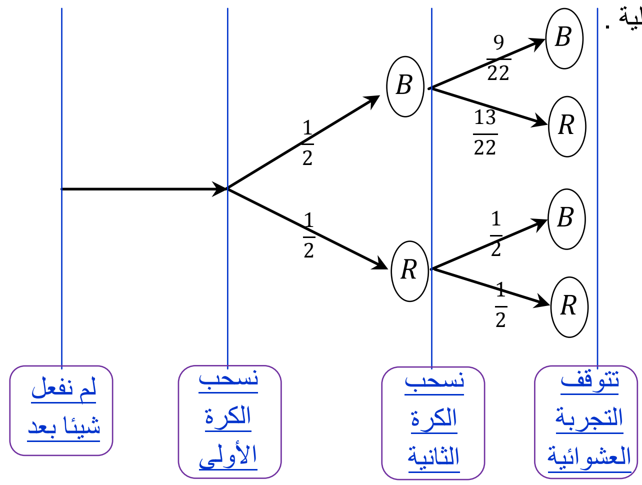
$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0^+} F\left(\sqrt{x}\right) + \lim_{x\to 0^+} (e^{-x} - e^{-4x})\ln x - \lim_{x\to 0^+} e^{-4x}\ln x \\ &= \ln 4 + 0 - \ln 4 = 0 \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = 0}$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2004

التمرين الأول 1

من خلال معطيات التمرين نُحول التجربة العشوائية إلى شجرة الإحتمالات التالية .



من خلال هذه الشجرة لدينا : $p(R \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

التمرين الأول 2

من خلال هذه الشجرة لدينا : $p(B \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{22} = \frac{9}{44}$

التمرين الأول 3

من خلال هذه الشجرة لدينا : $p(\text{لونين مختلفين}) = p(B \cap R) + p(R \cap B)$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{13}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6}{11}$$

التمرين الأول 4

من خلال هذه الشجرة لدينا :

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22}}{\frac{1}{2} \times \frac{9}{22} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني 1

نلاحظ في البداية أن الزوج $(1,1)$ حل خاص للمعادلة (E) .

و ذلك لأن : $3 \times 1 - 2 \times 1 = 1 \quad (1)$

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $3x - 2y = 1 \quad (2)$

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين (1) و (2) نحصل على :

$3(x-1) - 2(y-1) = 0$

يعني : $3(x-1) = 2(y-1) \quad (\otimes)$

من هذه النتيجة $\otimes$ نستنتج أن $3/2(y-1)$.

إذن حسب $Gauss$: $3/(y-1)$ لأن $3 \wedge 2 = 1$.

إذن : $y - 1 = 3k \; ; \; (\exists k \epsilon \mathbb{Z})$

يعني : $y = 3k + 1 \; ; \; (\exists k \epsilon \mathbb{Z})$

نعوض y بالتعبير $(3k+1)$ في $\otimes$ نجد : $3(x-1) = 2(3k)$.

إذن : $x = 2k + 1$.

نستنتج إذن أن الزوج $(2k+1 \,; 3k+1)$ حل للمعادلة (E) .

عكسيا لدينا : $3(2k+1) - 2(3k+1) = 1 \; ; \; (\forall k \epsilon \mathbb{Z})$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تُكتب على شكل :

$S = \{ (2k+1 \,; 3k+1) \; ; \; k \epsilon \mathbb{Z} \}$

التمرين الثاني 2 أ

لدينا : $3(14n+3) - 2(21n+4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1$

إذن $(14n+3 \,; 21n+4)$ حل للمعادلة (E) .

التمرين الثاني 2 ب

بما أن : $3(14n+3) - 2(21n+4) = 1$.

فإنه حسب مبرهنة $Bezout$ نستنتج أن : $(14n+3) \wedge (21n+4) = 1$

التمرين الثاني 3 أ

نضع : $(21n+4) \wedge (2n+1) = d$.

أذكر في البداية بمبدأ خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ d & c \end{array} \implies a \wedge b = b \wedge d$$

لدينا : $\begin{array}{c|c} (2n+1) & (n-6) \\ 13 & 2 \end{array}$ و $\begin{array}{c|c} (21n+14) & (2n+1) \\ (n-6) & 10 \end{array}$.

من هاتين الأقليديتين نستنتج أن :

$$(21n+4) \wedge (2n+1) = (2n+1) \wedge (n-6) = (n-6) \wedge 13$$

يعني : $d = (n-6) \wedge 13 \quad (\blacksquare)$

و منه نستنتج أن d قاسم للعدد 13 .

علما أن 13 عدد أولي، إذن $d = 13$ أو $d = 1$.

التمرين الثاني 3 ب

إذا كان $d = 13$ فإنه حسب النتيجة $(\blacksquare)$ نستنتج أن 13 قاسم للعددين 13 و $(n-6)$. يعني : $n \equiv 6 \, [13]$.

التمرين الثاني 4 أ

نضع : $\begin{cases} A = P(n) = 21n^2 - 17n - 4 \\ B = Q(n) = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 \end{cases}$

نلاحظ أن : $P(1) = Q(1) = 0$.

إذن 1 جذر مشترك للحدوديتين $P(n)$ و $Q(n)$ في $\mathbb{Z}$.

و منه نستنتج أن $P(n)$ و $Q(n)$ تقبلان القسمة على الحدودية $(n-1)$.

التمرين الثاني 4 ب

بالإستعانة بالقسمة الأقليدية لـ A و B على $(n-1)$ نحصل على :

$$\begin{cases} A = (n-1)(21n+4) \\ B = (n-1)(28n^2 + 20n + 3) \end{cases}$$

بعد تعميل ثلاثية الحدود $(28n^2 + 20n + 3)$ نحصل على :

$B = (n-1)(2n+1)(14n+3)$

و في ما يلي سوف نستعمل خاصية مهمة في الحسابيات و هي :

$c \wedge a = 1 \implies (\forall b \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; a \wedge b = a \wedge (bc)$

نضع : $P = (21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3)$.

لدينا حسب نتيجة السؤال 2) ب) : $(14n+3) \wedge (21n+4) = 1$

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن :

$(21n+4) \wedge (2n+1) = (21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3)$

و منه : $(21n+4) \wedge (2n+1) = p$

و منه حسب نتيجة السؤال 3) أ) : $p = 13$ أو $p = 1$.

الحالة الأولى : إذا كان $p = 13$.

لدينا حسب 3) ب) : $n \equiv 6 \, [13]$.

و لدينا : $(21n+4) \wedge (2n+1)(14n+3) = 13$.

إذن : $(n-1)(21n+4) \wedge (n-1)(2n+1)(14n+3)$

$= 13(n-1)$

يعني : $A \wedge B = 13(n-1)$.

الحالة الثانية : إذا كان $p=1$ فإن $n \not\equiv 6\ [13]$.

و لدينا : $(21n+4)\wedge(2n+1)(14n+3)=1$.

إذن : $(n-1)(21n+4)\wedge(n-1)(2n+1)(14n+3)=(n-1)$

و منه : $A\wedge B=(n-1)$.

الخلاصة : $(\forall n\geq 2)\ ;\ A\wedge B=\begin{cases}13(n-1)\ ;\ si\ \ n\equiv 6\ [13]\\ (n-1)\ ;\ si\ \ n\not\equiv 6\ [13]\end{cases}$

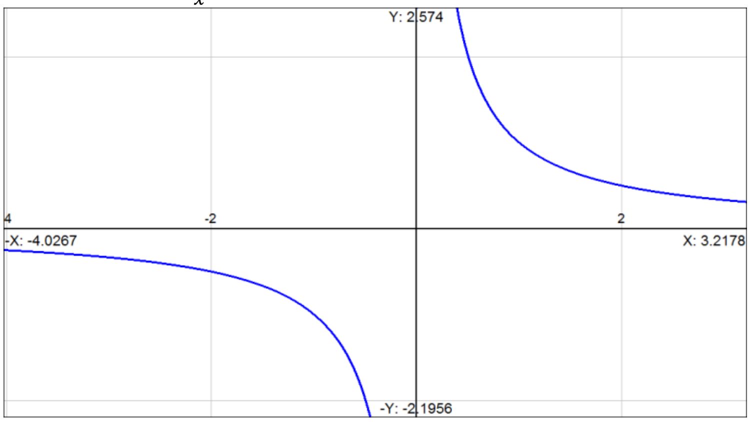
التمرين الثالث 1 أ

نضع : $z=x+iy$. لدينا : $z^2-\bar z^2=a^2-\bar a^2$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ (z-\bar z)(z+\bar z)=(a-\bar a)(a+\bar a)\\&\Leftrightarrow\ (2iy)(2x)=(2i\beta)(2\alpha)\\&\Leftrightarrow\ xy=\alpha\beta\\&\Leftrightarrow\ y=\frac{\alpha\beta}{x}\ ;\ x\neq 0\\&\Leftrightarrow\ \text{هذلول}\ (H)\end{aligned}$$

التمرين الثالث 1 ب

في حالة $a=(1+i)$ لدينا (H) هذلول معادلته $y=\frac{1}{x}$.



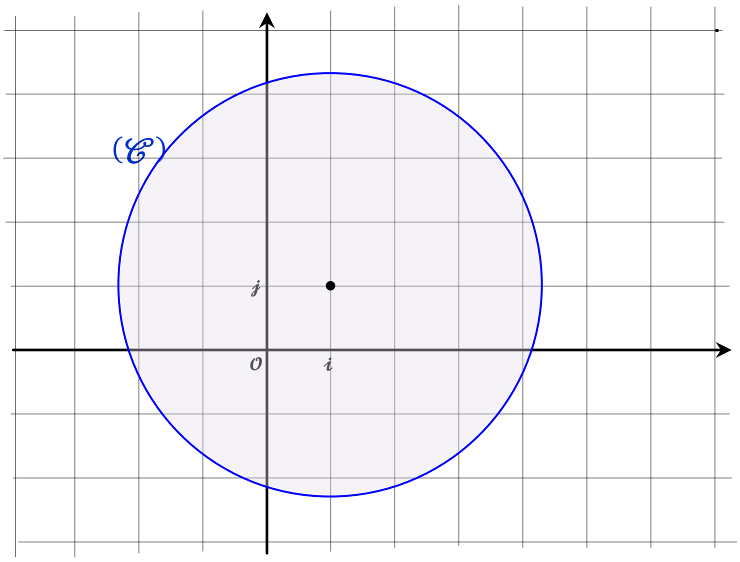
التمرين الثالث 2 أ

نضع : $z=x+iy$. لدينا : $(z-a)(\bar z-\bar a)=4a\bar a$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\ z\bar z-(z\bar a+a\bar z)+a\bar a=4a\bar a\\&\Leftrightarrow\ (x^2+y^2)-(2\alpha x+2\beta y)+(\alpha^2+\beta^2)=(2|a|)^2\\&\Leftrightarrow\ (x^2-2\alpha x+\alpha^2)-(y^2+2\beta y+\beta^2)=(2|a|)^2\\&\Leftrightarrow\ (x-\alpha)^2-(y-\beta)^2=(2|a|)^2\\&\Leftrightarrow\ (\mathcal{C})\ \text{دائرة مركزها}\ C(\alpha,\beta)\ \text{و شعاعها}\ 2|a|\end{aligned}$$

التمرين الثالث 2 ب

في حالة $a=(1+i)$ لدينا دائرة مركزها $C(1,1)$ و شعاعها $2\sqrt{2}$



التمرين الثالث 3 أ

لدينا $u=z-a$ إذن $\bar u=\bar z-\bar a$.

$$\begin{cases}z^2-a^2=\bar z^2-\bar a^2\\(z-a)(\bar z-\bar a)=4a\bar a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z^2-\bar z^2=a^2-\bar a^2\\(z-a)(\bar z-\bar a)=4a\bar a\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\begin{cases}(z-a)(z+a)=(\bar z-\bar a)(\bar z+\bar a)\\u\bar u=4a\bar a\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}u(u+2a)=\bar u(\bar u+2\bar a)\\u\bar u=4a\bar a\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}u(u+2a)=\dfrac{4a\bar a}{u}\left(\dfrac{4a\bar a}{u}+2\bar a\right)\\u\bar u=4a\bar a\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+2au-\left(\dfrac{4a\bar a}{u}\right)^2-2\bar a\left(\dfrac{4a\bar a}{u}\right)=0\\u\bar u=4a\bar a\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}u^4+2a\,u^3-16a^2\bar a^2-8a\bar a^2u=0\\u\bar u=4a\bar a\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}(u^4-8a\bar a^2u)+(2a\,u^3-16a^2\bar a^2)=0\\u\bar u=4a\bar a\end{cases}\\&\Leftrightarrow\begin{cases}u(u^3-8a\bar a^2)+2a(u^3-8a\bar a^2)=0\\u\bar u=4a\bar a\end{cases}\\&\Leftrightarrow\ (S'):\begin{cases}(u+2a)(u^3-8a\bar a^2)=0\\u\bar u=4a\bar a\end{cases}\end{aligned}$$

التمرين الثالث 3 ب

لنحل النظمة (S') حيث $a=re^{i\theta}$.

من خلال المعادلة الثانية من النظمة (S') نستنتج أن :

$$\begin{aligned}&(u+2a)(u^3-8a\bar a^2)=0\\&\Leftrightarrow\ (u+2a)=0\ \ \text{أو}\ \ (u^3-8a\bar a^2)=0\\&\Leftrightarrow\ u=-2a\ \ \text{أو}\ \ u^3=8a\bar a^2\\&\Leftrightarrow\ u=-2r\,e^{i\theta}\ \ \text{أو}\ \ u^3=8r^3e^{-i\theta}\end{aligned}$$

حلول المعادلة $r^3=8r^3\,e^{-i\theta}$ هي الجذور النونية من الدرجة الثالثة للعدد العقدي $8r^3e^{-i\theta}$ و التي تُكتب بصفة عامة على شكل .

$$u_k=\left[\sqrt[3]{8r^3}\ ;\ \frac{-\theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right]\ ;\ k\in\{0,1,2\}$$

$$Donc\ :\ \left|\begin{aligned}u_0&=\left[2r\ ;\ \frac{-\theta}{3}\right]=2r\,e^{\frac{-i\theta}{3}}\\u_1&=\left[2r\ ;\ \frac{-\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right]=2r\,e^{\frac{(-\theta+2\pi)i}{3}}\\u_2&=\left[2r\ ;\ \frac{-\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right]=2r\,e^{\frac{(-\theta+4\pi)i}{3}}\end{aligned}\right.$$

يمكن تحديد z_0 و z_1 و z_2 انطلاقا من قيم u_0 و u_1 و u_2 و ذلك باستعمال العلاقة $z=u+a$.

التمرين الثالث 3 ج

نضع $z_0(A)$ و $z_1(B)$ و $z_2(C)$.

نريد أن نبرهن أن المثلث ABC متساوي الأضلاع .

$$\begin{aligned}\frac{z_2-z_0}{z_1-z_0}&=\frac{2r-2rj}{2r\bar j-2rj}=\frac{1-j}{\bar j-j}=\frac{1-j}{-\sqrt{3}i}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=e^{\frac{-i\pi}{3}}\end{aligned}$$

إذن : $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right| = \left|e^{\frac{-i\pi}{3}}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \arg\left(e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_2 - z_0| = |z_1 - z_0| \\ \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مثلث متساوي الأضلاع ABC

التمرين الرابع I 1 أ

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(4x\, e^{-x \ln 2} - 2\right)$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\left(\frac{4}{\ln 2}\right)\left(\frac{1}{\frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2}}\right)\right) - 2$$
$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \lim_{\substack{u \to -\infty \\ u = x \ln 2}} \left(\frac{1}{\frac{e^u}{u}}\right) - 2$$
$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right)(-\infty) - 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(4x\, e^{-x \ln 2} - 2\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\left(\frac{4}{\ln 2}\right)\left(\frac{1}{\frac{e^{x \ln 2}}{x \ln 2}}\right)\right) - 2$$
$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right) \lim_{\substack{u \to +\infty \\ u = x \ln 2}} \left(\frac{1}{\frac{e^u}{u}}\right) - 2$$
$$= \left(\frac{4}{\ln 2}\right)(0) - 2 = -2$$

التمرين الرابع I 1 ب

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(4\, e^{-x \ln 2} - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

إذن من النهايتين التاليتين : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$

نستنتج أن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = -2$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$

التمرين الرابع 2 أ ب

لدينا : $f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$

و نعلم أن : $4\, e^{-x \ln 2} > 0\ ;\ (\forall x \in \mathbb{R})$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1 - x \ln 2)$.

إذا كان $x = \frac{1}{\ln 2}$ فإن $f'(x) = 0$.

إذا كان $x > \frac{1}{\ln 2}$ فإن $f'(x) < 0$.

إذا كان $x < \frac{1}{\ln 2}$ فإن $f'(x) > 0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات كما يلي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$	$\searrow$	-2

التمرين الرابع I 2 ج

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{\ln 2}\right]$.

إذن f تقابل من المجال $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{\ln 2}\right]$ نحو المجال $f\left(\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{\ln 2}\right]\right)$.

و لدينا : $f\left(\left]-\infty ; \frac{1}{\ln 2}\right]\right) = \left]-\infty\ ;\ \frac{4}{e \ln 2} - 2\right] \approx \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{10}\right]$

و بما أن : $0\ \epsilon\ \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{10}\right]$.

فإن 0 يمتلك سابقا واحدا وحيدا بالتقابل f في المجال $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{\ln 2}\right]$.

و لدينا : $f(1) = 4e^{-\ln 2} - 2$ و $1\ \epsilon\ \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{\ln 2}\right]$.

و لدينا كذلك حسب جدول تغيرات الدالة f .

f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left[\frac{1}{\ln 2}\ ;\ +\infty\right[$.

إذن f تقابل من المجال $\left[\frac{1}{\ln 2}\ ;\ +\infty\right[$ نحو صورته $\left]-2\ ;\ \frac{1}{10}\right]$.

مع العلم أن : $\frac{4}{e \ln 2} - 2\ \approx\ \frac{1}{10}$

و بما أن : $0\ \epsilon\ \left]-2\ ;\ \frac{1}{10}\right]$ فإن 0 يمتلك سابقا وحيدا بالتقابل f

في المجال $\left[\frac{1}{\ln 2}\ ;\ +\infty\right[$.

و لدينا $2\ \epsilon\ \left[\frac{1}{\ln 2}\ ;\ +\infty\right[$ و $f(2) = 0$.

خلاصة : العددان 1 و 2 هما الحلان الوحيدان للمعادلة $f(x) = 0$.

التمرين الرابع I 3 أ

دراسة الدالة g : $g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$.

لدينا g دالة معرفة على المجال $]0\ ;\ +\infty[$.

و لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(2x)}{x}\right) = 0$

إذن محور الأراتيب مقارب أفقي لـ (Γ) بجوار $+\infty$.

g قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ و مشتقتها مُعرفة بما يلي :

$$\boxed{g'(x) = \frac{1 - \ln(2x)}{x^2}}$$

إذا كان : $x = \frac{e}{2}$ فإن $g'(x) = 0$.

إذا كان : $x > \frac{e}{2}$ فإن $g'(x) < 0$.

إذا كان : $x < \frac{e}{2}$ فإن $g'(x) > 0$.

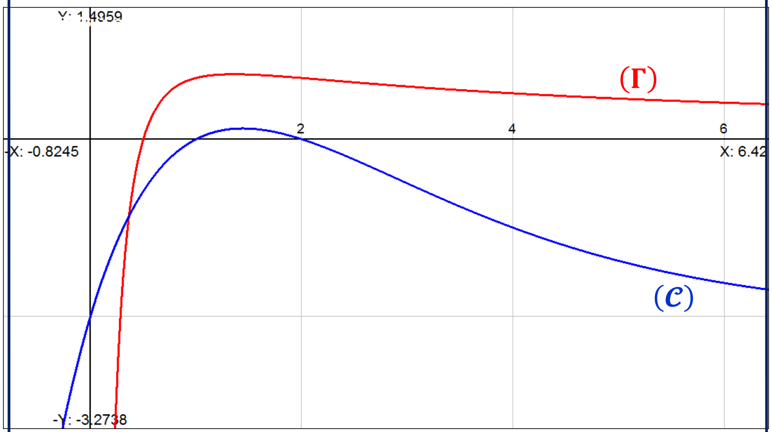
و نلخص نتائج هذه الدراسة في الجدول التالي :

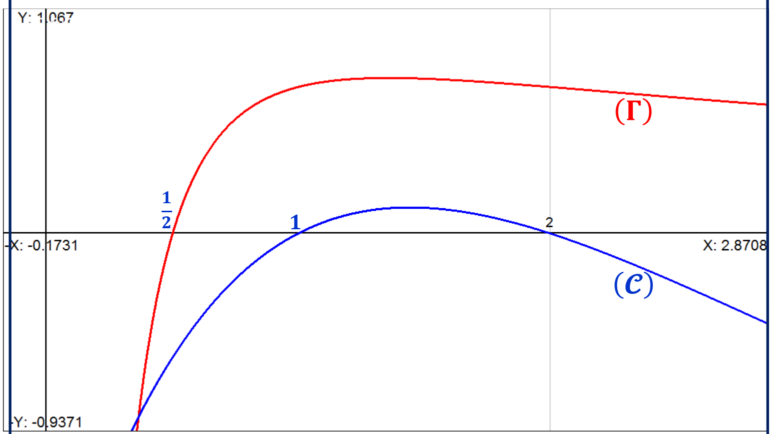
x	0		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

التمرين الرابع I 3 ب

قبل أن نرسم (Γ) أضيف نقطة تقاطع (Γ) مع محور الأفاصيل و التي يُحقق أفصولها المعادلة $g(x)=0$.

$$\begin{aligned} g(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(2x)}{x}=0 \;;\; x>0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2x)=0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2x)=\ln 1 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \end{aligned}$$





التمرين الرابع II 1 أ

لدينا $g'\left(\frac{e}{2}\right)=0$. إذن (Γ) يقبل مماسا أفقيا في النقطة $\Omega\left(\frac{e}{2},\frac{2}{e}\right)$.

و منه فإن $(\Delta): y=\frac{2}{e}$ يقطع (Γ) في نقطة واحدة و هي $\Omega\left(\frac{e}{2},\frac{2}{e}\right)$.

و لدينا حسب الرسم المبياني : (Γ) شكل مقعر .

إذن كل مستقيم $(D): y=k$ متواجد بين (Δ) و محور الأفاصيل يقطع (Γ) بالضبط في نقطتين . و بالتالي فالمعادلة $g(x)=k$ تقبل حلين α و β مختلفين شرط أن يكون $0<k<\frac{2}{e}$.

بما أن $g\left(\frac{1}{e}\right)=0$ و α و β مختلفين .

فإن أحدهما أصغر من الآخر و نأخذ اعتباطيا $\frac{1}{2}<\alpha<\beta$.

التمرين الرابع II 1 ب

ليكن α و β حلا للمعادلة $f(x)=0$.

بما أن : $\frac{1}{2}<\alpha<\beta$.

فإنه حسب السؤال 2) ج) من الجزء الأول نستنتج أن $\beta=2$ أو $\alpha=1$

من جهة أخرى لدينا حسب السؤال 1) أ) من الجزء II : α و β هما حلا المعادلة $g(x)=k$.

إذن : $g(1)=k$ و $g(2)=k$.

أي : $\ln 2=k$ أو $\ln 4=2k$.

و بالتالي : $k=\ln 2$

التمرين الرابع II 2 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f_k'(x)=4\left(e^{-kx}-kx\,e^{-kx}\right)=4(1-kx)e^{-kx}$$

التمرين الرابع II 2 ب

x	$-\infty$		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k	$-\infty$	$\nearrow$	$f_k\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	-2

التمرين الرابع II 3 أ

لدينا f_k متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left]-\infty\,;\frac{1}{k}\right[$.

إذن f_k تقابل من $\left]-\infty\,;\frac{1}{k}\right[$ نحو $\left]-\infty\,;\frac{4}{ke}-2\right[$.

و لدينا : $0<k<\frac{2}{e}$ إذن : $\frac{1}{k}>\frac{e}{2}$

و منه : $\frac{4}{ke}>2$. أي : $\frac{4}{ke}-2>0$.

يعني أن : $0\in\left]-\infty\,;\frac{4}{ke}-2\right[$.

إذن 0 يمتلك سابقا وحيدا في المجال $\left]-\infty\,;\frac{1}{k}\right[$ بالتقابل f_k .

و بنفس الطريقة لدينا f_k تقابل من $\left]\frac{1}{k}\,;+\infty\right[$ نحو $\left]-2\,;\frac{4}{ke}-2\right[$.

لأن f_k متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left]\frac{1}{k}\,;+\infty\right[$.

و بما أن $0\in\left]-2\,;\frac{4}{ke}-2\right[$.

فإن 0 يمتلك سابقا واحدا b من المجال $\left]\frac{1}{k}\,;+\infty\right[$ بالتقابل f_k .

يعني : $f_k(b)=0$ و $b>\frac{1}{k}$.

و بالتالي المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b حيث $a<\frac{1}{k}<b$.

التمرين الرابع II 3 ب

نلاحظ أن : $f_{\ln 2}(x)=f(x)$.

و نعلم أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين وحيدين و هما 1 و 2 .

إذن المعادلة $f_{\ln 2}(x)=0$ تقبل كذلك حلين وحيدين فقط و هما 1 و 2 .

و نعلم أن المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل بالضبط حلين a و b

كيفما كان $0<k<\frac{2}{k}$.

إذن نستنتج بالضرورة أن : $a=1$ و $b=2$. لأن a و b وحيدين.

التمرين الرابع II 4 أ

$$\begin{aligned} \int_0^t x\,e^{-kx}\,dx &= \left[\frac{x\,e^{-kx}}{-k}\right]_0^t-\int_0^t\left(\frac{e^{-kx}}{-k}\right)dx \\ &= \left[\frac{x\,e^{-kx}}{-k}\right]_0^t-\frac{1}{k}\left[\frac{e^{-kx}}{-k}\right]_0^t \\ &= \left(\frac{t\,e^{-kt}}{-k}\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{e^{-kt}}{-k}\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{k^2}\left(1-kt\,e^{-kt}-e^{-kt}\right) \end{aligned}$$

إذن : $\int_0^t x\,e^{-kx}\,dx=\frac{1}{k^2}\left(1-kt\,e^{-kt}-e^{-kt}\right)$

التمرين الرابع | II | 4 | ب

$$I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (4x\,e^{-kx} - 2)\,dx$$
$$= 4\left(\int_\alpha^\beta x\,e^{-kx}\,dx\right) - 2(\beta-\alpha)$$

لنحسب الآن التكامل $\left(\int_\alpha^\beta x e^{-kx}\,dx\right)$ بدلالة α و β و k .

$$\int_\alpha^\beta x\,e^{-kx}\,dx = \int_0^\beta x\,e^{-kx}\,dx - \int_0^\alpha x\,e^{-kx}\,dx$$
$$= \frac{1}{k^2}\left(1 - k\beta\,e^{-k\beta} - e^{-k\beta} - 1 + k\alpha\,e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha}\right)$$
$$= \frac{1}{k^2}\left(k\alpha\,e^{-k\alpha} + e^{-k\alpha} - k\beta\,e^{-k\beta} - e^{-k\beta}\right)$$

و نعلم أن $f_k(\alpha) = 0$ و $f_k(\beta) = 0$.

إذن : $4\alpha\,e^{-k\alpha} - 2 = 0$ و $4\beta\,e^{-k\beta} - 2 = 0$.

و منه : $(1)\quad 2\alpha = e^{\alpha k}$ و $2\beta = e^{\beta k}\quad (2)$.

بالرجوع إلى التعبير الأخير للتكامل $\int_\alpha^\beta x\ e^{-kx}$ نحصل على :

$$\int_\alpha^\beta x\,e^{-kx}\,dx = \frac{1}{k^2}\left(\frac{k\alpha}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{k\beta}{2\beta} - \frac{1}{2\beta}\right)$$
$$= \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\beta}\right)$$
$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{2\alpha\beta k^2}\right)$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعبير التكامل I_k نجد :

$$I_k = \int_\alpha^\beta f_k(x)\,dx = 4\left(\int_\alpha^\beta x\,e^{-kx}\,dx\right) - 2(\beta-\alpha)$$
$$= 4\left(\frac{\beta-\alpha}{2\alpha\beta k^2}\right) - 2(\beta-\alpha)$$
$$= 2(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\alpha\beta k^2} - 1\right)$$
$$= \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha\beta k^2}(1-\alpha\beta k^2)$$

إذن : $I_k = \dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha\beta k^2}(1-\alpha\beta k^2)$

التمرين الرابع | II | 4 | ج

بما أن α و β عددان حقيقيان موجبان قطعا و $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$.

فإن التكامل I_k يقيس مساحة. أي أن I_k كمية موجبة.

إذن : $(1-\alpha\beta k^2) \geq 0$. يعني : $(\alpha k)(\beta k) \leq 1\quad (*)$.

و نعلم أن : $\begin{cases} 2\alpha = e^{\alpha k} & (1) \\ 2\beta = e^{\beta k} & (2) \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} \ln(2\alpha) = (\alpha k) \\ \ln(2\beta) = (\beta k) \end{cases}$

و بالتالي بالرجوع إلى النتيجة $(*)$ نحصل على :

$$(\alpha k)\cdot(\beta k) \leq 1 \iff \ln(2\alpha)\cdot\ln(2\beta) \leq 1$$

التمرين الرابع | II | 5 |

ليكن u و v عددان حقيقيان مختلفان و موجبان قطعا حيث : $\frac{\ln u}{u} = \frac{\ln v}{v}$

$$\iff \frac{\ln\left(2\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\ln\left(2\left(\frac{v}{2}\right)\right)}{2\left(\frac{v}{2}\right)}$$
$$\iff \frac{\ln\left(2\left(\frac{u}{2}\right)\right)}{\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{\ln\left(2\left(\frac{v}{2}\right)\right)}{\left(\frac{v}{2}\right)} = k = une\ constante$$

إذن العددان $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة $\frac{\ln(2x)}{x} = k$.

أو بتعبير آخر : $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلين للمعادلة $g(x) = k$.

و لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g : قيمة قصوية للدالة g على $]0,+\infty[$.

إذن $\forall\ x \in\ ]0,+\infty[\ ;\ 0 < \frac{\ln(2x)}{x} < \frac{2}{e}$.

و منه : $0 < k < \frac{2}{e}$

لقد حصلنا إذن على أن $\frac{u}{2}$ و $\frac{v}{2}$ هما حلا المعادلة $g(x) = k$

حيث $0 < k < \frac{2}{e}$.

و بالتالي يُمكننا تطبيق نتائج التمرين و خصوصا نتيجة السؤال 4) ج) .

إذن : $\ln\left(2\times\frac{u}{2}\right)\cdot\ln\left(2\times\frac{v}{2}\right) \leq 1$.

و بالتالي : $\ln(u)\cdot\ln(v) \leq 1$.

أجوبة امتحان الدورة العادية 2005

التمرين الأول 1

ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{R}^*$.

ليكن $\left(m+\frac{1}{m} ; m-\frac{1}{m}\right)$ و $\left(n+\frac{1}{n} ; n-\frac{1}{n}\right)$ عنصرين من E .

لدينا :
$$\left(m+\frac{1}{m} ; m-\frac{1}{m}\right) * \left(n+\frac{1}{n} ; n-\frac{1}{n}\right) = \left(mn+\frac{1}{mn} ; mn-\frac{1}{mn}\right)$$

بما أن : $n \neq 0$ و $m \neq 0$ فإن $mn \neq 0$.

و منه : $\left(mn+\frac{1}{mn} ; mn-\frac{1}{mn}\right) \in E$

و بالتالي $*$ قانون تركيب داخلي في E .

التمرين الأول 2 أ

ليكن $\varphi(m)$ و $\varphi(n)$ عنصرين من E .

لدينا حسب السؤال 1) : $\varphi(m) * \varphi(n) = \varphi(mn)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

ليكن A عنصرا من E .

إذن حسب تعريف المجموعة A نكتب : $(\exists! m\in\mathbb{R}^*) ; \varphi(m) = A$

و هذا يعني أن φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

التمرين الأول 2 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يُحافظ على البنية الجبرية للزمرة و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

لدينا φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$. إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(E,*)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{R}^*,\times)$ و ذلك عن طريق التشاكل التقابلي φ .

بما أن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1 .

و كل عنصر a يقبل مماثلا $\frac{1}{a}$ بالقانون $\times$.

فإن : $(E,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج $\varphi(1)$.

و كل عنصر $\varphi(m)$ يقبل مماثلا $\varphi\left(\frac{1}{m}\right)$ بالقانون $*$.

و لدينا : $\varphi(1) = (2,0)$ و $\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \left(m+\frac{1}{m} ; \frac{1}{m}-m\right)$.

التمرين الأول 3 أ

ليكن (x,y) عنصرا من F إذن : $\begin{cases} x \geq 2 \\ y^2 = x^2-4 \end{cases}$

نطرح السؤال : هل يوجد عدد حقيقي موجب m بحيث : $m+\frac{1}{m} = x$

و للإجابة على هذا السؤال نبين أن المعادلة تقبل على الأقل حلا موجبا m

لدينا : $m+\frac{1}{m} = x \iff m^2 - mx + 1 = 0$

لدينا : $\Delta = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

بما أن : $x \geq 2$ فإن : $\Delta > 0$

و منه المعادلة تقبل حلين مختلفين m_1 و m_2

$$m_1 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{و} \quad m_2 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$$

الحل m_1 عدد حقيقي موجب قطعا إذن فإشارة الحل الثاني m_2 لا تهمنا لأنه تم إيجاد حل موجب للمعادلة

نستنتج إذن أن : $(\forall x \geq 0), (\exists m > 0) ; x = m + \frac{1}{m}$

و لدينا : $y^2 = x^2 - 4$ إذن :
$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{x^2-4} \\ &= \pm\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}+2-4} \\ &= \pm\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2} \\ &= \pm\left(m-\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

نختار : $y = \left(m-\frac{1}{m}\right)$

إذن : $(x,y) = \left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \ / \ m > 0$

عكسيا : ننطلق من : $\left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \ / \ m > 0$

لنبرهن أن المتراجحة $m + \frac{1}{m} \geq 2$ تقبل حلولا من أجل $m > 0$.

المتراجحة تكافئ : $\frac{m^2+1}{m} \geq 2$

نضرب طرفي المتراجحة في العدد الموجب m نجد : $m^2 + 1 \geq 2m$

يعني : $m^2 - 2m + 1 \geq 0$ أي : $(m-1)^2 \geq 0$

و هذه العبارة صحيحة كيفما كان العدد الحقيقي m .

و بالأخص من أجل $m > 0$

خلاصة :

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 2 \text{ و } y^2 = x^2-4\} = \left\{\left(m+\frac{1}{m}, m-\frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \ / \ m > 0\right\}$$

التمرين الأول 3 ب

من بين عناصر المجموعة F نجد الزوج $(2,0)$. إذن : $F \neq \emptyset$

و من الصيغة الثانية للمجموعة F نستنتج أن : $F \subset E$

لأن : $m > 0 \iff m\in\mathbb{R}^*$

و بالتالي : F جزء غير فارغ من E (1)

ليكن X_m و X_n عنصرين من F بحيث :

$$\begin{cases} X_m = \left(m+\frac{1}{m} ; m-\frac{1}{m}\right) \ ; \ m > 0 \\ X_n = \left(n+\frac{1}{n} ; n-\frac{1}{n}\right) \ ; \ n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_m * (X_n)' &= \left(m+\frac{1}{m} ; m-\frac{1}{m}\right) * \left(n+\frac{1}{n} ; -n+\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{m}{n}+\frac{1}{\frac{m}{n}} ; \frac{m}{n}-\frac{1}{\frac{m}{n}}\right) = X_{\left(\frac{m}{n}\right)} \end{aligned}$$

بما أن : $m > 0$ و $n > 0$ فإن : $\frac{m}{n} > 0$ و منه $X_{\left(\frac{m}{n}\right)} \in F$

أي : $(X_m) * (X_n)' \in F$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين الثاني I 1

لدينا p و 3 عددان أوليان مختلفان إذن $3 \wedge p = 1$.

إذن حسب مبرهنة $Fermat$ نكتب : $p^{3-1} \equiv 1 \ [3]$

التمرين الثاني I 2 أ

نعلم أن العدد الأولي الزوجي الوحيد هو 2 .
لدينا p عدد أولي و أكبر من العدد 5 .
إذن p سيكون بالضرورة عددا فرديا .
و منه : $(\exists q\in\mathbb{N})\ ;\ p=2q+1$.
أي : $(\exists q\in\mathbb{N})\ ;\ p^2=(2q+1)^2$.
و منه : $(\exists q\in\mathbb{N})\ ;\ p^2=4q^2+4q+1$.
يعني : $(\exists q\in\mathbb{N})\ ;\ p^2-1=4q(q+1)$

التمرين الثاني I 2 ب

لدينا : $(\exists q\in\mathbb{N})\ ;\ p^2-1=4q(q+1)$
و لدينا q و $(q+1)$ عددان صحيحان طبيعيان متتابعان .
إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي .
أي أن الجداء $q(q+1)$ عدد زوجي دائما .
يعني : $(\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ q(q+1)=2m$
يعني : $(\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ p^2-1=4(2m)$
يعني : $(\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ p^2-1=8m$
و منه : $8/(p^2-1)$ أي : $p^2\equiv 1\ [8]$.

التمرين الثاني I 3

تذكير : إذا كانت p_1 و p_2 و $\cdots$ و p_k أعداد أولية و كانت n_1 و n_2 و $\cdots$ و n_k أعدادا صحيحة طبيعية حيث $(\forall i)\ ;\ (p_i)^{n_i}/a$.
فإن الجداء $\prod_1^k (p_i{}^{n_i})$ قاسم لـ a . إنتهى التذكير .
لدينا : $24=2^3\times 3^1$.
و لدينا كذلك $8/(p^2-1)$ و $3/(p^2-1)$.
يعني : $2^3/(p^2-1)$ و $3^1/(p^2-1)$.
و نعلم أن العددان 2 و 3 أوليان. إذن حسب الخاصية المذكورة
نستنتج أن : $2^3\times 3^1/(p^2-1)$. و بالتالي : $p^2\equiv 1\ [24]$.

ملاحظة : توجد صيغة أخرى للخاصية المذكورة و هي كالتالي :

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m\wedge n=1\end{cases} \implies mn/a$$

التمرين الثاني II 1

لدينا a عدد صحيح طبيعي حيث $a\wedge 24=1$.
من أجل العدد a نفصل بين حالتين :
الحالة الأولى : إذا كان a عددا أوليا .
لدينا $2\wedge 24\neq 1$ و $3\wedge 24\neq 1$ و $5\wedge 24=1$.
إذن a عدد أولي أكبر من 5 .
و منه حسب نتائج الفقرة (I) : $a^2\equiv 1\ [24]$.
الحالة الثانية : إذا كان a عدد غير أولي .
و ليكن $(p_1{}^{n_1}\times p_2{}^{n_2}\times\cdots\times p_k{}^{n_k})$ تفكيك العدد a إلى جداء عوامل أولية .
بما أن $a\wedge 24=1$ أي $a\wedge(2^3\cdot 3^1)=1$.
فإن جميع الأعداد الأولية p_1 و $\cdots$ و p_k تخالف 2 و تخالف 3 .
و منه : $(\forall\, i\in[\![1,k]\!])\ ;\ p_i\geq 5$.
إذن يمكننا استعمال نتائج الفقرة الأولى من التمرين .
لدينا : $p_1{}^2\equiv 1[24]$. إذن : $(p_1{}^2)^{n_1}\equiv 1[24]$.
و لدينا : $p_2{}^2\equiv 1[24]$. إذن : $(p_2{}^2)^{n_2}\equiv 1[24]$.
و لدينا : $p_3{}^2\equiv 1[24]$. إذن : $(p_3{}^2)^{n_3}\equiv 1[24]$.
$\vdots$
و لدينا : $p_k{}^2\equiv 1[24]$. إذن : $(p_k{}^2)^{n_k}\equiv 1[24]$.
عند المرور إلى الجداء بين هذه المتوافقات نجد :

$$p_1{}^{2n_1}\cdot p_2{}^{2n_2}\cdot p_3{}^{2n_3}\cdot\cdots\cdot p_k{}^{2n_k}\equiv 1\ [24]$$

إذن : $(p_1{}^{n_1}\cdot p_2{}^{n_2}\cdot p_3{}^{n_3}\cdot\cdots\cdot p_k{}^{n_k})^2\equiv 1\ [24]$
و بالتالي : $a^2\equiv 1\ [24]$
الخلاصة : في كلتا الحالتين : $\forall\,(a\wedge 24=1)\ ;\ a^2\equiv 1\ [24]$

التمرين الثاني II 2

سوف نستعمل في هذا السؤال البرهان بالخلف .
نفترض وجود أعداد a_1 و a_2 و $\cdots$ و a_{23} حيث :
$(\forall k)\ ;\ a_k\wedge 24=1$ و $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_{23}{}^2=23997$
ننطلق من كون : $\forall\, k\in[\![1,23]\!]\ ;\ a_k\wedge 24=1$
إذن حسب نتيجة السؤال $(II)1$ نكتب :

$$\begin{cases} a_1{}^2\equiv 1\ [24] \\ a_2{}^2\equiv 1\ [24] \\ \ \vdots\quad\vdots\quad\vdots \\ a_{23}{}^2\equiv 1\ [24]\end{cases}$$

عند المرور إلى الجمع بين هذه المتوافقات نحصل على :

$$(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{23}{}^2)\equiv 23\ [24]$$

يعني : $23997\equiv 23\ [24]\quad (1)$.
نستعين بالآلة الحاسبة لنحصل على $23997\equiv 21\ [24]\quad (2)$.
من (1) و (2) نستنتج أن $23\equiv 21\ [24]$.
يعني أن 24 يقسم العدد 2 و هذا مستحيل .
و بالتالي : لا وجود لأعداد a_1 و a_2 و $\cdots$ و a_{23} أولية مع 24 و تحقق $a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_{23}{}^2=23997$.

التمرين الثالث I 1 أ

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)e^{\frac{-2}{x}}=0=f(0)$
إذن f متصلة على اليمين في الصفر .

التمرين الثالث I 1 ب

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(x+2)e^{\frac{-2}{x}}}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{-2}{x}}-\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-2}{x}\right)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= 0-\lim_{\substack{u\to-\infty \\ u=\frac{-2}{x}}} u\,e^u \\ &= 0-0=0=f_d'(0)\end{aligned}$$

التمرين الثالث I 1 ج

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.
لدينا : $f(x)=(x+2)\,e^{\frac{-2}{x}}$.
إذن :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{-2}{x}}+\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)'(x+2)\,e^{\frac{-2}{x}} \\ &= e^{\frac{-2}{x}}+\frac{2}{x^2}(x+2)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left(\frac{2x+4+x^2}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left(\frac{x^2+2x+1+3}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left(\frac{(x+1)^2+3}{x^2}\right)e^{\frac{-2}{x}}>0\end{aligned}$$

إذن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين الثالث I 2 ب

تذكير : لتكن f و g دالتين مُعرفتين على مجال $[a,b]$.

إذا كان :
- f و g متصلتين على $[a\ ,b]$
- f و g قابلتين للاشتقاق على $]a,b[$
- $f(a)=g(a)$
- $\forall\, x \in [a,b]\ ;\ f'(x)\geq g'(x)$

فإن : $\forall\, x \in [a,b]\ ;\ f(x)\geq g(x)$

انتهى التذكير .

ليكن t عددا حقيقيا موجبا .

نضع : $\begin{cases} \varphi(t)=(1-t) \\ \psi(t)=1-t+\frac{t^2}{2} \\ h(t)=e^{-t} \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \varphi(t)=-1 \\ \psi(t)=t-1 \\ h(t)=-e^{-t} \end{cases}$

لدينا : $t\geq 0 \Rightarrow -t\leq 0$
$\Rightarrow e^{-t}\leq 1$
$\Rightarrow -e^{-t}\geq -1$
$\Rightarrow h'(t)\geq \varphi'(t)$

و بما أن h و φ متصلتين و قابلتين للاشتقاق معا على $[0,+\infty[$.

و كذلك : $h(0)=\varphi(0)=1$.

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن : $(\forall t\geq 0)\ ;\ h(t)\geq \varphi(t)$

يعني : $(\forall t\geq 0)\ ;\ e^{-t}\geq (1-t)$

أي : $(\forall t\geq 0)\ ;\ e^{-t}+t-1\geq 0 \quad (1)$

و باستعمال هذه المتفاوتة نكتب : $t\geq 0 \Rightarrow e^{-t}\geq (1-t)$
$\Rightarrow -e^{-t}\leq (t-1)$
$\Rightarrow h'(t)\leq \psi'(t)$

و بما أن h و ψ متصلتين و قابلتين للاشتقاق معا على $[0,+\infty[$.

و كذلك : $\psi(0)=h(0)=1$.

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن : $(\forall t\geq 0)\ ;\ h(t)\leq \psi(t)$

يعني : $(\forall t\geq 0)\ ;\ e^{-t}\leq \left(1-t+\frac{t^2}{2}\right)$

يعني : $(\forall t\geq 0)\ ;\ (e^{-t}+t-1)\leq \frac{t^2}{2} \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall t\geq 0)\ ;\ 0\leq (e^{-t}+t-1)\leq \frac{t^2}{2}$

التمرين الثالث I 2 ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا .

إذن $\frac{2}{x}$ عدد حقيقي موجب قطعا .

و نعلم أن : $(\forall t\geq 0)\ ;\ 0\leq (e^{-t}+t-1)\leq \frac{t^2}{2}$

إذن نستطيع تعويض t بـ $\frac{2}{x}$ لأن هذه النتيجة صالحة للأعداد الأكبر من أو تساوي 0 .

و منه : $(\forall x>0)\ ;\ 0\leq \left(e^{\frac{-2}{x}}+\frac{2}{x}-1\right)\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2$

يعني : $(\forall x>0)\ ;\ \left(1-\frac{2}{x}\right)\leq e^{\frac{-2}{x}}\leq \left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب قطعا $(x+2)$ لنحصل على التأطير الجميل التالي :

$$(x+2)\left(1-\frac{2}{x}\right)\leq (x+2)e^{\frac{-2}{x}}\leq (x+2)\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $\left(x-\frac{4}{x}\right)\leq f(x)\leq \left(x-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ \frac{-4}{x}\leq f(x)-x\leq \frac{-2}{x}+\frac{4}{x^2}$

التمرين الثالث I 2 د

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-4}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=0$

إذن نحن أمام الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{-4}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}\leq f(x)-x\leq \underbrace{\left(\frac{-2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}}$$

إذن حسب خاصيات التأطير و النهايات نستنتج أن :

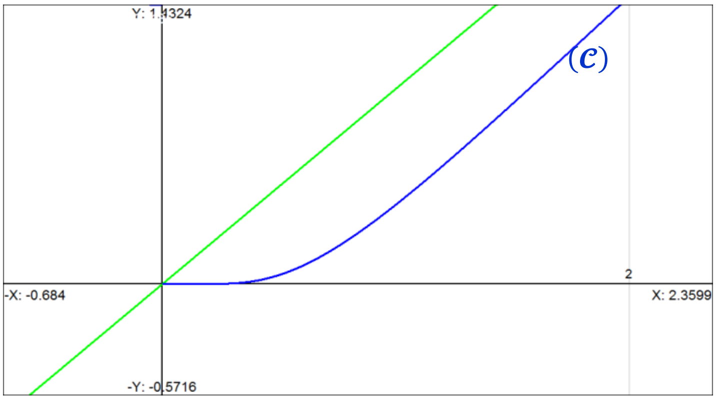
$$(1)\quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0}$$

و لقد علمنا من قبل أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad (2)$

إذن من النهايتين (1) و (2) نستنتج أن $(\mathcal{C})$ يقبل مقاربا مائلا

(و هو المنصف الأول للمعلم) بجوار $+\infty$ و معادلته $y=x$.

التمرين الثالث I 3



التمرين الثالث II 1

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{2}{nx}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)+\lim_{\substack{u\to+\infty\\ u=\frac{2}{x}}}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{e^u}{u}\right)}\right)$$
$$=0+\frac{1}{n}(0)=0\in\mathbb{R}$$

إذن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر . و لدينا : $(f_n)'_d(0)=0$

التمرين الثالث II 2

لدينا : $f_n'(x)=\left(\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}\right)'$

$$=\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)+\left(\frac{-2}{x}\right)'\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$
$$=\left(e^{\frac{-2}{x}}\right)+\left(\frac{2}{x^2}\right)\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}}$$
$$=\left(1+\left(\frac{2}{x^2}\right)\left(x+\frac{2}{n}\right)\right)e^{\frac{-2}{x}}>0$$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

التمرين الثالث II 3 أ

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

إذن f_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $f_n(]0,+\infty[)$.

$$f_n(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to0^+} f_n(x) \; ; \; \lim_{x\to0^+} f_n(x)\right[=]0,+\infty[$$

إذن f_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $]0,+\infty[$.

أو بتعبير آخر : $\forall\, y \in]0,+\infty[\; ; \; \exists!\, x \in]0,+\infty[\; ; \; f_n(x) = y$

أو بتعبير أخير نقول أن كل عنصر من $]0,+\infty[$ يقبل سابقا واحدا بالتقابل f_n من المجال $]0,+\infty[$.

من أجل n عدد طبيعي غير منعدم ، نلاحظ أن العدد $\frac{2}{n}$ عدد حقيقي موجب قطعا .

إذن العدد $\frac{2}{n}$ عنصر من المجال $]0,+\infty[$.

فهو يقبل إذن سابقا واحدا α_n من المجال $]0,+\infty[$ بالتقابل f_n .

أو بتعبير آخر : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\exists!\; \alpha_n \in]0,+\infty[) \; ; \; f_n(\alpha_n) = \frac{2}{n}$

يعني أن المعادلة $f_n(\alpha) = \frac{2}{n}$ تقبل حلا وحيدا α_n في $]0,+\infty[$.

التمرين الثالث II 3 ب

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا .

و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

$$\left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) - \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n(n+1)} + e^{\frac{-2}{x}}\left(\frac{-2}{n(n+1)}\right) = \frac{-2}{n(n+1)}\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right)$$

$$x > 0 \implies \frac{-2}{x} < 0 \implies e^{\frac{-2}{x}} < 1 \implies \left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right) < 0 \implies \frac{-2}{n(n+1)}\left(e^{\frac{-2}{x}} - 1\right) > 0 \implies \left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) > \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right)$$

الخلاصة :

$$\boxed{\begin{pmatrix}\forall x > 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{pmatrix} \; ; \; \left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1}\right) > \left(f_n(x) - \frac{2}{n}\right)} \quad (\star)$$

التمرين الثالث II 3 ج

المتفاوتة $(\star)$ صالحة لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n

و صالحة لكل عدد حقيقي موجب قطعا x .

لدينا من خلال ما سبق : $\alpha_n \in]0,+\infty[$.

إذن نستطيع تطبيق النتيجة $(\star)$ من أجل العدد الحقيقي الموجب قطعا α_n

و العدد الصحيح الطبيعي الغير المنعدم n نحصل على :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; \left(f_{n+1}(\alpha_n) - \frac{2}{n+1}\right) > \left(f_n(\alpha_n) - \frac{2}{n}\right)$$

نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; f_n(\alpha_n) = \frac{2}{n}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; f_{n+1}(\alpha_n) - \frac{2}{n+1} > 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; f_{n+1}(\alpha_n) > \frac{2}{n+1}$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{2}{n+1}$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

نعلم ان f_{n+1} تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$. و نعلم أنها كذلك تقابل إذن تقابلها العكسي f_{n+1}^{-1} دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_n)\big) > f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_{n+1})\big)$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; \alpha_n > \alpha_{n+1}$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعا .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ($\alpha_n > 0$)

فإنها متقاربة و نضع : $\lim(\alpha_n) = a \in \mathbb{R}$.

التمرين الثالث II 3 د

$$f_n(\alpha_n) = \frac{2}{n} \iff \left(\alpha_n + \frac{2}{n}\right) e^{\frac{-2}{\alpha_n}} = \frac{2}{n} \iff \frac{\alpha_n + \frac{2}{n}}{e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)}} = \frac{2}{n} \iff 2\, e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} = n\left(\alpha_n + \frac{2}{n}\right) \iff 2\, e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} = n\,\alpha_n + 2 \iff 2\, e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} - 2 = n\,\alpha_n$$

التمرين الثالث II 3 هـ

سوف نستعمل في هذا السؤال البرهان بالخلف لكي نبين أن النهاية a تساوي 0 . و من أجل ذلك نفترض أن : $a \neq 0$.

لدينا : $2\, e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} - 2 = n\,\alpha_n$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(2\, e^{\left(\frac{2}{\alpha_n}\right)} - 2\right) = \lim\limits_{n\infty}(n\,\alpha_n)$

و منه : $\left(2\, e^{\left(\frac{2}{a}\right)} - 2\right) = (+\infty)(a)$

و منه : $\left(2\, e^{\left(\frac{2}{a}\right)} - 2\right) = (\pm\infty)$

و هذا تناقض واضح لأن $\left(2\, e^{\frac{2}{a}} - 2\right)$ عدد حقيقي و يُخالف $\pm\infty$.

إذن ما افترضناه كان خاطئا . إذن : $\lim(\alpha_n) = 0$.

التمرين الثالث III 1 أ

ليكن x عددا حقيقيا موجبا حيث $x < 2$.

و سوف نستعمل كون f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

$$x \le t \le 2x \implies f(x) \le f(t) \le f(2x)$$

$$\implies \int_x^{2x} f(x)\, dt \le \int_x^{2x} f(t)\, dt \le \int_x^{2x} f(2x)\, dt$$

$$\implies f(x)[t]_x^{2x} \le \int_x^{2x} f(t)\, dt \le f(2x)\,[t]_x^{2x}$$

$$\implies x\, f(x) \le F(x) \le x\, f(2x)$$

التمرين الثالث III 1 ب

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و منه : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,f(x) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية : $F(x) \geq \underbrace{x\,f(2x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$

إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$

التمرين الثالث III 2

ليكن a و x عنصرين من المجال $[0,+\infty[$.

لدينا f دالة متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

إذن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال $[0,+\infty[$.

و بالخصوص f تقبل دالة أصلية ψ التي تُحقق :

$$\begin{cases} \psi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \\ \psi(a) = 0 \\ \psi'(x) = f(x)\ ;\ \forall\, x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} f(t)\ dt \\ &= \int_x^{a} f(t)\ dt + \int_a^{2x} f(t)\, dt \\ &= -\psi(x) + \psi(2x) \end{aligned}$$

بما أن $x \longrightarrow 2$ و ψ دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و $\psi(\,]0,+\infty[\,) \subset]0,+\infty[$.

فإن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و ذلك باستعمال المبرهنات العامة لاشتقاق مُركب و مجموع دالتين .

و لدينا : $x\,f(x) \leq F(x) \leq x\,f(2x)$.

إذن : $f(x) \leq \frac{F(x)}{x} \leq f(2x)$

$$\boxed{\underbrace{f(x)}_{\xrightarrow[x\to0^+]{} 0} \leq \left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) \leq \underbrace{f(2x)}_{\xrightarrow[x\to0^+]{} 0}}$$

إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن :

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = 0 \in \mathbb{R}$$

و هذا يعني أن F قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . و لدينا : $F'_d(0) = 0$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \big(\psi(2x) - \psi(x)\big)'\ ;\ x > 0 \\ &= \big(\psi(2x)\big)' - \psi'(x) \\ &= 2\,\psi'(2x) - \psi'(x) \\ &= 2\,f(2x) - f(x) \\ &= 2(2x+2)\,e^{\frac{-1}{x}} - (x+2)\,e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left(2(2x+2)\,e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left((4x+4)\,e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left((x+2+3x+2)\,e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left((x+2)\,e^{\frac{1}{x}} + (3x+2)\,e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right)e^{\frac{-2}{x}} \\ &= \left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)\,e^{\frac{1}{x}}\right)e^{\frac{-2}{x}} \end{aligned}$$

و بالتالي مشتقة الدالة F مُعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} F'(x) = \left((x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)\,e^{\frac{1}{x}}\right)e^{\frac{-2}{x}}\ ;\ x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$$

التمرين الثالث III 3

لدينا :

$$\begin{aligned} x > 0 \ &\Rightarrow \begin{cases} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) > 0 \\ (3x+2) > 0 \\ (x+2) > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow F'(x) > 0 \\ &\Rightarrow F\ \ est\ \ croissante\ \ sur\ \ ]0,+\infty[\end{aligned}$$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} xf(x) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x\to0^+} xf(2x) = 0$

إذن : $\boxed{\underbrace{x\,f(x)}_{\xrightarrow[x\to0^+]{} 0} \leq F(x) \leq \underbrace{x\,f(2x)}_{\xrightarrow[x\to0^+]{} 0}}$

و منه : $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = 0$

نستخلص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$+$	
F	0 ↗	$+\infty$

التمرين الرابع 1 أ

$$f(iy) = iy \iff \frac{i(iy)-1}{(iy+1)^2} = iy$$
$$\iff iy\,(iy+1)^2 = -y-1$$
$$\iff iy\,(-y^2+2i\,y+1) = -y-1$$
$$\iff -i\,y^3 + i\,y - 2\,y^2 = -y-1$$
$$\iff i(-y^3+y) + (1-y) = 0$$
$$\iff \begin{cases} -y^3+y = 0 \\ (1-y) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y(1-y)(1+y) = 0 \\ (1-y) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 0 \text{ أو } y = 1 \text{ أو } y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$
$$\iff y = 1$$

و بالتالي : $f(i) = i$

التمرين الرابع 1 ب

$$f(z) = z \iff \frac{iz-1}{z^2+2z+1} = z$$
$$\iff z^3 + 2\,z^2 + z = i\,z - 1$$
$$\iff z^3 + 2\,z^2 + (1-i)z + 1 = 0$$

هذه المعادلة الأخيرة تقبل حلا خاصا و هو العدد 1 . و ذلك حسب السؤال أ) ننجز القسمة الأقليدية للحدودية $z^3 + 2\,z^2 + (1-i)z + 1$ على الحدودية $(z-i)$ نحصل على $(z-i)(z^2+(2+i)z+i) = 0$

لنعمل الآن ثلاثية الحدود التالية : $z^2 + (2-i)z + i$

لدينا : $\Delta = (2-i)^2 - 4i = 3$

إذن ثلاثية الحدود تقبل جذرين z_1 و z_2 .
$$z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

و بالتالي المعادلة $f(z) = z$ تقبل ثلاثة حلول و هي : $z_0 = i$ و z_1 و z_2 .

التمرين الرابع 2 أ

لدينا :
$$z_1 + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$
$$= e^{\frac{-i\pi}{6}}$$

و بما أن : $\frac{11\pi}{6} \equiv \frac{-\pi}{6}[2\pi]$

فإن : $\boxed{z_1 + 1 = e^{\frac{-\pi i}{6}} = e^{\frac{11\pi}{6}}}$ (1)

و لدينا كذلك :
$$z_2 + 1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = e^{\frac{-5i\pi}{6}}$$

و بما أن : $\frac{7\pi}{6} \equiv \frac{-5\pi}{6}[2\pi]$ فإن : $\boxed{z_2 + 1 = e^{\frac{-5i\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{6}}}$ (2)

التمرين الرابع 2 ب

ليكن $z_1 = re^{i\theta}$. لدينا حسب النتيجة (1) : $z_1 + 1 = e^{\frac{11\pi}{6}}$
$$\iff z_1 + 1 = e^{\frac{11i\pi}{6}}$$
$$\iff re^{i\theta} = e^{\frac{11i\pi}{6}} - 1$$
$$\iff (S_1) : \begin{cases} r\cos\theta = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1 \\ r\sin\theta = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \end{cases}$$

لنحسب أولا r لدينا :
$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)^2$$
$$\iff r^2 = \cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 1 - 2\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$
$$\iff r^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية : $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

نحصل على :
$$\iff r^2 = 2\left(1 - 2\cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 1\right)$$
$$\iff r^2 = 4\left(1 - \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

ثم نستعين بعد ذلك بالعلاقة المثلثية التالية : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

نحصل على : $r^2 = 4\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ و منه : $r = \pm 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

إذن : $r = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة (S_1) نحصل على :
$$2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\sin\theta = \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$
$$\iff 2\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right)$$

نستعين بالعلاقة المثلثية التالية : $\sin(2\varphi) = 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$

نحصل على :
$$\sin\theta = \left(\frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}\right)$$
$$\iff \sin\theta = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{11\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$
$$\iff \sin\theta = \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$
$$\implies \theta \equiv \frac{17\pi}{12}[2\pi]$$

و بالتالي : $\boxed{z_1 = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{\frac{17i\pi}{12}}}$

ليكن $z_2 = se^{i\varphi}$. لدينا حسب النتيجة (2) : $z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad z_2 + 1 = e^{\frac{7i\pi}{6}}\\
&\Leftrightarrow \quad z_2 = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1\\
&\Leftrightarrow \quad se^{i\varphi} = e^{\frac{7i\pi}{6}} - 1\\
&\Leftrightarrow \quad (S_2) : \begin{cases} s\cos\varphi = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 1 \\ s\sin\varphi = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نحسب أولا s .

$$s^2 = 2\left(1 - \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) \underset{\text{بنفس الطريقة}}{\Leftrightarrow} s = \pm 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

نعلم أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا حقيقيا موجبا

إذن : $s = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

نعوض s بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة (S_2) نحصل على :

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin\varphi = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}\right) \underset{\text{الطريقة}}{\overset{\text{بنفس}}{=\!=\!=}} \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\\
&\Rightarrow \quad \varphi \equiv \frac{13\pi}{12}[2\pi]
\end{aligned}$$

و بالتالي : $z_2 = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) e^{\frac{13i\pi}{12}}$

التمرين الرابع 3 أ

لدينا $z = e^{i\alpha}$ إذن $|z| = 1$ و منه $z\bar{z} = 1$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{\left(\frac{iz-1}{(z+1)^2}\right)} = \frac{-i\,\bar{z}-1}{(\bar{z}+1)^2}\\
&= \frac{\bar{z}i(-1+iz)}{\bar{z}^2(1+z)^2} = iz\left(\frac{-1+iz}{(1+z)^2}\right) = iz\,f(z)
\end{aligned}$$

إذن : $\overline{f(z)} = iz\,f(z)$.

التمرين الرابع 3 ب

$$\begin{aligned}
f(z) + \overline{f(z)} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) + i\,f(z) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad (1+iz)\,f(z) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1+iz) = 0 \\ f(z) = 0 \end{cases} \text{أو}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1+iz) = 0 \\ (iz-1) = 0 \end{cases} \text{أو}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = i \\ z = -i \end{cases} \text{أو}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{i\alpha} = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ e^{i\alpha} = e^{\frac{-i\pi}{2}} \end{cases} \text{أو}\\
&\Leftrightarrow \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]
\end{aligned}$$

بما أن $0 \le \alpha \le \pi$ فإن α تأخذ قيمة وحيدة و هي $\frac{\pi}{2}$.

و بالتالي : $\alpha = \frac{\pi}{2}$

التمرين الرابع 3 ج

إقترح طريقتين للإجابة على هذا السؤال :

الطريقة الأولى : الإجابة بالإستعانة بالقاعدة التالية :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\frac{i\,e^{i\alpha}-1}{2\,e^{i\alpha}} &= \frac{1}{2}\left(i - e^{-i\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i\pi}e^{-i\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i(\pi-\alpha)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{i(\pi-\alpha)} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\cos\left(\frac{(\pi-\alpha)-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{(\pi-\alpha)+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}
\end{aligned}$$

و بالتالي نستنتج الشكل الأسي و المثلثي كما يلي :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\left(\frac{i\,e^{i\alpha}-1}{2\,e^{i\alpha}}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\\
&= \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\\
&= \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \;;\; \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

الطريقة الثانية : الإجابة دون استعمال تلك القاعدة .

لدينا حسب السؤال (ب) : $z = i$

إذن : $f(z) = f(i)$

و لدينا حسب السؤال (1)(أ) : $f(i) = i$

و منه : $f(z) = f(i) = i$

لدينا : $i = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}$

و بالتالي : $f(z) = e^{\frac{i\pi}{2}}$

لدينا : $z = e^{i\alpha}$

في هذا السؤال يجب استحضار جميع قواعد الحساب المثلثي.

لدينا : $f(z) = f\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{ie^{i\alpha}-1}{(e^{i\alpha}+1)^2}$

و لدينا : $\left(e^{i\alpha}+1\right)^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^2$

$$\Leftrightarrow \quad \left(e^{i\alpha}+1\right)^2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^2$$
$$= \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1\right)^2$$
$$= \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$
$$= \left(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)^2$$
$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)^2$$
$$= 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha}$$

$$f(z) = \frac{ie^{i\alpha}-1}{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\alpha}} = \left(\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right)$$

سنحاول الآن إيجاد الشكل المثلثي للتعبير : $\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right)$

نضع : $\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right) = r\cos(\varphi) + i\,r\sin(\varphi)$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-i\alpha}\left(ie^{i\alpha}-1\right) = 2r\cos(\varphi) + 2i\,r\sin(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad i - e^{-i\alpha} = 2r\cos(\varphi) + 2i\,r\sin(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad i - \cos(-\alpha) - i\sin(-\alpha) = 2r\cos(\varphi) + 2i\,r\sin(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad i - \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = 2r\cos(\varphi) + 2i\,r\sin(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad -\cos(\alpha) + i\left(1+\sin(\alpha)\right) = 2r\cos(\varphi) + i\left(2r\sin(\varphi)\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\cos(\alpha) = 2r\cos(\varphi) \\ 1+\sin(\alpha) = 2r\sin(\varphi) \end{cases}$$

لدينا : $(2r\cos\varphi)^2 + (2r\sin\varphi)^2 = 4r^2$

$$\Leftrightarrow \quad (-\cos\varphi)^2 + \left(1+\sin(\alpha)\right)^2 = 4r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1+\sin(\alpha)\right) = 4r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\left(1 - 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + 1\right) = 4r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\left(1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 4r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r = \pm\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

بما أن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا موجبا

و بما أن : $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} < \pi$ لأن : $0 \leq \alpha < \pi$

فإن : $\boxed{r = \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$ (1)

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظمة نجد :

$$-\cos(\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(\pi-\alpha) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\pi-\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(2\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

و لدينا : $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$

و منه : $\cos(\varphi) = \frac{2\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cancel{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

إذن : $\boxed{\varphi \equiv \left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)[2\pi]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\left(\frac{ie^{i\alpha}-1}{2e^{i\alpha}}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$

و بالتالي : $\boxed{f(z) = \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)}_{r \text{ المعيار}} e^{\overbrace{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}^{\varphi \text{ العمدة}}}}$

التمرين الرابع 4

بما أن $|z| = 1$ فإن z يكتب على الشكل $e^{i\alpha}$.

لدينا : $\Re e\left(f(z)\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \Re e\left(\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \times \frac{\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{1} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad 1-2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{z_1 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{أو} \quad \boxed{z_2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2005

التمرين الأول 1 أ

ليكن x و y عددين صحيحين نسبيين .

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ حل لـ } (E) &\Leftrightarrow (x+1)^2 = 9+5y\\
&\Leftrightarrow (x^2+2x+1)-9 = 5y\\
&\Leftrightarrow x^2+2x-8 = 5y\\
&\Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 5y\\
&\Leftrightarrow 5/(x+4)(x-2)\\
&\Leftrightarrow 5/(x+4) \ \ ou \ \ 5/(x-2) \ ; \ car\ 5 \epsilon \mathbb{P}\\
&\Leftrightarrow 5/(x+4)-5 \ \ ou \ \ 5/(x-2)\\
&\Leftrightarrow 5/(x-1) \ \ ou \ \ 5/(x-2)\\
&\Leftrightarrow x \equiv 1\,[5] \ \ ou \ \ x \equiv 2\,[5]
\end{aligned}$$

التمرين الأول 1 ب

$$\begin{aligned}
x \equiv 1\,[5] &\Rightarrow 5/(x-1)\\
&\Rightarrow (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ x-1 = 5k\\
&\Rightarrow (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ x = 5k+1\\
&\Rightarrow (5k+1+1)^2 = 9+5y \ ; \ d'après(E)\\
&\Rightarrow 25k^2+4+20k = 9+5y\\
&\Rightarrow y = 5k^2+4k-1 \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \equiv 2\,[5] &\Rightarrow 5/(x-2)\\
&\Rightarrow (\exists k'\epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ x-2 = 5k'\\
&\Rightarrow (\exists k'\epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ x = 5k'+2\\
&\Rightarrow (\exists k'\epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ (5k'+3)^2 = 9+5y\\
&\Rightarrow (\exists k'\epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ 25k'^2+9+30k' = 9+5y\\
&\Rightarrow (\exists k'\epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ y = 5k'^2+6k'
\end{aligned}$$

عكسيا نتحقق أن جميع الزواج $(5k+1\,;5k^2+4k-1)$ من $\mathbb{Z}^2$ تحقق المعادلة (E) . و كذلك جميع الأزواج $(5k'+2\,;\,5k'^2+6k')$ من $\mathbb{Z}^2$ تحقق كذلك المعادلة (E) .

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$ هي :
جميع الأزواج $(5k+1\,;5k^2+4k-1)$
و جميع الأزواج $(5k'+2\,;\,5k'^2+6k')$ حيث k و k' عددان صحيحان نسبيان .

التمرين الأول 2

تذكير بمبدأ خوارزمية أقليدس في $\mathbb{Z}$. $\begin{array}{c|c} a & b \\ c & d \end{array} \Rightarrow a\wedge b = b\wedge c$

لدينا : $\begin{array}{c|c} 5k^2+4k-1 & 5k+1 \\ 3k-1 & k \end{array}$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب :

$$\boxed{(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1) = (5k+1)\wedge(3k-1)} \quad (1)$$

و لدينا : $\begin{array}{c|c} 5k+1 & 3k-1 \\ 2k+2 & 1 \end{array}$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب :

$$\boxed{(5k+1)\wedge(3k-1) = (3k-1)\wedge(2k+2)} \quad (2)$$

و لدينا : $\begin{array}{c|c} 3k-1 & 2k+2 \\ k-3 & 1 \end{array}$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب :

$$\boxed{(3k-1)\wedge(2k+2) = (2k+2)\wedge(k-3)} \quad (3)$$

و لدينا : $\begin{array}{c|c} 2k+2 & k-3 \\ 8 & 2 \end{array}$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب :

$$\boxed{(2k+2)\wedge(k-3) = (k-3)\wedge 8} \quad (4)$$

من (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(5k^2+4k-1)\wedge(5k+1) = (k-3)\wedge 8}$$

أو بتعبير آخر : القاسم المشترك الأكبر للعددين $(5k^2+4k-1)$ و $(5k+1)$ هو نفسه القاسم المشترك الأكبر للعددين $(k-3)$ و 8 حيث k عنصر من $\mathbb{Z}$.

التمرين الأول 3

لنحل في $\mathbb{N}^2$ النظمة : $\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x\wedge y = 8 \\ x \equiv 1\,[5] \end{cases}$

هذه النظمة تصبح : $\begin{cases} x^2+2x+1 = 5y+9 \\ x\wedge y = 8 \\ x \equiv 1\,[5] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} (x+1)^2 = 5y+9 \\ x\wedge y = 8 \\ x \equiv 1\,[5] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} (x,y) \text{ حل لـ } (E) \\ x\wedge y = 8 \\ x \equiv 1\,[5] \end{cases}$

إذن حسب السؤال ب) : $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ x\wedge y = 8 \end{cases}$.

يعني : $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ (5k+1)\wedge(5k^2+4k-1) = 8 \end{cases}$

و منه حسب نتيجة السؤال 2) : $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ (k-3)\wedge 8 = 8 \end{cases}$

و منه نستنتج أن : $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ 8/(k-3) \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ (\exists n\epsilon\mathbb{Z}) \ ; \ (k-3) = 8n \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x = 5k+1 \\ y = 5k^2+4k-1 \\ (\exists n\epsilon\mathbb{Z}) \ ; \ k = 8n+3 \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x = 5(8n+3)+1 \\ y = 5(8n+3)^2+4(8n+3)-1 \\ On\ choisit\ n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} x = 40n+16 \\ y = 320n^2+272n+56 \\ n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$

عكسيا : نلاحظ أن جميع الأزواج من $\mathbb{N}^2$ التي تكتب على شكل $(40n+16\,;320n^2+272n+56)$ هي حلول للنظمة السابقة حيث n عنصر من $\mathbb{N}$.

إذن مجموعة حلول النظمة في $\mathbb{N}^2$ هي جميع الأزواج $(40n+16\,;320n^2+272n+56)$ حيث $n\epsilon\mathbb{N}$.

التمرين الثاني I 1

نفصل في هذا التمرين بين ثلاث حالات أساسية .

الحالة الأولى : إذاكان $2-m>0$ و $10-m>0$.

إذن : $m<2$ و $m<10$.

و منه : $(\mathcal{C}_m) : \dfrac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2}=1$

إذن $(\mathcal{C}_m)$ إهليلج .

الحالة الثانية : إذا كان $2<m<10$.

إذن $10-m>0$ و $m-2>0$

أي : $(\mathcal{C}_m) : \dfrac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}=1$

إذن $(\mathcal{C}_m)$ هذلول .

الحالة الثالثة : إذا كان $m>10$.

فإن $(m-2)>0$ و $(10-m)<0$.

و منه : $(\mathcal{C}_m) : -\left(\dfrac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right)=1$

نلاحظ أن الكمية $\left(\dfrac{x^2}{(\sqrt{m-10})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}\right)$ موجبة دائما .

إذن $(\mathcal{C}_m)$ مجموعة فارغة $\left((\mathcal{C}_m)=\emptyset\right)$.

التمرين الثاني I 2

نفصل بين ثلاث حالات :

الحالة الأولى : إذا كان $m<2$ إذن $m<10$.

و لدينا : $(\mathcal{C}_m) : \dfrac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2-m})^2}=1$

أي أن $(\mathcal{C}_m)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$. و رؤوسه الأربعة هي :

$$\begin{cases} A\left(\sqrt{10-m}\ ;\ 0\right) \\ B\left(-\sqrt{10-m}\ ;\ 0\right) \\ A'\left(0\ ;\ \sqrt{2-m}\right) \\ B'\left(0\ ;\ -\sqrt{2-m}\right) \end{cases}$$

نضع $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{2-m}$. إذن : $c=2\sqrt{2}$

و منه فإن بؤرتا الإهليلج $(\mathcal{C}_m)$ هما : $F\left(2\sqrt{2}\,;0\right)$ و $F'\left(-2\sqrt{2}\,;0\right)$

الحالة الثانية : $2<m<10$.

لدينا : $(\mathcal{C}_m) : \dfrac{x^2}{(\sqrt{10-m})^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{m-2})^2}=1$

إذن $(\mathcal{C}_m)$ هذلول مركزه $O(0,0)$ ورأساه $A\left(\sqrt{10-m}\,;0\right)$

و $A'\left(-\sqrt{10-m}\,;0\right)$.

نضع $a=\sqrt{10-m}$ و $b=\sqrt{m-2}$.

إذن : $c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{2}$.

إذن بؤرتا الهذلول $(\mathcal{C}_m)$ هما $F\left(2\sqrt{2}\,;0\right)$ و $F'\left(-2\sqrt{2}\,;0\right)$.

$(\mathcal{C}_m)$ يقبل مقاربين (Δ) و (Δ') معرفين بما يلي :

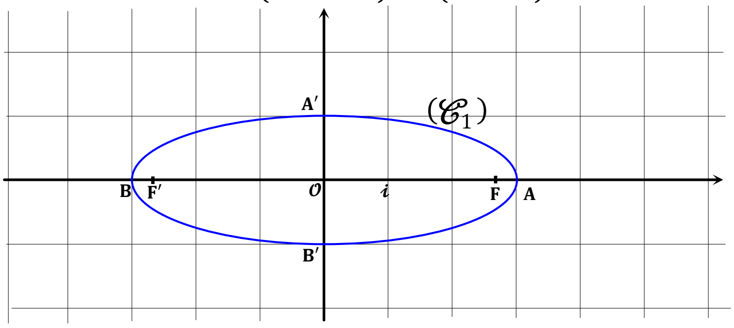
$$\begin{cases} (\Delta) : y=\left(\sqrt{\dfrac{m-2}{10-m}}\right)x \\ (\Delta') : y=-\left(\sqrt{\dfrac{m-2}{10-m}}\right)x \end{cases}$$

يعني : $\begin{cases} (\Delta) : y=\dfrac{b}{a}x \\ (\Delta') : y=-\dfrac{b}{a}x \end{cases}$

التمرين الثاني I 3

لدينا حسب ما سبق $(\mathcal{C}_1)$ إهليلج مركزه $O(0,0)$ و رؤوسه $A(3,0)$ و $B(-3,0)$ و $A'(0,1)$ و $B'(0,-1)$.

و بؤرتاه هما $\left(2\sqrt{2}\,,0\right)$ و $F'\left(-2\sqrt{2}\,,0\right)$.



التمرين الثاني II 1

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية :

$(E)\ :\ z^2-(6\cos\alpha)z+(1+8\cos^2\alpha)=0$

لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta &= (6\cos\alpha)^2-4(1+8\cos^2\alpha) \\ &= 36\cos^2\alpha-4-32\cos^2\alpha \\ &= 4\cos^2\alpha-4 \\ &= -4(1-\cos^2\alpha) \\ &= -4(\sin^2\alpha) \\ &= (2i(\sin\alpha))^2\end{aligned}$$

إذن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين z_1 و z_2 . و معرفين بما يلي :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{6\cos\alpha+2i\sin\alpha}{2}=3\cos\alpha+i\sin\alpha \\ z_2=\dfrac{6\cos\alpha-2i\sin\alpha}{2}=3\cos\alpha-i\sin\alpha \end{cases}$$

التمرين الثاني II 2 أ

نضع $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$.

نعلم أن : $(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

إذن : $\dfrac{9\cos^2\alpha}{9}+\dfrac{\sin^2\alpha}{1}=1$

و منه : $\dfrac{(3\cos\alpha)^2}{3^2}+\dfrac{\sin^2\alpha}{1^2}=1$

إذن الزوج $(3\cos\alpha\ ;\sin\alpha)$ يُحقق معادلة الإهليلج $(\mathcal{C}_1)$.

و بالتالي : $M_1\ \epsilon\ (\mathcal{C}_1)$.

التمرين الثاني II 2 ب

لتكن $P(x_0;y_0)$ نقطة من الإهليلج $(\mathcal{C}_1)$.

المعادلة الديكارتية لـ (T) مماس الإهليلج $(\mathcal{C}_1)$ في P تُكتب على الشكل :

$$(T)\ :\ \frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{1}=1\ \implies\ (T)\ :\ y=\left(\frac{-x_0}{9y_0}\right)x+1$$

لدينا M_1 هي صورة العدد العقدي z_1 .

إذن النقطة M_1 معرفة بالزوج $M_1(3\cos\alpha\ ;\sin\alpha)$.

و منه فإن المعادلة الديكارتية المختصرة لـ (OM_1) تكتب على شكل :

$$(OM_1)\ :\ y=\left(\frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha}\right)x$$

ننطلق من الكتابة : $(OM_1)\parallel(T)$.

هذا يعني أن لهما نفس الميل . أي : $\left(\dfrac{-x_0}{9y_0}\right)=\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$

و منه : $x_0=-3y_0\cdot\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\quad(*)$

و بما أن : $P(x_0,y_0)\ \epsilon\ (\mathcal{C}_1)$

فإن : $\frac{x_0^2}{3^2}+\frac{y_0^2}{1^2}=1$

نعوض x_0 بقيمته حسب $(*)$ في آخر تعبير حصلنا عليه نجد :

$$\frac{1}{9}\left(-3y_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+y_0^2=1 \ \Big|\ \Leftrightarrow\ y_0^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1\right)=1$$
$$\Leftrightarrow\ y_0^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow\ y_0^2=\cos^2\alpha$$
$$\Leftrightarrow\ y_0=\pm\cos\alpha$$

إذا كان $y_0=\cos\alpha$ فإن $x_0=-3y_0\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=-3\sin\alpha$

إذا كان $y_0=-\cos\alpha$ فإن $x_0=-3y_0\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=3\sin\alpha$

و بالتالي حصلنا على نقطتين P_1 و P_2 . $\begin{cases}P_1(3\sin\alpha\ ;\ -\cos\alpha)\\ P_2(-3\sin\alpha\ ;\cos\alpha)\end{cases}$

بحيث المماس لـ $(\mathcal{C}_1)$ في P_1 و P_2 يكون موازيا للمستقيم (OM_1) .

التمرين الثاني | II | 2 | ج

المعطيات : $\begin{cases}M_1(z_1)\\ M_2(z_2)\\ P_1(3\sin\alpha-i\cos\alpha\,)\\ P_2(-3\sin\alpha+i\cos\alpha\,)\end{cases}$

$$\begin{aligned}OM_1^2+OP_1^2&=|z_1|^2+|3\sin\alpha-i\cos\alpha|^2\\&=(9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=9(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=9\times1+1=10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}OM_2^2+OP_2^2&=|z_2|^2+|-3\sin\alpha+i\cos\alpha|^2\\&=(9\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\\&=9\times1+1=10\end{aligned}$$

و بالتالي : $OM_1^2+OP_1^2=OM_2^2+OP_2^2$

التمرين الثالث | 1

تذكير : ليكن p احتمال وقوع حدث A في تجربة عشوائية E .
عند إعادة التجربة E و ذلك n مرة متتالية فإن احتمال الحصول على الحدث A بالضبط k مرة هو : $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.
و لدينا : $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=1$

انتهى التذكير

في التمرين، الحدث A هو الحصول على كرة بيضاء و لدينا $p(A)=\frac{10}{n}$
و ننجز التجربة العشوائية n مرة متتالية .

إذن احتمال الحصول على الحدث A بالضبط k مرة هو احتمال الحصول على k كرة بيضاء و يساوي : $p_k=C_n^k\big(p(A)\big)^k\big(1-p(A)\big)^{n-k}$

$$=C_n^k\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}$$
$$=C_n^k\left(\frac{10}{n}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^{n-k}\left(\frac{n-10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n-10}\right)^n\left(\frac{n}{n}\right)^n$$
$$=C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n\left(\frac{(n-10)^{n-k}(n-10)^k n^n}{n^k n^{n-k}(n-10)^n}\right)$$
$$=C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n\left(\frac{(n-10)^n\cdot n^n}{n^k n^{n-k}(n-10)^n}\right)$$
$$=C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n\left(\frac{(n-10)^n\cdot n^n}{n^n\cdot(n-10)^n}\right)$$
$$=C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n$$

التمرين الثالث | 2 | أ

نضع : $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}$

لدينا : $$u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{C_n^{k+1}\left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1}\left(\frac{n-10}{n}\right)^n}{C_n^k\left(\frac{10}{n-10}\right)^k\left(\frac{n-10}{n}\right)^n}$$
$$=\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}\left(\frac{10}{n-10}\right)^{k+1-k}$$
$$=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\times\frac{k!\,(n-k)!}{n!}\times\frac{10}{n-10}$$
$$=\left(\frac{n-k}{k+1}\right)\left(\frac{10}{n-10}\right)$$

التمرين الثالث | 2 | ب

لدينا حسب المعطيات $k\geq0$.

$$u_k\geq1\ \Big|\ \Leftrightarrow\ \left(\frac{n-k}{k+1}\right)\left(\frac{10}{n-10}\right)\geq1\ ;\ \ k\geq0$$
$$\Leftrightarrow\ \frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)}\geq1$$

بما أن $n\geq$ فإن $(n-k)\geq0$.
إذن العددان $10(n-k)$ و $(n-10)(k+1)$ موجبان معا .

$$\Leftrightarrow\ 10(n-k)\geq(n-10)(k+1)$$
$$\Leftrightarrow\ 10n-10k\geq nk+n-10k-10$$
$$\Leftrightarrow\ 10n-n+10\geq k(n-10+10)$$
$$\Leftrightarrow\ k\leq\frac{9n+10}{n}$$
$$\Leftrightarrow\ k\leq9+\frac{10}{n}$$
$$\Leftrightarrow\ k\leq9\ ;\ \ on\ fait\ tendre\ n\ vers\ +\infty$$

و بالتالي : $0\leq k\leq9$

الشطر الثاني من السؤال : ننطلق من كون $10\leq k\leq(n-1)$.
إذن $10\leq10(n-k)\leq10(n-10)\quad(1)$.
و لدينا كذلك : $10\leq k\leq(n-1)$.
إذن : $11(n-10)\leq(n-10)(k+1)\leq10(n-1)$

و منه : $\frac{1}{n(n-10)}\leq\frac{1}{(n-10)(k+1)}\leq\frac{1}{11(n-10)}\quad(2)$

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$\frac{10}{n(n-10)}\leq\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)}\leq\frac{10(n-10)}{11(n-10)}$$

و منه : $\frac{10(n-k)}{(n-10)(k+1)}\leq\frac{10}{11}$ أي : $u_k\leq1$

التمرين الثالث | 2 | ج

من أجل $0\leq k\leq9$ لدينا $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq1$.
يعني من أجل $0\leq k\leq9$ لدينا $p_{k+1}\geq p_k$.
و منه فإن المتتالية $(p_k)_{k\in[0,9]}$ تزايدية .
و من أجل $10\leq k\leq n-1$ لدينا $u_k=\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq1$.
يعني من أجل $10\leq k\leq n-1$ لدينا $p_{k+1}\leq p_k$.
إذن $(p_k)_{k\geq0}$ تناقصية .
نستنتج إذن أن أكبر قيمة لهذه المتتالية هي p_{10} .

و منه : $M = p_{10} = C_n^k \left(\frac{10}{n-10}\right)^{10} \left(\frac{n-10}{n}\right)^n$

$$= \frac{n! \times 10^{10} \times (n-10)^n}{10! \times (n-10)! \times (n-10)^n \times n^n}$$

$$= \frac{n!}{n^n} \times \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{(n-10)^n}{(n-10)!}$$

التمرين الرابع | I | 1 | أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m\to-\infty \\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right) = \frac{e^2}{2}(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$= \lim_{\substack{m\to+\infty \\ m=2(x+1)}} \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right) = \frac{e^2}{2} \times 0 = 0$$

التمرين الرابع | I | 1 | ب

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

إذن $(\mathcal{C})$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$. و هو محور الأفاصيل

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-2x}$

$$= (1+0)(+\infty)$$

إذن من الوضعية التالية : $\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$

نستنتج أن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $-\infty$ اتجاهه محور الأراتيب .

التمرين الرابع | I | 2

لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$; $f(x) = (1+x)\, e^{-2x}$.

إذن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$. و لدينا : $f'(x) = (1+x)' e^{-2x} + (1+x)(e^{-2x})'$

$$= e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x}$$
$$= e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2x\, e^{-2x}$$
$$= -e^{-2x} - 2x\, e^{-2x}$$
$$= -(1+2x)\, e^{-2x}$$

بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$; $-e^{-2x} < 0$

فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(1+2x)$.

إذا كان $x = \frac{-1}{2}$ فإن $f'(x) = 0$.

إذا كان $x < \frac{-1}{2}$ فإن $f'(x) > 0$.

إذا كان $x > \frac{-1}{2}$ فإن $f'(x) < 0$.

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2e}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

نلخص إذن هذه النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{e}{2}$	↘	0

التمرين الرابع | I | 3 | أ

لدراسة تقعر المنحنى $(\mathcal{C})$ نحتاج إلى دراسة إشارة المشتقة الثانية $f''(x)$

$$f''(x) = (-(1+2x)\, e^{-2x})'$$
$$= -2\, e^{-2x} + 2(1+2x)e^{-2x}$$
$$= -2\, e^{-2x} + 2\, e^{-2x} + 4x\, e^{-2x}$$
$$= 4x\, e^{-2x}$$

إذا كان : $x = 0$. فإن : $f''(x) = 0$.

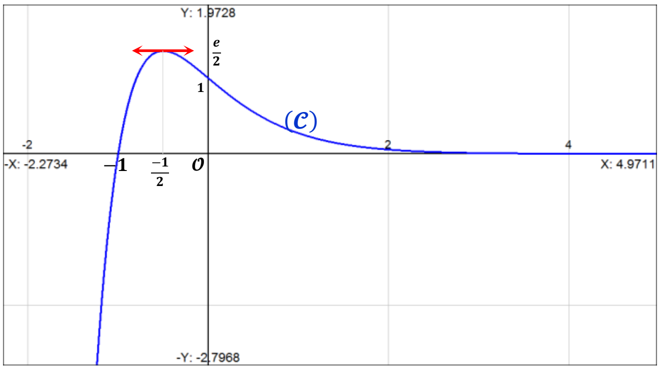
إذا كان : $x > 0$. فإن : $f''(x) > 0$.

إذا كان : $x < 0$. فإن : $f''(x) < 0$.

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$(\mathscr{C})$	$(\mathscr{C})$ مُقَعَّر	$\Omega(0,1)$ نقطة انعطاف	$(\mathscr{C})$ مُحَدَّب

التمرين الرابع | I | 3 | ب



التمرين الرابع | I | 4 | أ

لدينا : $\begin{cases} f(x) = (1+x)\, e^{-2x} \\ f'(x) = -(1+2x)\, e^{-2x} \\ f''(x) = 4x\, e^{-2x} \end{cases}$

إذن : $f''(x) + 3\, f'(x) + 2\, f(x)$

$$= 4x\, e^{-2x} - 3(1+2x)\, e^{-2x} + 2(1+x)e^{-2x}$$
$$= (4x - 3 - 6x + 2 + 2x)e^{-2x}$$
$$= -e^{-2x}$$

إذن f حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) .

$$(E) \; : \; y'' + 3y' + 2y = -e^{-2x}$$

أي : $f''(x) + 3\, f'(x) + 2\, f(x) = -e^{-2x}$.

التمرين الرابع | I | 4 | ب

الحل العام للمعادلة (E) يُكتب على شكل $y = y_H + y_P$.

حيث y_P هو حل خاص للمعادلة (E) نختاره في هذه الحالة مساويا للدالة f و y_H هو حل المعادلة التفاضلية التالية : (E_H) .

$$(E_H) \; : \; y'' + 3y' + 2y = 0$$

لنحل المعادلة (E_H) و ذلك عن طريق حل معادلتها المميزة التالية :

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

هذه المعادلة تقبل الحلين -1 و -2 و ذلك بعد حساب المميز $\Delta = 1$

إذن : $y_H = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-2x}$; $\alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$

و بالتالي : الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) يُكتب على شكل :

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$
$$= \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-2x} + f(x) \; ; \; (\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{R}^2$$
$$= \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{-2x} + (1+x)e^{-2x} \; ; \; (\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{R}^2$$

و α و β ثابتتين حقيقيتين يتم تحديدهما في حالة معرفة الشروط البدئية $y(0)$ و $y'(0)$. أي الوضعية البدئية للمتحرك و سرعته البدئية .

التمرين الرابع II 1

يشير التكامل هندسيا إلى قياس طول أو مساحة أو حجم .

إذن :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^n f(x)\ dx \\
&= \int_0^n \underbrace{(1+x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{v'(x)}\ dx \\
&= [u(x)\cdot v(x)]_0^n - \int_0^n u'(x)\cdot v(x)\ dx \\
&= \left[\frac{-(1+x)\,e^{-2x}}{2}\right]_0^n - \frac{1}{2}\int_0^n e^{-2x}\ dx \\
&= \left[\frac{-(1+x)\,e^{-2x}}{2}\right]_0^n - \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^n \\
&= \left(\frac{-(1+n)\,e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-e^{-2n}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= e^{-2n}\left(\frac{-(1+n)}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
&= e^{-2n}\left(\frac{-3-2n}{4}\right) + \frac{3}{4} \\
&= \frac{-e^{-2n}}{4}(2n+3) + \frac{3}{4} \\
&= \frac{3-(2n+3)e^{-2n}}{4}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 2

$$\begin{aligned}
\lim_{n\infty} \mathcal{A}_n &= \lim_{n\infty}\left(\frac{3-(2n+3)e^{-2n}}{4}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\lim_{n\infty}(2n+3)e^{-2n}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\left(\lim_{\substack{m\to+\infty \\ m=2n+3}} e^3 \times \frac{1}{\left(\frac{e^m}{m}\right)}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}(e^3 \times 0) = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 1

سوف نستعمل تقنية المكاملة بتغيير المتغير .

نضع : $t = nx$ و منه : $dt = n\,dx$.

إذا كان : $x = 0$. فإن : $t = 0$.

إذا كان : $x = 1$. فإن : $t = n$.

$$\begin{aligned}
u_n = n\int_0^1 (f(x))^n\ dx &= n\int_0^n \left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \frac{dt}{n} \\
&= \frac{n}{n}\int_0^n \left(\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{\frac{-2t}{n}}\right)^n \frac{dt}{n} \\
&= \int_0^n \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\ dt
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 2 أ

$$\begin{aligned}
u \in [1,2] &\Leftrightarrow 1 \le u \le 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{u} \le 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{u} \le 1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \in [1,2] &\Rightarrow (u-1)^2 \ge 0 \\
&\Rightarrow u^2 - 2u + 1 \ge 0 \\
&\Rightarrow u^2 + 1 \ge 2u \\
&\Rightarrow \frac{u^2+1}{u} \ge 2\ ;\ u \ne 0 \\
&\Rightarrow u + \frac{1}{u} \ge 2\ ;\ u \ne 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{u} \ge 2 - u \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \in [1,2] &\Rightarrow (1)\ et\ (2) \\
&\Rightarrow \frac{1}{u} \le 1 \quad et \quad \frac{1}{u} \ge 2-u \\
&\Rightarrow 2 - u \le \frac{1}{u} \le 1 \quad (\star)
\end{aligned}$$

و بالتالي : $\forall\, u \in [1,2]\ ;\ (2-u) \le \frac{1}{u} \le 1$

التمرين الرابع III 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[0,n]$. حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

إذن : $0 \le x \le n$ و منه : $0 \le \frac{x}{n} \le 1$.

نضع : $t = \frac{x}{n}$. إذن : $0 \le t \le 1$.

يعني أن : $1 \le (t+1) \le 2$

نستطيع إذن تعويض u ب $(t+1)$ في التأطير $(\star)$ نجد :

$$2-(t+1) \le \frac{1}{t+1} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1-t) \le \frac{1}{t+1} \le 1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int (1-t)\,dt \le \int \left(\frac{1}{t+1}\right) dt \le \int 1\,dt \\
&\Rightarrow \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \le \ln(1+t) \le t \\
&\Rightarrow \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}\right) \le \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le \frac{x}{n} \\
&\Rightarrow \left(x - \frac{x^2}{2n}\right) \le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x\ ;\ n > 0
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 3 أ

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x \in [0;n] \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} &\Rightarrow n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \le x \\
&\Rightarrow \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le x \\
&\Rightarrow \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le e^x \\
&\Rightarrow \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx \le \int_0^n e^{-x}\,dx \\
&\Rightarrow u_n \le \int_0^n e^{-x}\,dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 3 ب

$$\begin{aligned}
n \in \mathbb{N}^* &\Rightarrow x - \frac{x^2}{2n} \le n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&\Rightarrow x - \frac{x^2}{2n} \le \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\
&\Rightarrow e^{\left(x-\frac{x^2}{2n}\right)} \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad e^{\left(x-\frac{x^2}{2n}\right)}\cdot e^{-2x}\leq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

$$\Rightarrow\quad e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\leq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx\leq\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$$

$$\Rightarrow\quad \int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx\leq u_n\qquad(2)$$

$$n\in\mathbb{N}^*\ \Big|\ \Rightarrow\ n\geq 1\ \Rightarrow\ n^2\geq 1$$

$$\Rightarrow\ n\leq n^3\ \Rightarrow\ n^{\frac{1}{3}}\leq n$$

$$\Rightarrow\ \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx\leq\int_0^n e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx\qquad(3)$$

$$0\leq x\leq x^{\frac{1}{3}}\ \Rightarrow\ x^2\leq n^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow\ x^2\leq\frac{2n}{2\,n^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow\ 2\,n^{\frac{1}{3}}\leq\frac{2n}{x^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{-1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\leq\frac{-x^2}{2n}$$

$$\Rightarrow\ -x-\frac{1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\leq -x-\frac{x^2}{2n}$$

$$\Rightarrow\ e^{\left(-x-\frac{1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\right)}\leq e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}$$

$$\Rightarrow\ \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\right)}dx\leq\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx\qquad(4)$$

من (2) و (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\right)}dx\leq\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}\,dx\leq\int_0^{n} e^{-\left(x+\frac{x^2}{2n}\right)}dx\leq u_n}$$

$$\Rightarrow\ \int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\right)}dx\leq u_n\qquad(5)$$

التمرين الرابع | III | 3 | ج

من (1) و (5) نستنتج أن :

$$\int_0^{n^{\frac{1}{3}}} e^{\left(-x-\frac{1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\right)}dx\leq u_n\leq\int_0^n e^{-x}\,dx$$

يعني : $e^{\left(-\frac{1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\right)}\left[-e^{-x}\right]_0^{n^{\frac{1}{3}}}\leq u_n\leq\left[-e^{-x}\right]_0^n$

يعني : $\underbrace{e^{\left(-\frac{1}{2\,n^{\frac{1}{3}}}\right)}\left(-e^{-n^{\frac{1}{3}}}+1\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{}1}\leq u_n\leq\underbrace{\left(-e^{-n}+1\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{}1}$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى العدد 1 .

التمرين الرابع | III | 4 | أ

ليكن $0<a<1$ و $a\leq x\leq 1$.

و سوف نستعمل كون الدالة f تناقصية على المجال $[0,+\infty[$.

$$a\leq x\leq 1\ \Rightarrow\ f(1)\leq f(x)\leq f(a)$$

$$\Rightarrow\ 2\,e^{-2}\leq f(x)\leq f(a)$$

$$\Rightarrow\ 0<2\,e^{-2}\leq f(x)\leq f(a)$$

$$\Rightarrow\ 0<n(f(x))^n\leq n\big(f(a)\big)^n\ ;\ n>0$$

$$\Rightarrow\ 0<\int_a^1 n(f(x))^n\,dx\leq\int_a^1 n\big(f(a)\big)^n\,dx$$

$$\Rightarrow\ 0<\int_a^1 n(f(x))^n\,dx\leq n(1-a)\big(f(a)\big)^n\quad(\sharp)$$

التمرين الرابع | III | 4 | ب

$$0<a<1\ \Big|\ \Rightarrow\ f(1)<f(a)<f(0)$$

$$\Rightarrow\ 2\,e^{-2}<f(a)<1$$

$$\Rightarrow\ \ln\big(f(a)\big)<\ln 1$$

$$\Rightarrow\ \ln\big(f(a)\big)<0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-a)\big(f(a)\big)^n$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n(1-a)e^{n\ln(f(a))}\quad ;\ \ln\big(f(a)\big)<0$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n\ln(f(a))\,e^{n\ln(f(a))}\left(\frac{1-a}{\ln\big(f(a)\big)}\right)$$

$$=\lim_{\substack{m\to-\infty\\ m=n\ln(f(a))}}(me^m)\left(\frac{1-a}{\ln\big(f(a)\big)}\right)$$

$$=0\times\underbrace{\left(\frac{1-a}{\ln\big(f(a)\big)}\right)}_{\text{this is a real number}}=0$$

إذن التأطير $(\sharp)$ يُصبح :

$$\underbrace{0}_{\xrightarrow[n\infty]{}0}<\int_a^1 n(f(x))^n\,dx\leq\underbrace{n(1-a)\big(f(a)\big)^n}_{\xrightarrow[n\infty]{}0}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n\infty}\left(\int_a^1 n(f(x))^n\,dx\right)=0$$

التمرين الرابع | III | 4 | ج

$$\lim_{n\infty}u_n=1\ \Leftrightarrow\ \lim_{n\infty}\left(\int_0^1 n(f(x))^n\,dx\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{n\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n\,dx\right)+\lim_{n\infty}\left(\int_a^1 n(f(x))^n\,dx\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{n\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n\,dx\right)+0=1$$

$$\Leftrightarrow\ \lim_{n\infty}\left(\int_0^a n(f(x))^n\,dx\right)=1\quad ;\ \forall\,a\in\,]0,1[$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2006

التمرين الأول I 1

نلاحظ في البداية أن المجموعة G جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

لتكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ مصفوفتين من G .

$$\begin{aligned} M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \; ; \; (b,d) \neq (0,0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+bc & bd \end{pmatrix} \; ; \; \begin{cases} a+bc \neq 0 \\ bd \neq 0 \end{cases} \\ &= M_{(a+bc\,,bd)} \in \boldsymbol{G} \end{aligned}$$

و بالتالي G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول I 2

لدينا $\times$ قانون تجميعي في $(G,\times)$.

لأن G جزء مستقر من الزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

و لدينا كذلك $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد للضرب $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن I هو نفسه العنصر المحايد للضرب $\times$ في G .

و ذلك لأن : $I = M_{(0,1)} \in G$.

لتكن $M_{(a,b)}$ مصفوفة من G .

تكون المصفوفة $M_{(a,b)}$ قابلة للقلب في G بالنسبة لـ $\times$

إذا و فقط إذا كان $det(M_{(a,b)}) \neq 0$.

لدينا : $det(M_{(a,b)}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b - 0 = b$

و بما أن $M_{(a,b)} \in G$ فإن : $b \neq 0$.

و منه : $det(M_{(a,b)}) = b \neq 0$.

إذن $M_{(a,b)}$ تقبل مقلوبا في G و سوف نحدد مقلوب هذه المصفوفة بالعلاقة التالية : $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{detA}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

لدينا :
$$\begin{aligned} (M_{(a,b)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{det(M_{(a,b)})}\begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-a}{b} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و لدينا :
$$\begin{aligned} b \neq 0 &\Rightarrow \frac{1}{b} \neq 0 \\ &\Rightarrow M_{\left(\frac{-a}{b},\, \frac{1}{b}\right)} \in G \end{aligned}$$

و بالتالي كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مماثلا $M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)}$ في G بالنسبة لـ $\times$.

لنبين الآن أن $\times$ ليس تبادليا في G . و من أجل ذلك نعطي مثالا مضادا :

نعتبر المصفوفتين $M_{(1,1)}$ و $M_{(2,2)}$.

$$\begin{cases} M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ M_{(2,2)} \times M_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

نلاحظ أن : $M_{(1,1)} \times M_{(2,2)} \neq M_{(2,2)} \times M_{(1,1)}$.

إذن $\times$ ليس تبادليا في G .

خلاصة : $(G,\times)$ **زمرة غير تبادلية** .

$\times$ ليس تبادليا في G .

$\times$ تجميعي في G
$\times$ يقبل عنصرا محايدا $M_{(0,1)}$
مماثلة $M_{(a,b)}$ في G هي $M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)}$

التمرين الأول I 3

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا : $H = \{ M_{(a,b)} \in G \; ; \; b > 0 \}$

لدينا حسب ما سبق : $I = M_{(0,1)} \in H$

و بما أن $1 > 0$ فإن $M_{(0,1)} \in H$.

و منه H جزء غير فارغ من G .

لتكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ مصفوفتين من H .

لدينا :
$$\begin{aligned} M_{(a,b)} \times (M_{(c,d)})^{-1} &= M_{(a,b)} \times M_{\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-c}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(a - \frac{bc}{d}\right) & \frac{b}{d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

بما أن $d > 0$ و $b > 0$ فإن $\frac{b}{d} > 0$.

و منه :
$$\begin{aligned} M_{(a,b)} \times (M_{(c,d)})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(a - \frac{bc}{d}\right) & \frac{b}{d} \end{pmatrix} \\ &= M_{\left(\left(a-\frac{bc}{d}\right),\frac{b}{d}\right)} \in H \end{aligned}$$

و بالتالي نستنتج حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية أن $(H,\times)$ زمرة جزئية من الزمرة الأم $(G,\times)$.

التمرين الأول I 4

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين .

الطريقة الأولى : ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا : $M_{(a,1)} \times M_{(b,1)} = M_{(a+b\,,1)}$

إذن : $M_{(a_1\,,1)} \times M_{(a_2\,,1)} \times \cdots \times M_{(a_n\,,1)} = M_{(\sum a_i\,;1)}$.

و منه : $M_{(a\,,1)} \times M_{(a\,,1)} \times \cdots \times M_{(a\,,1)} = M_{(na\,;1)}$.

و بالتالي : $(M_{(a,1)})^n = M_{(na\,,1)}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

أي : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

الطريقة الثانية : استعمال البرهان بالترجع .

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي : $(P_n) \; : \; A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$

من أجل $n = 1$ لدينا $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = A$

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و نفترض أن (P_n) صحيحة

$$\begin{aligned} (P_n) \; est \; vraie \; &\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (P_{n+1}) \; est \; vraie \end{aligned}$$

لقد حصلنا إذن على الوضعية التالية : $\begin{cases} (P_1) \; est \; vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) \; ; \; (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n) \; est \; vraie$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

يعني : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

II 1 التمرين الأول

لتكن $M_{(a,b)}$ و $M_{(c,d)}$ مصفوفتين من G .

لدينا : $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(a+bc\,,bd)}$

و منه :
$$\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}\right) = \varphi\left(M_{(a+bc\,,bd)}\right) = (a+bc\,;bd) \quad (1)$$

و لدينا كذلك :
$$\varphi\left(M_{(a,b)}\right) \top \varphi\left(M_{(c,d)}\right) = (a,b) \top (c,d) = (a+bc\,;bd) \quad (2)$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :
$$\varphi\left(M_{(a,b)} \times M_{(c,d)}\right) = \varphi\left(M_{(a,b)}\right) \top \varphi\left(M_{(c,d)}\right)$$

إذن φ تشاكل من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

ليكن (c,d) عنصرا من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

و لنحل في G المعادلة ذات المجهول $M_{(x,y)}$ التالية: $\varphi\left(M_{(x,y)}\right) = (c,d)$

هذه المعادلة تُصبح : $(x,y) = (c,d)$.

و منه : $x = c$ و $y = d$.

إذن المعادلة $\varphi\left(M_{(x,y)}\right) = (c,d)$ تقبل حلا وحيدا في G

و هو المصفوفة $M_{(c,d)}$.

أو بتعبير جميل نكتب :
$$(\forall\,(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*),(\exists!\; M_{(x,y)} \in G) : \varphi\left(M_{(x,y)}\right) = (c,d)$$

إذن φ تقابل من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

خلاصة : φ تشاكل تقابل من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.

II 2 التمرين الأول

نعلم أن التشاكل التقابلي يُحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$. فإنه بإمكاننا استنتاج البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(G,\times)$ و ذلك عن طريق التشاكل التقابلي φ .

لدينا $(G,\times)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو المصفوفة $M_{(0,1)}$ و كل مصفوفة $M_{(a,b)}$ من G تقبل مماثلة $M_{\left(\frac{-a}{b},\frac{1}{b}\right)}$ في G بالقانون $\times$.

إذن $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\top$ هو $\varphi\left(M_{(0,1)}\right)$ و كل زوج (c,d) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ بالقانون $\top$ و هو $\varphi\left(\left(M_{(c,d)}\right)^{-1}\right)$.

يعني $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\top$ هو الزوج $(0,1)$ و كل زوج (c,d) من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ بالقانون $\top$ و هو الزوج $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$.

II 3 التمرين الأول

للإجابة على هذا السؤال سوف نحتاج إلى استعمال صندوق الأدوات التالي :

- φ تشاكل
- تعريف التطبيق φ
- $\left(M_{(a,1)}\right)^n = M_{(na,1)}$
- $\left(\frac{-c}{d},\frac{1}{d}\right)$ هو مماثل (c,d) بالنسبة لـ $\top$

$$\begin{aligned}
&[(a,1) \top (a,1) \top \cdots \top (a,1)]' \\
&= \left[\varphi\left(M_{(a,1)}\right) \top \varphi\left(M_{(a,1)}\right) \top \cdots \top \varphi\left(M_{(a,1)}\right)\right]' \\
&= \left[\varphi\left(M_{(a,1)} \times M_{(a,1)} \times \cdots \times M_{(a,1)}\right)\right]' \\
&= \left[\varphi\left(\left(M_{(a,1)}\right)^n\right)\right]' \\
&= \left[\varphi\left(M_{(na,1)}\right)\right]' \\
&= (na,1)' \\
&= \left(\frac{-na}{1},\frac{1}{1}\right) \\
&= (-na,1)
\end{aligned}$$

أ 1 التمرين الثاني

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ حل لـ } (E) &\Leftrightarrow x^2(x+y) = y^2(x-y)^2 \\
&\Leftrightarrow (ad)^2(ad+bd) = (bd)^2(ad-bd)^2 \\
&\Leftrightarrow a^2d^3(a+b) = b^2d^3(a-b)^2d \\
&\Leftrightarrow a^2(a+b) = b^2d(a-b)^2 \;;\; d^3 \neq 0
\end{aligned}$$

ب 1 التمرين الثاني

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى أربع أدوات .

الأداة الأولى : $(PGCD)$.

$$a \wedge b = 1 \;\Rightarrow\; a^m \wedge b^n = 1 \;;\; \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$$

الأداة الثانية : $(Gauss)$. a/bc et $a \wedge c = 1 \;\Rightarrow\; a/b$

الأداة الثالثة : $(Bezout)$.

$$a \wedge b = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists\,(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \;;\; ma+nb = 1$$

الأداة الرابعة : (التأليفة الخطية) .

$$\begin{cases} a/b \\ a/c \end{cases} \;\Rightarrow\; \forall\,(m,n) \in \mathbb{Z} \;;\; a/(mb+nc)$$

الأداة الخامسة : $(Diophante)$.

$$a \wedge b = d \;\Rightarrow\; \exists\,(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \;;\; ma+nb = d$$

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) حيث $d = x \wedge y$.

إذن حسب الأداة الخامسة يوجد u و v من $\mathbb{Z}$ حيث $xu+yv = d$.

يعني : $ad\,u + bd\,v = d$.

نختزل بالعدد الغير منعدم d فنحصل على : $au+bv = 1$

و منه حسب $Bezout$ نستنتج أن : $a \wedge b = 1$.

إذن حسب الأداة الأولى نستنتج أن : $a^2 \wedge b = 1$ $(*)$

بما أن (x,y) حل للمعادلة (E) فإنه حسب السؤال أ) :

نكتب : $db^2(a-b)^2 = (a+b)a^2$.

نضع : $k = bd(a-b)^2 \in \mathbb{Z}$

إذن $(a+b)\,a^2 = kb$ يعني أن $b/(a+b)a^2$.

و بما أن $a^2 \wedge b = 1$ حسب $(*)$ فإنه حسب $Gauss$: $b/(a+b)$

و نعلم أن $b/(-b)$ إذن حسب الأداة الرابعة

نستنتج أن $b/(a+b-b)$ يعني b/a (1)

و نعلم حسب ما سبق أن : $a \wedge b = 1$. (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $b = 1$

ج 1 التمرين الثاني

سوف نستعمل البرهان بالخلف . و نفترض أن $a = 1$.

لدينا $x = ad$ و $y = bd$ و $b = 1$.

إذن $x = d$ و $y = d$.

بما أن الزوج $(x\,,y)$ حل للمعادلة (E) .

فإن : $d^2(d+d) = d^2(d-d)^2$.

يعني أن : $2d^3 = 0$. أي : $d = 0$.

و هذا تناقض واضح لأن $d = x \wedge y \neq 0$.

إذن ما افترضناه كان خاطئا . و بالتالي $a \neq 1$.

من جهة أخرى لدينا : $a-(a-1) = 1$.

يعني : $1a - 1(a-1) = 1$.

إذن حسب $Bezout$ نستنتج أن : $a \wedge (a-1) = 1$.

و منه حسب الأداة الأولى نستنتج أن $a^2 \wedge (a-1) = 1$ (3) .

لدينا $b = 1$ إذن حسب نتيجة السؤال أ): $(a+1)a^2 = d(a-1)^2$

نضع : $k = d(a-1) \in \mathbb{Z}$ إذن : $(a+1)a^2 = k(a-1)$.

و منه : $(a-1)/(a+1)a^2$ (4) .

من (3) و (4) نستنتج حسب $Gauss$ أن $(a-1)/(a+1)$.

التمرين الثاني 1 د

لدينا : $\begin{cases} (a-1)/(a+1) \\ (a-1)/(a-1) \end{cases}$ إذن $\begin{cases} a \equiv -1\ [a-1] \\ a \equiv 1\ [a-1] \end{cases}$.

و منه نستنتج من هاتين المتوافقتين أن : $1 \equiv -1\ [a-1]$

أي : $2 \equiv 0\ [a-1]$.

يعني أن العدد $(a-1)$ يقسم العدد 2 .

و نعلم أن القواسم الصحيحة الطبيعية للعدد 2 هي 1 و 2 فقط .

إذن : $a-1=1$ أو $a-1=2$.

يعني : $a=2$ أو $a=1$.

التمرين الثاني 2

لنحل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة (E) .

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

إذن حسب النتائج السابقة نستنتج أن : $\begin{cases} x = ad \\ y = bd \\ x \wedge y = d \\ b = 1 \\ a = 2 \text{ أو } a = 3 \end{cases}$

نفصل إذن بين حالتين .

الحالة الأولى : إذا كان $a = 2$.

إذن $(a,b) = (2,1)$ و منه $(x,y) = (2d,d)$.

و منه : $(E)\ :\ (2d)^2(2d+d) = d^2d^2$.

يعني : $(4d^2)(3d)$ أي : $d = 12$.

و بالتالي : $(x,y) = (2d,d) = (24,12)$.

الحالة الثانية : إذا كان $a = 3$.

إذن : $(a,b) = (3,1)$ و منه : $(x,y) = (3d,d)$.

و منه : $(E) :\ (3d)^2(3d+d) = d^2(2d)^2$.

يعني : $36d^3 = 4d^4$ أي $d = 9$.

و بالتالي : $(x,y) = (3d,d) = (27,9)$

عكسيا نلاحظ أن : $24^2(24+12) = 12^2(24-12)^2$

و كذلك : $27^2(27+9) = 9^2(27-9)^2$

خلاصة : الزوجان $(24,12)$ و $(27,9)$ هما الحلان الوحيدان للمعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

التمرين الثالث I 1

نضع : $\begin{cases} z = x + iy\ ;\ (x,y)\ \epsilon\ \mathbb{R}^2 \\ aff(M) = z \end{cases}$

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2 - (2+6i)z \\ &= (x+iy)^2 - (2+6i)(x+iy) \\ &= x^2 - y^2 + 2i\,xy - (2x + 2i\,y + 6i\,x - 6y) \\ &= x^2 - y^2 + 2i\,xy - 2x - 2i\,y - 6i\,x + 6y \\ &= (x^2 - y^2 - 2x + 6y) + i(2xy - 2y - 6x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(z)\ \epsilon\ i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \Re e\big(P(z)\big) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ (و هذه الكتابة عبارة عن معادلة ديكارتية مميزة للنقط $M(z)$ التي يكون من أجلها $P(z)$ تخيليا)

التمرين الثالث I 2

$$\begin{aligned} M\binom{x}{y}\ \epsilon\ (H) &\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 2x + 6y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x) - (y^2 - 6y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = -8 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y-3)^2 = -8 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{(y-3)^2}{(2\sqrt{2})^2} = -1 \end{aligned}$$

إذن (H) هذلول مركزه النقطة $C(1,0)$ و رأساه هما $B\left(1\,;3+2\sqrt{2}\right)$ و $\bar{B}\left(1\,;3-2\sqrt{2}\right)$. و مقارباه هما المستقيمان (Δ) و (Δ') المعرفين بما يلي : $\begin{cases} (\Delta) : y - 3 = x - 1 \\ (\Delta') : y - 3 = 1 - x \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} (\Delta) : y = x + 2 \\ (\Delta') : y = 4 - x \end{cases}$

التمرين الثالث I 3

لدينا : $0^2 - 0^2 - 2\times 0 + 6\times 0 = 0$.

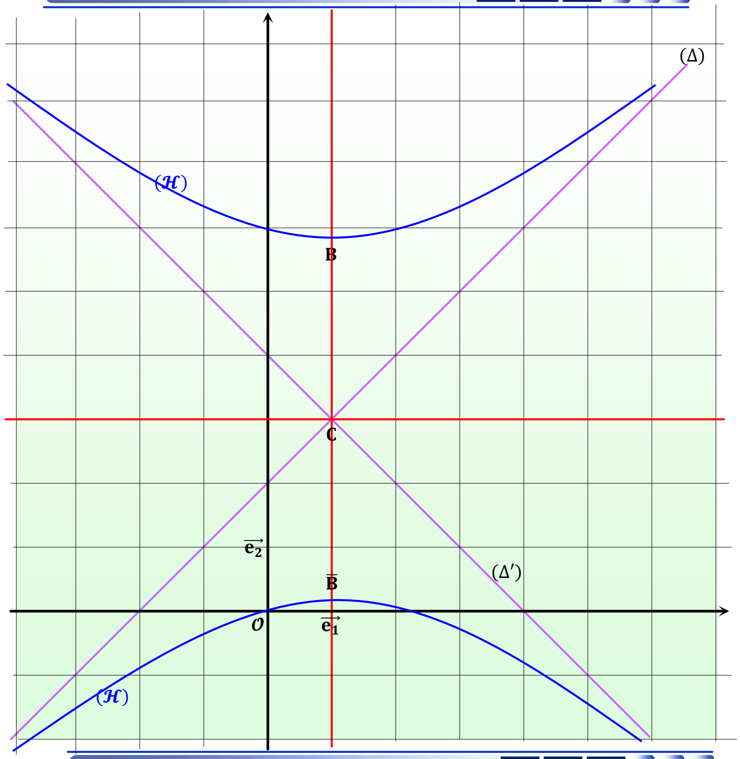
إذن : $O(0,0)\ \epsilon\ (H)$.

معادلة المماس (T_O) للهذلول (H) في النقطة O تُكتب بصفة عامة على شكل : $(T_O)\ :\ xx_0 - yy_0 = (x + x_0) - 3(y + y_0)$

في حالتنا هذه لدينا $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$.

إذن معادلة المماس (T_O) تُكتب على شكل : $(T_O):\ x - 3y = 0$

التمرين الثالث I 4



التمرين الثالث II 1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 4 - 6i$.

يعني : $z^2 - (2+6i)z + (6i-4) = 0$.

لدينا : $\Delta = (2+6i)^2 - 4(6i-4)$.

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{(2+6i)+4i}{2} = 1 + 5i \\ z_2 = \dfrac{(2+6i)-4i}{2} = 1 + i \end{cases}$$

التمرين الثالث II 2 أ

لدينا $u = 1 + 5$ و $v = 1 + i$ و $w = 239 - i$.

لدينا حسب مثلث $Pascal$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

$\boxed{1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1}$: معاملات الحدودية $(a+b)^4$

إذن :

$$\begin{aligned} u^4 &= (1+5i)^4 \\ &= 1^4 + 4(5i) + 6(5i)^2 + 4(5i)^3 + (5i)^4 \\ &= 1 + 20\,i - 150 - 500\,i + 625 \\ &= 476 - 480\,i \end{aligned}$$

و منه :
$$\begin{aligned} u^4 \times v &= (476-480i)(1+i) \\ &= 476+476i-480i+480 \\ &= 956-4i \\ &= 4(239-i) \\ &= 4w \end{aligned}$$
و بالتالي : $u^2 \times v = 4w$

التمرين الثالث II 2 ب

$$\begin{aligned} \alpha = Arctan\left(\frac{1}{5}\right) \ &\Leftrightarrow\ \tan(\alpha) = \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow\ 5 = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ &\Leftrightarrow\ 5i = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) i \\ &\Leftrightarrow\ 1+5i = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) i + 1 \\ &\Leftrightarrow\ u = \frac{\sin\alpha + i\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ &\Leftrightarrow\ u = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) \\ &\Leftrightarrow\ u = \frac{1}{\sin\alpha}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right) \end{aligned}$$

لدينا : $\sin\alpha \approx 0{,}19 \neq 0$ إذن : $\arg(a) \equiv \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\ [2\pi]$

من جهة أخرى لدينا : $\beta = Arctan\left(\frac{1}{239}\right) \Leftrightarrow \tan\beta = \frac{1}{239}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ 239 = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \\ &\Leftrightarrow\ 239 - i = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - i \\ &\Leftrightarrow\ w = \frac{\cos\beta - i\sin\beta}{\sin\beta} \\ &\Leftrightarrow\ w = \frac{1}{\sin\beta}(\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)) \\ &\Leftrightarrow\ w = \left(\frac{1}{\sin\beta}\right) e^{-\beta i} \\ &\Rightarrow\ \arg(w) \equiv -\beta\ [2\pi] \end{aligned}$$

التمرين الثالث II 2 ج

لدينا في البداية : $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$\Rightarrow \arg(v) \equiv arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

من جهة أخرى: $u^4 \times v = w$
$$\begin{aligned} &\Rightarrow \arg(u^4 \times v) \equiv \arg(w)\ [2\pi] \\ &\Rightarrow 4\arg(u) + \arg(v) \equiv arg(w)\ [2\pi] \\ &\Rightarrow 4\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{\pi}{4} \equiv -\beta\ [2\pi] \\ &\Rightarrow 4\alpha - \beta \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ &\Rightarrow (\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ (4\alpha-\beta) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned}$$

نستعين بالآلة الحاسبة و نضبط وحدة قياس الزوايا على الراديان rad .

لدينا $\alpha \approx 0{,}2\, rad$ و $\beta \approx 0{,}004\, rad$.

و نلاحظ أن $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$.

و من هذين التأطيرين نحصل على $-1 < (4\alpha - \beta) < 4$.

أي : $-1 < \frac{\pi}{4} + 2k\pi < 4$ و منه : $-0{,}3 < k < 0{,}5$.

و بما أن : $k\epsilon\mathbb{Z}$. فإن : $k = 0$. و بالتالي : $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$.

أي : $4\ Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$.

التمرين الرابع — الجزء الأول 1

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)\ ;\ g_n(x) = nx + 2\ln x$.

نلاحظ أن g_n دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و هما $x \longrightarrow nx$ و $x \longrightarrow 2\ln x$.

و لدينا : $g_n'(x) = n + \frac{2}{x} = \frac{nx+2}{x} > 0$

إذن g_n دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} g_n(x) &= \lim_{x\to 0^+} (nx + 2\ln x) \\ &= n \times 0^+ + 2 \times (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

و لدينا :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} g_n(x) &= \lim_{x\to +\infty} (nx + 2\ln x) \\ &= n \times (+\infty) + 2 \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

نرسم إذن جدول تغيرات الدالة g_n على النحو التالي :

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	
g_n	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

التمرين الرابع 2

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا .

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\sqrt{x} - \ln x\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' - (\ln x)' \\ &= \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2x} - \frac{2}{2x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}-2}{2x}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}\right) = \boxed{\frac{x-4}{2x\left(\sqrt{x}+2\right)}} \end{aligned}$$

نلاحظ أن : $\frac{1}{2x\left(\sqrt{x}+2\right)} > 0\ ;\ (\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)$

إذن إشارة $h'(x)$ متعلقة بإشارة $(x-4)$.

إذا كان : $x = 4$ فإن : $h'(x) = 0$

إذا كان : $x < 4$ فإن : $h'(x) < 0$

إذا كان : $x > 4$ فإن : $h'(x) > 0$

و لدينا : $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x} - \ln x\right) = +\infty$

و كذلك :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} h(x) &= \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x} - \ln x\right) \\ &= \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(1 - \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \lim_{\substack{u\to +\infty \\ u=\sqrt{x}}} u\left(1 - 2\left(\frac{\ln u}{u}\right)\right) \\ &= (+\infty)(1 - 2(0^+)) \\ &= (+\infty)(1-0) \\ &= (+\infty) \end{aligned}$$

و بالتالي نرسم جدول تغيرات الدالة h كما يلي :

x	0		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	$2-\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

انطلاقا من هذا الجدول الجميل نلاحظ أن $(2-\ln 4)$ قيمة دنوية للدالة h على $]0;+\infty[$

لأن h' تنعدم في 4 و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

يعني : $(\forall x>0)\ ;\ h(x)>2-\ln 4$

و لدينا : $2-\ln 4\approx 0{,}6>0$

إذن : $(\forall x>0)\ ;\ h(x)>0$.

يعني : $(\forall x>0)\ ;\ \sqrt{x}-\ln x>0$.

و بالتالي : $(\forall x>0)\ ;\ \sqrt{x}>\ln x$.

التمرين الرابع | 3 | أ

لدينا g_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

إذن g_n تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $g_n(\,]0,+\infty[\,)$.

و لدينا : $g_n(\,]0,+\infty[\,)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+}g_n(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to 0^+}g_n(x)\right[$

$=\,]-\infty\,;\,+\infty[\,=\mathbb{R}$

إذن g_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

من جهة أخرى لدينا : $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\subset\mathbb{R}_+^*\ ;\ \begin{pmatrix}\forall n\in\mathbb{N}^*\\ n\geq 3\end{pmatrix}$.

و لدينا كذلك : $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=1-2\ln n$.

$$n\geq 3\ \Rightarrow\ 1-2\ln n\leq 1-2\ln 3$$
$$\Rightarrow\ 1-2\ln n\leq -1{,}2<0$$
$$\Rightarrow\ 1-2\ln n<0$$
$$\Rightarrow\ g_n\left(\frac{1}{n}\right)<0\quad (1)$$

و لدينا كذلك : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$=\sqrt{n}+\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

$=\sqrt{n}-\ln n$

لدينا : $n\geq 3>0$ إذن حسب نتيجة السؤال 2) : $\sqrt{n}>\ln n$

و منه $\sqrt{n}-\ln n>0$ أي : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>0\quad (2)$.

من (1) و (2) نستنتج أن : $g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\times g_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$

نتوفر الآن على جميع الشروط اللازمة و الكافية لتطبيق مبرهنة (TVI) .

إذن : $\exists!\ \alpha_n\in\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\ ;\ g_n(\alpha_n)=0$

أي أن المعادلة $g_n(x)=0$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

هناك طريقة أخرى للإجابة دون المرور عبر مبرهنة القيم الوسيطية TVI .

و سوف نستعمل فقط تعريف التطبيق التقابلي و مفهوم السابق و اللاحق

و هذا ما سوف أعرضه الآن بدون فاصل إشهاري :

الطريقة الثانية :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و أكبر من 3 .

$$x\in\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{n}<x<\frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\Rightarrow\ 0<\frac{1}{n}<x$$
$$\Rightarrow\ x>0$$
$$\Rightarrow\ x\in\,]0,+\infty[$$

إذن : $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\subset\,]0,+\infty[\ \ ;\ \begin{pmatrix}\forall n\in\mathbb{N}^*\\ n\geq 3\end{pmatrix}$

و لدينا g_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

إذن g_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على أي مجال يوجد ضمن $]0;+\infty[$.

من أجل ذلك نختار المجال $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

إذن g_n تقابل من $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ نحو $g_n\left(\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\right)$.

و لدينا : $g_n\left(\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\right)=\left]g_n\left(\frac{1}{n}\right)\ ;\ g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right[$

$=\,]1-2\ln n\ ;\ \sqrt{n}-\ln n[$

إذن g_n تقابل من $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ نحو $]1-2\ln n\ ;\ \sqrt{n}-\ln n[$.

لنبين أن 0 ينتمي إلى المجال $]1-2\ln n\ ;\ \sqrt{n}-\ln n[$.

$$n\geq 3\ \Rightarrow\ 1-2\ln n\leq 1-2\ln 3$$
$$\Rightarrow\ 1-2\ln n\leq -1{,}2<0$$
$$\Rightarrow\ 1-2\ln n<0\quad (*)$$

$$n\geq 3\ \Rightarrow\ n>0$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{n}>\ln n\ ;\ d'après\ (2)$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{n}-\ln n>0\quad (**)$$

$$(*)\ et\ (**)\ \Rightarrow\ 1-2\ln n<0<\sqrt{n}-\ln n$$
$$\Rightarrow\ 0\in\,]1-2\ln n\ ;\ \sqrt{n}-\ln n[$$

بما أن g_n تقابل من $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ نحو $]1-2\ln n\ ;\ \sqrt{n}-\ln n[$

و 0 عنصر من المجال $]1-2\ln n\ ;\ \sqrt{n}-\ln n[$. فإن الصفر

يمتلك سابقا واحدا α_n من المجال $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$ بالتقابل g_n .

أو بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha_n\in\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[\ ;\ g_n(\alpha_n)=0$

أو بتعبير أخير : المعادلة $g_n(x)=0$ ذات المجهول α_n تقبل حلا وحيدا

في المجال $\left]\frac{1}{n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

التمرين الرابع | 3 | ب

لدينا : $\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\downarrow n\infty\\ 0}}<\alpha_n<\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\substack{\downarrow n\infty\\ 0}}$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n)=0$

التمرين الرابع — الجزء الثاني | 1 | I

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt[3]{x}\,e^{-x}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}\,e^x}\right)=(+\infty)\left(\frac{1}{1}\right)=+\infty\notin\mathbb{R}$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .

و بذلك نستنتج أن $(\mathcal{C})$ يقبل مماسا رأسيا موجها نحو الأعلى في الصفر .

و هذا المماس هو محور الأراتيب.

التمرين الرابع | 2 | I

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{3}}\,e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}\right)\times\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)=0$$

إذن $(\mathcal{C})$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ و هو محور الأفاصيل .

التمرين الرابع I 3 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا :
$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}e^{-x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' e^{-x} + \left(x^{\frac{1}{3}}\right)\left(e^{-x}\right)'$$
$$= \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\, e^{-x} - e^{-x}\, x^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}}\, e^{-x}\right)\left(\frac{1}{3}x^{-1} - 1\right)$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}}\, e^{-x}\right)\left(\frac{1}{3x} - 1\right)$$
$$= \left(x^{\frac{1}{3}}\, e^{-x}\right)\left(\frac{1-3x}{3x}\right)$$
$$= \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$$

و بالتالي : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

التمرين الرابع I 3 ب

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

نلاحظ أن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ \begin{cases} e^{-x} > 0 \\ 3x > 0 \\ x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln x} > 0 \end{cases}$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ \frac{f(x)}{3x} > 0$

و بذلك فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(1-3x)$.

إذا كان : $x = \frac{1}{3}$. فإن : $f'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{1}{3}$. فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{1}{3}$. فإن : $f'(x) > 0$

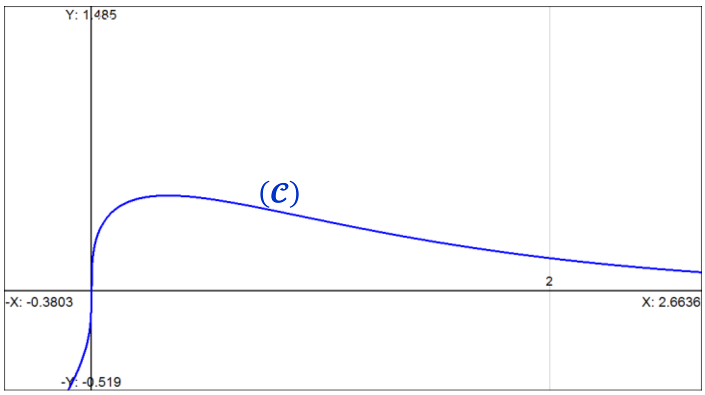
و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

و كذلك : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}}\, e^{-x} = 0$

إذن نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	0

التمرين الرابع I 4



التمرين الرابع II 1 أ

لكي نبين أن $f(I)\subset I$.

يكفي أن نبين الإستلزام التالي : $y\in f(I) \;\Rightarrow\; y\in I$

$$y\in f(I) \;\Rightarrow\; (\exists x\in I)\ ;\ f(x) = y$$
$$\Rightarrow\; x\in I \;\; et \;\; f(x) = y$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{3}\leq x \leq 1 \;\; et \;\; f(x) = y$$
$$\Rightarrow\; f\left(\frac{1}{3}\right) \leq f(x) \leq f(1) \;\; et \;\; f(x) = y$$

$car\ f\ est\ une\ fonction\ croissante\ sur\ \left[\frac{1}{3};1\right]$

$$\Rightarrow\; 0{,}5 \geq y \geq 0{,}36$$
$$\Rightarrow\; 1 > 0{,}5 \geq y \geq 0{,}36 > \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow\; 1 > y > \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow\; y\in \left]\frac{1}{3};1\right[\subset \left[\frac{1}{3},1\right]$$
$$\Rightarrow\; y\in I$$

و بالتالي : $f(I)\subset I$.

التمرين الرابع II 1 ب

لدينا : $(\forall\, x>0)\ ;\ f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x)$

$$x\in I \;\Rightarrow\; x \geq \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow\; f(x) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \;\; car\ f\ est\ \searrow sur\ \left[\frac{1}{3},+\infty\right[$$
$$\Rightarrow\; f(x) \leq 0{,}5 < 1$$
$$\Rightarrow\; f(x) < 1$$
$$\Rightarrow\; \boxed{|f(x)| < 1}\ ;\ car\ f(x) \geq 0$$

(1)

$$x\in I \;\Rightarrow\; x \geq \frac{1}{3} > \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; x > \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow\; 5x > 1$$
$$\Rightarrow\; 3x + 2x > 1$$
$$\Rightarrow\; 2x > 1 - 3x$$
$$\Rightarrow\; 2 > \frac{1-3x}{x} \quad (*)\ ;\ avec\ x > 0$$

$$x\in I \;\Rightarrow\; x\leq 1 \;\Rightarrow\; 1 - x \geq 0$$
$$\Rightarrow\; 1 - 3x + 2x \geq 0$$
$$\Rightarrow\; 1 - 3x \geq -2x$$
$$\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{1-3x}{x}\right) \geq -2}\ ;\ x > 0$$

$(**)$

$$(*)\ et\ (**) \;\Rightarrow\; -2 \leq \frac{1-3x}{x} < 2$$
$$\Rightarrow\; \boxed{\left|\frac{1-3x}{x}\right| < 2} \qquad (2)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1-3x}{3x}\right) f(x) \;\Rightarrow\; |f'(x)| = \frac{1}{3}\cdot\left|\frac{1-3x}{x}\right|\cdot |f(x)|$$
$$\Rightarrow\; |f'(x)| \leq \frac{1}{3}\times 2\times 1\ ;\ d'après\ (1)\ et\ (2)$$
$$\Rightarrow\; |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$$

التمرين الرابع II 1 ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا .

$$\begin{aligned}
f(x)=x &\iff \sqrt[3]{x}\,e^{-x}=x \implies x\,e^{-3x}=x^3\\
&\implies e^{-3x}=x^2\ ;\ car\ x\neq 0\\
&\implies \ln(e^{-3x})=\ln(x^2)\\
&\implies -3x=2\ln x\\
&\implies 3x+2\ln x=0\\
&\implies g_3(x)=0
\end{aligned}$$

و من خلال نتيجة السؤال 3) أ) من الجزء الأول، رأينا أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n حيث $\left]\frac{1}{n}\,;\frac{1}{\sqrt{n}}\right[$.

إذن المعادلة $g_3(x)=0$ هي الأخرى تقبل حلا وحيدا α_3 حيث $\frac{1}{3}<\alpha_3<\frac{1}{\sqrt{3}}$

و بالتالي المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا و هو α_3 حيث $\frac{1}{3}<\alpha_3<\frac{1}{\sqrt{3}}$

التمرين الرابع II 2 أ

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $(P_n)\ :\ u_n\in I$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=\frac{1}{3}\in\left[\frac{1}{3}\,;1\right]=I$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$\begin{aligned}
(P_n)\ est\ vraie &\implies u_n\in I\\
&\implies f(u_n)\in f(I)\\
&\implies f(u_n)\in I\ ;\ car\ f(I)\subset I\\
&\implies u_{n+1}\in I\\
&\implies (P_{n+1})\ est\ vraie
\end{aligned}$$

لقد حصلنا إذن على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n)\implies(P_{n+1})\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ (P_n)\ est\ vraie$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{R})\ ;\ u_n\in I$.

التمرين الرابع II 2 ب

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n\in I$.

و لدينا كذلك حسب السؤال ج) : $\alpha_3\in I$.

نستنتج إذن أن : $[u_n\,,\alpha_3]\subset I$.

بما أن f دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على I فإن f متصلة و قابلة للاشتقاق كذلك على المجال $[u_n\,;\,\alpha_3]$.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية (TAF) في هذا المجال على الدالة f نجد : $\exists\, c\in\,]u_n\,;\,\alpha_3[\ ;\ \dfrac{f(u_n)-f(\alpha_3)}{u_n-\alpha_3}=f'(c)$

يعني : $\begin{cases}|f(u_n)-f(\alpha_3)|=|f'(c)|\cdot|u_n-\alpha_3|\\ u_n<c<\alpha_3\end{cases}$

لدينا حسب السؤال 3) : $(\forall x\in I)\ ;\ |f'(x)|\leq\frac{2}{3}$.

إذن من أجل $x=c$ نجد : $f'(c)\leq\frac{2}{3}$.

و منه : $(\forall n\in\mathbb{N}),|f'(c)|\times|u_n-\alpha_3|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |f(u_n)-f(\alpha_3)|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

أي : $(\blacksquare)\quad(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\alpha_3|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$

التمرين الرابع II 2 ج

الطريقة الأولى :

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\alpha_3|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|$.

$$\begin{aligned}
pour\ (n-1)\implies |u_n-\alpha_3| &\leq\frac{2}{3}|u_{n-1}-\alpha_3|\\
&\leq\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-2}-\alpha_3|\\
&\leq\frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-3}-\alpha_3|\\
&\ \ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\
&\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_{n-n}-\alpha_3|
\end{aligned}$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n|u_n-\alpha_3|\quad(*)$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\alpha_3\in I &\implies \frac{1}{3}\leq\alpha_3\leq 1\\
&\implies \frac{-2}{3}\leq\frac{1}{3}-\alpha_3\leq\frac{2}{3}\\
&\implies \left|\frac{1}{3}-\alpha_3\right|\leq\frac{2}{3}\\
&\implies |u_0-\alpha_3|\leq\frac{2}{3}\\
&\implies \left(\frac{2}{3}\right)^n|u_0-\alpha_3|\leq\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\\
&\implies |u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\ ;\ d'après\ (*)
\end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

الطريقة الثانية : (الترجع)

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ |u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

من أجل $n=0$ لدينا : $|u_0-\alpha_3|\leq\frac{2}{3}$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$\begin{aligned}
(P_n)\ est\ vraie &\implies |u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\\
&\implies \frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\\
&\implies |u_{n+1}-\alpha_3|\leq\frac{2}{3}|u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\\
&\quad et\ cela\ d'après\ (\blacksquare)\\
&\implies |u_{n+1}-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\\
&\implies (P_{n+1})\ est\ vraie
\end{aligned}$$

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n)\implies(P_{n+1})\ ;\ \forall\, n\in\mathbb{N}\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع نبين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ (P_n)\ est\ vraie$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha_3|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

التمرين الرابع II 2 د

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha_3| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3$

بما أن $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها هو العدد الحقيقي $\frac{2}{3}$

و هو عدد موجب و أصغر من 1 . إذن : $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$

و بالتالي نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \underbrace{-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3}_{\xrightarrow[n\infty]{} \alpha_3} \leq u_n \leq \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \alpha_3}_{\xrightarrow[n\infty]{} \alpha_3}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim(u_n) = \alpha_3$

التمرين الرابع III 1 أ

لدينا f دالة متصلة على المجال $[0;+\infty[$.

إذن f تقبل عدة دوال أصلية على هذا المجال . و بالخصوص تقبل دالة أصلية h حيث :

$$\begin{cases} h(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ ;\ a \geq 0 \\ h'(x) = f(x)\ ;\ \forall x \geq 0 \\ h(a) = 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{8x} f(t)\,dt \\ &= \int_x^{a} f(t)\,dt + \int_a^{8x} f(t)\,dt\ ;\ a \geq 0 \\ &= -\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_a^{8x} f(t)\,dt\ ;\ a \geq 0 \\ &= -h(x) + h(8x) \end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x \geq 0)\ ;\ F(x) = h(8x) - h(x)$

نلاحظ أن $x \geq 0$ إذن $8x \geq 0$.

و منه فإن الدالة $x \longrightarrow h(8x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$.

و بالتالي F قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $[0;+\infty[$ و كذلك لأن $[0;+\infty[\subset \mathbb{R}$.

التمرين الرابع III 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \big(h(8x) - h(x)\big)' \\ &= 8\,h'(8x) - h'(x) \\ &= 8\,f(8x) - f(x) \\ &= 8\sqrt[3]{8x}\,e^{-8x} - \sqrt[3]{x}\,e^{-x} \\ &= 8\left(8^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x})(e^{-7x}) - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)(e^{-x}) \\ &= (16e^{-7x} - 1)\left(x^{\frac{1}{3}}\,e^{-x}\right) \\ &= (16e^{-7x} - 1)f(x) \end{aligned}$$

نلاحظ أن $\forall x \in [0,+\infty[\ ;\ f(x) \geq 0$.

إذن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(16\,e^{-7x} - 1)$.

إذا كان $x = \frac{\ln 16}{7}$ فإن $F'(x) = 0$.

إذا كان $x > \frac{\ln 16}{7}$ فإن $F'(x) < 0$.

إذا كان $x < \frac{\ln 16}{7}$ فإن $F'(x) > 0$.

و بالتالي : F دالة تزايدية على $\left[0;\frac{\ln 16}{7}\right]$ و تناقصية على $\left[\frac{\ln 16}{7};+\infty\right[$

التمرين الرابع III 2 أ

ليكن x و t عددين حقيقيين حيث $x \leq t \leq 8$.

$$\begin{aligned} x \leq 8x \quad &\Rightarrow\quad t^{\frac{1}{3}} \leq (8x)^{\frac{1}{3}}\ ;\ car\ x > 0 \\ &\Rightarrow\quad e^{-t}\,t^{\frac{1}{3}} \leq e^{-t}(8x)^{\frac{1}{3}}\ ;\ car\ e^{-t} > 0 \\ &\Rightarrow\quad \int_x^{8x}\left(e^{-t}\,t^{\frac{1}{3}}\right)dt \leq \int_x^{8x}\left(e^{-t}(8x)^{\frac{1}{3}}\right)dt \\ &\Rightarrow\quad F(x) \leq (8x)^{\frac{1}{3}}\int_x^{8x} e^{-t}\,dt \\ &\Rightarrow\quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}}\,[-e^{-t}]_x^{8x} \\ &\Rightarrow\quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}}\,(-e^{-8x} + e^{-x}) \\ &\Rightarrow\quad F(x) \leq 2x^{\frac{1}{3}}\,e^{-x}\,(1 - e^{-7x}) \\ &\Rightarrow\quad F(x) \leq 2\,f(x)\,(1 - e^{-7x}) \qquad (1) \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ f(x) \geq 0$

و لدينا : $(\forall x \geq 0)\ ;\ F(x) = \int_x^{8x} f(t)\,dt$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ F(x) \geq 0 \quad (2)$

لأن F عبارة عن دالة أصلية لدالة موجبة إذن فهي موجبة كذلك .

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 0)\ ;\ 0 \leq F(x) \leq 2\,f(x)(1 - e^{-7x})$$

التمرين الرابع III 2 ب

ننطلق من التأطير التالي :

$$(\forall x \geq 0)\ ;\ 0 \leq F(x) \leq 2\,f(x)(1 - e^{-7x})$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} 2f(x)(1 - e^{-7x}) &= 2 \times \lim_{x\to+\infty} f(x) \times \lim_{x\to+\infty}(1 - e^{-7x}) \\ &= 2 \times 0 \times (1 - 0) = 0 \end{aligned}$$

إذن التأطير السابق يُصبح :

$$\boxed{\underbrace{0}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} \leq F(x) \leq \underbrace{2\,f(x)(1 - e^{-7x})}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}}$$

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$

التمرين الرابع III 2 ج

نلخص النتائج التي تم التوصل إليها بخصوص الدالة F في الجدول التالي :

x	0		$\frac{\ln 16}{7}$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$F\left(\frac{\ln 16}{7}\right)$	$\searrow$	0

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2006

التمرين الأول 1

الطريقة المباشرة : $card(\Omega) = 6^4 = 1296$

الطريقة التقليدية : توزيع أربع كرات مرقمة من 1 إلى 4 على ستة أشخاص مرقمين من A إلى F بحيث يمكن لكل شخص أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات، يمكن أن يتم بخمس طرق مختلفة :

الطريقة الأولى : إعطاء شخص واحد الكرات الأربع. و من أجل ذلك توجد C_6^1 إمكانية لاختيار الشخص الذي سوف نعطيه الكرات الأربع.

الطريقة الثانية : إعطاء شخص واحد الكرة الأولى ثم إعطاء شخص ثاني الكرات الثلاث المتبقية. و من أجل ذلك لدينا :

- C_6^2 إمكانية لاختيار الشخصين اللذين سوف يستفيدان من الكرات.
- إمكانيتين لتبادل الأدوار بينهما
- C_4^1 إمكانية لاختيار الكرة
- C_3^3 إمكانية لاختيار الكرات الثلاث

إذن هذه الحالة تتحقق في $2 \times C_6^2 \times C_4^1 \times C_3^3$ إمكانية .

الطريقة الثالثة : إعطاء شخص واحد كرتين و شخص ثاني كرتين. و من أجل ذلك توجد :

- C_6^2 إمكانية لاختيار الشخصين المستفيدين.
- C_4^2 إمكانية لاختيار كرتين لإعطائها لأحد الشخصين
- C_2^2 إمكانية لاختيار الكرتين المتبقيتين لإعطائهما للشخص الآخر

إذن هذه الحالة تتحقق في $C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2$ إمكانية .

الطريقة الرابعة : إعطاء شخص واحد كرة واحدة، و شخص ثاني كرة واحدة و شخص ثالث كرتين. و من أجل ذلك توجد :

- C_6^2 إمكانية لاختيار الأشخاص الثلاثة المستفيدون .
- 3 إمكانيات لتبادل الأدوار بينهم .
- C_4^2 إمكانية لاختيار الكرتين .
- C_2^1 إمكانية لاختيار الكرة الأولى .
- C_1^1 إمكانية لاختيار الكرة الثانية .

إذن هذه الحالة تتحقق في $3 \times C_6^3 \times C_4^2 \times C_2^1 \times C_1^1$ إمكانية .

الطريقة الخامسة : نعطي كل شخص من الأشخاص الستة كرة واحدة. و من أجل ذلك توجد :

- إمكانية لاختيار الأشخاص الأربعة المستفيدون.
- إمكانية لتوزيع الكرات الأربع على هؤلاء الأشخاص الأربعة

إذن تتحقق هذه الحالة في $4! \times C_6^4$ إمكانية.

التطبيق العددي :

الطريقة	1	2	3	4	5
عدد الامكانيات	6	120	90	720	360

و بالتالي عدد الإمكانيات لتوزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو :

$$card(\Omega) = 6 + 120 + 90 + 720 + 360 = 1296$$

التمرين الأول 2

الشخص A يمكنه أن يحصل على :

- كرة واحدة بـ C_4^1 إمكانية .
- أو يحصل على كرتين بـ C_4^2 إمكانية .
- أو يحصل على ثلاث كرات بـ C_4^3 إمكانية .
- أو يحصل على أربع كرات بإمكانية واحدة .

إذن عدد الإمكانيات التي يحصل فيها الشخص A على كرة واحدة على الأقل هو : $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$.

إذن احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل يساوي :

$$\frac{15}{1296} \approx 0{,}0115 \equiv 1{,}15\%$$

التمرين الأول 3

ليكن m عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص C .

و ليكن n عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص B .

الحدث الذي نحن بصدد حساب احتماله يُحتم على الشخص A الحصول على $(m+n)$ كرة. و نعلم أن العدد الإجمالي للكرات التي سوف تُوزّع هو 4

إذن يجب أن يكون $m + n + (m+n) \leq 4$.

يعني : $2(m+n) \leq 4$. أي : $m + n \leq 2$.

يبين الجدول التالي الحالات الممكنة لاختيار m و n حيث $m + n \leq 2$

	A	B	C
	(m+n)	n	m
الحالة الأولى	0	0	0
الحالة الثانية	1	1	0
الحالة الثالثة	2	2	0
الحالة الرابعة	1	0	1
الحالة الخامسة	2	1	1
الحالة السادسة	2	0	2

لنحدد الآن عدد الإمكانيات التي تُحقق كل حالة .

في الحالة **الأولى** : لا يحصل أي شخص من الأشخاص A و B و C على أية كرة . يعني أن الكرات الأربع وزعت على الأشخاص D و E و F .

- و من أجل ذلك يمكن إعطاء الكرات الأربع لشخص واحد بـ C_3^1 إمكانية
- أو إعطاء شخص 3 كرات و شخص آخر كرة واحدة بـ $2 \times C_3^2 \times C_4^1$ إمكانية .
- أو إعطاء شخص كرتين و شخص آخر كرتين بـ $C_3^2 \times C_4^2$ إمكانية .
- أو إعطاء شخصين كرة لكل واحد و إعطاء كرتين لشخص ثالث بـ $3 \times C_3^3 \times C_4^2 \times C_2^1$ إمكانية .

إذن تتحقق الحالة الأولى في 81 إمكانية حيث

$$C_3^1 + 2C_3^2 C_4^1 + C_3^2 C_4^2 + 3C_3^3 C_4^2 C_2^1 = 81$$

في الحالة **الثانية** : يحصل A و B على كرى لكل واحد منهما و الشخص C لا يحصل على أية كرة . و من أجل ذلك ، لتوزيع كرتين على A و B توجد $C_4^1 C_3^1$ إمكانية و لتوزيع الكرتين المتبقيتين على D و E و F : يمكنإعطاء الكرتين لشخص واحد بـ C_3^1 إمكانية . و يمكن إعطاء كرة لكل شخص بـ $C_3^2\ C_2^1$ إمكانية .

إذن تتحقق الحالة الثانية في 108 إمكانيات حيث

$$C_4^1 C_3^1 (C_3^1 + C_3^2 C_2^1) = 108$$

في الحالة **الثالثة** : يحصل الشخص A على كرتين و الشخص B على كرتين. و من أجل ذلك : توجد $C_2^2 C_4^2 = 6$ إمكانية للقيام بذلك .

في الحالة **الرابعة** : يحصل الشخص A على كرة واحدة و الشخص C على كرة واحدة و الشخص C لا يحصل على أية كرة و هي الحالة مشابهة للحالة الثانية . إذن توجد 108 إمكانية للقيام بذلك

حيث $C_4^1\ C_3^1 (C_3^1 + C_3^2\ C_2^1) = 108$.

في الحالة **الخامسة** : يحصل الشخص A على كرتين و الشخص B على كرة واحدة و الشخص C على كرة واحدة و من أجل ذلك توجد $C_4^2 C_2^1 C_1^1 = 12$ إمكانية للقيام بذلك .

في الحالة **السادسة** : يحصل الشخص A على كرتين و الشخص C على كرتين . و من أجل ذلك توجد $C_4^2 C_2^2 = 6$ إمكانية للقيام بذلك

.

الخلاصة :

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة	الحالة الرابعة	الحالة الخامسة	الحالة السادسة
81 امكانية	108 امكانية	06 امكانيات	108 امكانية	12 امكانية	06 امكانيات

إذن عدد الإمكانيات التي يكون فيها مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A هو : $81 + 108 + 6 + 108 + 12 + 6 = 321$. و بالتالي احتمال هذا الحدث هو $\frac{321}{1296} = 0{,}247 \equiv 24{,}7\%$.

التمرين الثاني | I | 1 |

نضع $z = x + iy$.

$$
\begin{aligned}
f(z) = 0 \;&\Leftrightarrow\; (1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z} = 0 \\
&\Leftrightarrow\; (1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy) = 0 \\
&\Leftrightarrow\; (3x - \sqrt{3}y) + i(-y + \sqrt{3}x) = 0 \\
&\Leftrightarrow\; \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0 \\ -y + \sqrt{3}x = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\; \begin{cases} 3x = \sqrt{3}y \\ 3x = \sqrt{3}y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow\; z = x + i\sqrt{3}\,x \\
&\Leftrightarrow\; z = x(1 + i\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ في $\mathbb{C}$ تُكتب على الشكل :

$$S = \left\{ x(1 + i\sqrt{3}) \;;\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

التمرين الثاني | II | 1 | أ

في هذا السؤال سوف نستعمل المتفاوتة المثلثية $|z + z'| \le |z| + |z'|$ و كذلك العلاقة $|z| = |\bar{z}|$

$$|f(z_n)| = \left| \frac{1}{6}\left((1 + i\sqrt{3})z_n + 2\overline{z_n} \right) \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow\; |f(z_n)| \le \frac{1}{6}\left|(1 + i\sqrt{3})z_n\right| + \frac{1}{6}\left|2\overline{z_n}\right| \\
&\Rightarrow\; |f(z_n)| \le \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot |z_n| + \frac{2}{6}\left|\overline{z_n}\right| \\
&\Rightarrow\; |f(z_n)| \le \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot |z_n| + \frac{2}{6}\left|z_n\right| \\
&\Rightarrow\; |f(z_n)| \le \frac{2}{3} \cdot |z_n| \\
&\Rightarrow\; |z_{n+1}| \le \frac{2}{3} \cdot |z_n| \\
&\Rightarrow\; u_{n+1} \le \frac{2}{3} \cdot u_n
\end{aligned}
$$

و نعلم أن معيار أي عدد عقدي هو عدد حقيقي موجب دائما .

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \;;\; 0 \le u_{n+1} \le \frac{2}{3}u_n \quad (*)$.

التمرين الثاني | II | 1 | ب

$$On\ a \;:\; 0 \le u_{n+1} \le \frac{2}{3}u_n$$

$$
\begin{aligned}
pour\ (n-1) \;:\; 0 \le u_n &\le \frac{2}{3}u_{n-1} \\
&\le \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u_{n-2} \\
&\le \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)u_{n-3} \\
&\le \left(\frac{2}{3}\right)^n u_{n-n}
\end{aligned}
$$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \;;\; 0 \le u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0$

أي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \;;\; 0 \le u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

نلاحظ أن $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها هو $\frac{2}{3}$ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1 .

إذن : $\boxed{\lim_{n\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0}$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$0 \le \underset{\underset{0}{\swarrow\, n\infty}}{u_n} \le \underset{\underset{0}{\swarrow\, n\infty}}{\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim(u_n) = 0$

التمرين الثاني | II | 2 | أ

$$
\begin{aligned}
S_n &= OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n \\
&= |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_n| \\
&= u_0 + u_1 + \cdots + u_n
\end{aligned}
$$

و نعلم أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \;;\; 0 \le u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

إذن :

$$
\begin{cases}
u_0 \le \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\
u_1 \le \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\
u_2 \le \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
u_n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{cases}
$$

نجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n \le \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

يعني : $S_n \le \left(\dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right)$

يعني : $S_n \le 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \ge 0 \;&\Rightarrow\; -\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \le 0 \\
&\Rightarrow\; 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \le 1 \\
&\Rightarrow\; 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \le 3 \\
&\Rightarrow\; S_n \le 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \le 3
\end{aligned}
$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \;;\; S_n \le 3}$

التمرين الثاني II 2 ب

لدينا : $S_n = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n$.

و لدينا : $S_{n+1} = OM_0 + OM_1 + \cdots + OM_n + OM_{n+1}$

نلاحظ أن : $OM_0 + \cdots + OM_{n+1} > OM_0 + \cdots + OM_n$

يعني : $S_{n+1} > S_n$

إذن $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية . و بما أنها مكبورة بالعدد 3 ($S_n \leq 3$)

فهي متقاربة .

التمرين الثاني III 1

نضع : $z = re^{i\theta}$ بحيث $\theta \in \left]-\pi,\pi\right]$ و $r \in \mathbb{R}_+^*$

$$f(z) = \frac{1}{6}\left((1+i\sqrt{3})z + 2\bar{z}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(r(1+i\sqrt{3})e^{i\theta} + 2r\,e^{-i\theta}\right)$$

$$= \frac{2r}{3}\left(\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)e^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{2}\right)$$

$$= \frac{2r}{3}\left(\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)\right)$$

$$= \frac{2r}{3}\left(\frac{\cos\theta}{4} + i\frac{\sin\theta}{4} + \frac{i\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} + \frac{\cos\theta}{2} - i\frac{\sin\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{2r}{3}\left(\frac{3\cos\theta}{4} + \frac{i\sqrt{3}\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4} - i\frac{\sin\theta}{4}\right)$$

$$= \frac{2r}{3}\left(\left(\frac{3\cos\theta}{4} - \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4}\right) + \left(\frac{i\sqrt{3}\cos\theta}{4} - i\frac{\sin\theta}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)\right)$$

$$= \frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{i}{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= \frac{2r}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{2r}{3}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\, e^{\frac{i\pi}{6}}$$

التمرين الثاني III 2

لدينا : $\forall\, k \in \{1,2,\cdots,n\}\ ;\ aff\left(f(z_{k-1})\right) = M_k$

و لدينا : $f(z) = \left(\frac{2r}{3}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\, e^{\frac{i\pi}{6}}$

$$\Rightarrow\ f(z_{k-1}) = \left(\frac{2r}{3}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\, e^{\frac{i\pi}{6}}$$

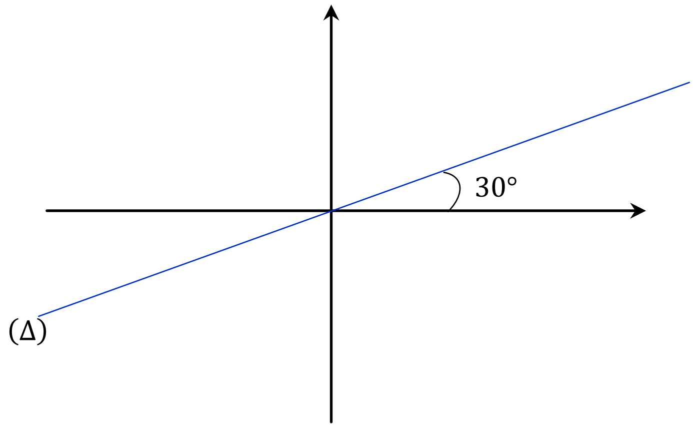
$$\Rightarrow\ \arg\left(f(z_{k-1})\right) \equiv \arg\left(\left(\frac{2r}{3}\right)\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\, e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow\ \arg\left(f(z_{k-1})\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow\ \overline{(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_{k-1}})} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

و بالتالي فالنقط M_1 و M_2 و $\cdots$ و M_n تنتمي إلى المستقيم (Δ)

المبين في الشكل التالي :

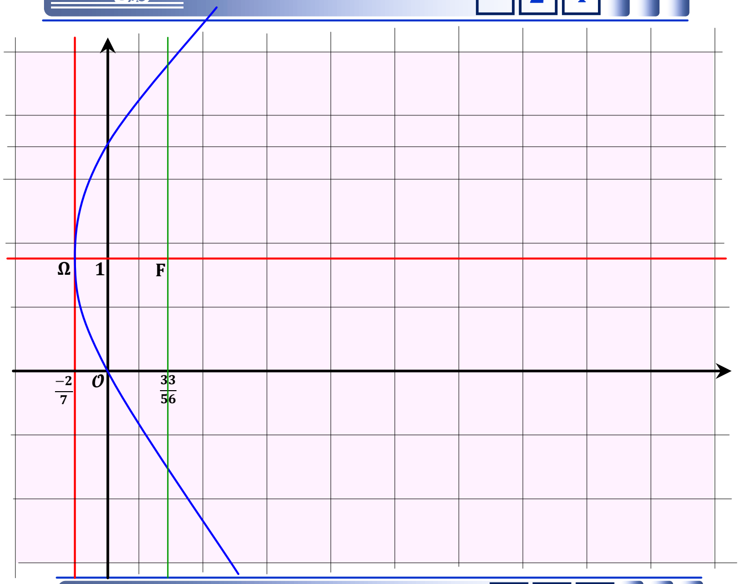


التمرين الثالث I 1

$$M\binom{x}{y} \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2y^2 - 4y - 7x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(y^2 - 2y) = 7x$$
$$\Leftrightarrow 2(y-1)^2 = 7x + 2$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = \frac{7}{2}x + 1$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2 = \frac{7}{2}\left(x + \frac{2}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ (\Gamma)\ est\ une\ parabole\ de\ sommet\ \Omega\left(\frac{-2}{7};1\right)$$
$$et\ de\ foyer\ F\left(\frac{33}{56};1\right)$$

التمرين الثالث I 2



التمرين الثالث II 1 أ

لدينا : $2(y-1)^2 = 7x + 2 \Leftrightarrow 2(y^2 - 2y + 1) = 7x + 2$

$$\Leftrightarrow 2y(y-2) = 7x$$
$$\Rightarrow 7/2y(y-2)$$
$$\Rightarrow 7/2 \text{ أو } 7/y \text{ أو } 7/(y-2)\ car\ 7 \in \mathbb{P}$$
$$\Rightarrow y \equiv 0\ [7] \text{ أو } y \equiv 2\ [7]$$

التمرين الثالث II 1 ب

$$y \equiv 0\ [7] \Rightarrow (\exists k\in\mathbb{Z})\ ;\ y = 7k$$
$$\Rightarrow 2y(y-2) = 7x\ \ ;\ y = 7k$$
$$\Rightarrow 2(7k)(7k-2) = 7x\ \ ;\ y = 7k$$
$$\Rightarrow x = 14k^2 - 4k$$

$$\begin{aligned} y \equiv 2\,[7] &\Longrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ ;\ y = 7k+2 \\ &\Longrightarrow 2y(y-2) = 7x\ ;\ y = 7k+2 \\ &\Longrightarrow 2(7k+2)(7k) = 7x\ ;\ y = 7k \\ &\Longrightarrow x = 14k^2+4k \end{aligned}$$

عكسيا نبين بكل بساطة أن جميع الأزواج من $\mathbb{Z}^2$ التي تُكتب على شكل $(14k^2+4k\,;7k+2)$ و كذلك جميع الأزواج التي تُكتَب على شكل $(14k'^2-4k'\,;7k')$ تحقق المعادلة (E) .

$$\begin{aligned} 2(7k+2-1)^2 &= 2(49k^2+14k+1) \\ &= 98k^2+28k+2 \\ &= 7(14k^2+4k)+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(7k'-1)^2 &= 2(49k'^2-14k+1) \\ &= 98k'^2-28k'+2 \\ &= 7(14k'^2-4k')+2 \end{aligned}$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي جميع الأزواج $(14k^2+4k\,;7k+2)$ و الأزواج $(14k'^2-4k'\,;7k')$ حيث k و k' عددان صحيحان نسبيان .

التمرين الثالث II 2

في هذا السؤال نَفصِلُ بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $x = 14k^2-4k$ و $y = 7k$.

لدينا حسب خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{r|l} 14k^2-4k & 7k \\ \hline -4k & 2k \end{array}$$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن :

$$(14k^2-4k) \wedge (7k) = (7k) \wedge (-4k) = k$$

إذن : $x \wedge y = k = 9$.

و بذلك نحصل على النقطة التالية : $M_1(1098\,;63)$.

الحالة الثانية : إذا كان $x = 14k^2+4k$ و $y = 7k+2$.

لدينا : $14k^2+4k = 2k(7k+2)$.

إذن من هذه النتيجة نستنتج أن: $(14k^2+4k) \wedge (7k+2) = (7k+2)$

و منه : $x \wedge y = 7k+2$. يعني : $k = 1$.

و بذلك نحصل على النقطة التالية : $M_2(18\,;9)$.

التمرين الرابع 1

$$\begin{aligned} \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} &= \frac{t}{1+t^2} + \frac{1-t}{3+t^2} \\ &= \frac{t(3+t^2)+(1-t)(1+t^2)}{(1+t^2)(3+t^2)} \\ &= \frac{t^2+2t+1}{(1+t^2)(3+t^2)} \\ &= \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} \end{aligned}$$

التمرين الرابع 2

لدينا : $\displaystyle\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt = \frac{1}{3}\int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{1+\frac{t^2}{3}}\right) dt$

نضع : $u = \frac{t}{\sqrt{3}}$ إذن : $dt = \sqrt{3}\cdot du$.

و منه :

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt &= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{1+u^2}\right) du \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\,[Arctan(u)]_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,Arctan\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

التمرين الرابع 3 أ

لدينا $u \longrightarrow \frac{1+\sin u}{2+\cos u}$ دالة متصلة على المجال $[0,\pi]$ لأنها عبارة عن خارج مُعَرَّف لدالتين متصلتين على $[0,\pi]$ بحيث $2+\cos u$. إذن فهي تقبل عدة دوال أصلية على المجال $[0,\pi]$ و بالخصوص تقبل دالة أصلية F على المجال $[0,\pi]$ و التي تُحقق :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right) du \\ F'(x) = \dfrac{1+\sin x}{2+\cos x} \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

التمرين الرابع 3 ب

ليكن x عنصرا من $[0,\pi]$.

لدينا : $\displaystyle F(x) = \int_0^x \left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right) du$

نضع : $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$ إذن $\dfrac{dt}{du} = \dfrac{1+t^2}{2}$

لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\right)\left(\frac{2}{1+t^2}\right) du \\ &= 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(t+1)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt \end{aligned}$$

التمرين الرابع 3 ج

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)}\,dt \\ &= 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}\right) dt \\ &= 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{1+t^2}\right) dt - 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{t}{3+t^2}\right) dt + \\ &\qquad + 2\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\frac{1}{3+t^2}\right) dt \\ &= [\ln(1+t^2)]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} - [\ln(3+t^2)]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \\ &\qquad + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln\left(3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln 3 + \\ &\qquad + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ (*)\quad &= \boxed{\ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} \end{aligned}$$

التمرين الرابع 3 د

لدينا F دالة متصلة على يسار π . إذن : $\lim\limits_{x\to\pi^-} F(x) = F(\pi)$

$$= \lim_{x\to\pi^-}\left(\ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\right)$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right)du$$

إذن : $\lim\limits_{x\to\pi^-}\ln\left(\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{3+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$

$$= \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{u}}{1+\frac{3}{u}}\right) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

نعوض إذن هاتين النهايتين في المتساوية $(*)$ نجد :

$$\ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + 0 = \int_0^{\pi}\left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right)du$$

$$\boxed{\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\sin u}{2+\cos u}\right)du = \left(\ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$$

التمرين الخامس 1 أ

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{x}\right)$$

$$= (-\infty)\left(\frac{1}{n} - (-\infty)\right) = -\infty$$

التمرين الخامس 1 ب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right) = \left(\frac{1}{n} - 0\right) = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f_n(x) - \frac{1}{n}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-nx}\right) = 0$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x} = \dfrac{1}{n} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_n(x) - \dfrac{1}{n}x\right) = 0 \end{cases}$$

نستنتج إذن من هذه الوضعية أن المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{n}x + 0$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}}\right) = \left(\frac{1}{n} - (-\infty)\right) = +\infty$$

و بذلك نحصل على الوضعية التالية :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$

نستنتج من هذه الوضعية أن $(\mathcal{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب نحو الأسفل .

التمرين الخامس 2

لدينا : $f_n'(x) = \left(\frac{x}{n} - e^{-nx}\right)' = \frac{1}{n} + ne^{-nx} > 0$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ بأكمله و نلخص نتائج دراسة الدالة f_n في الجدول التالي :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$-\infty \nearrow +\infty$

التمرين الخامس 3 أ

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$.

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $f_n(\mathbb{R})$.

و لدينا : $f_n(\mathbb{R}) = f_n(]-\infty\,;\,+\infty[)$

$$= \left]\lim_{x\to-\infty} f_n(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right[$$

$$=]-\infty\,;\,+\infty[$$

إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

و بما أن 0 عنصر من $\mathbb{R}$ فإنه بالضرورة يقبل سابقا واحدا f_n من $\mathbb{R}$ بالتقابل f_n .

أو بتعبير جميل : $\exists!\ \alpha_n \in \mathbb{R}\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0$.

التمرين الخامس 3 ب

لدينا : $x \geq 2 \Rightarrow n^2 \geq 4$

$$\Rightarrow n^2 \geq 4 > e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0$$

$$\Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{e} < 0$$

إذن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

التمرين الخامس 3 ج

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x) = e^x - x - 1$

لندرس رتابة الدالة φ على $\mathbb{R}$.

φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله لأنها عبارة عن مجموع دوال متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi'(x) = e^x - 1$

إذا كان $x = 0$ فإن $\varphi'(x) = 0$

إذا كان $x > 0$ فإن $\varphi'(x) > 0$

إذا كان $x < 0$ فإن $\varphi'(x) < 0$

نرسم إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من خلال هذا الجدول المبارَك نلاحظ أن φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية هي 0 .

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)\geq 0$

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x - x - 1\geq 0$

أي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x \geq x + 1$

و منه : $(\forall n\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^n \geq n + 1$

$$\Rightarrow\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{1}{e^n} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ e^{-n} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$$

$$\Rightarrow\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n} > 0$$

التمرين الخامس 3 د

حصلنا من خلال ما سبق على ما يلي :

$$(\forall n\geq 2)\ ;\ f_n(1) > 0 \quad \text{و} \quad f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

إذن : $(\forall n\geq 2)\ ;\ f_n(1)\cdot f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

من جهة أخرى لدينا f_n دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بأكمله. إذن فهي متصلة على المجال $\left[\frac{1}{n}\,;1\right]$ حيث $n\geq 2$.

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية نستنتج أن :

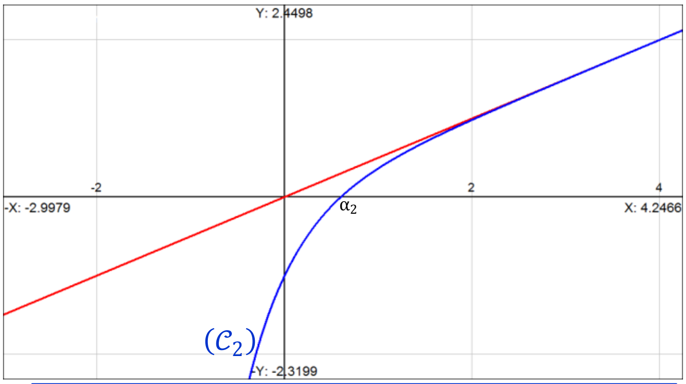
$$\exists\, c\ \epsilon\ \left]\frac{1}{n};1\right[\ \ ;\ f_n(c) = 0$$

و بما أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا و هو α_n .

و ذلك حسب نتيجة السؤال 3) أ) فإن : $\alpha_n = c$

لدينا : $\frac{1}{n} < c < 1$. إذن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$.

التمرين الخامس 4



التمرين الخامس 5 أ

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$= \frac{\alpha_n - n\,e^{-(n+1)\alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}$$

$$= \frac{n\,e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(\frac{\alpha_n}{ne^{-(n+1)\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{n\,e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(\frac{\alpha_n}{n(e^{-n\alpha_n})\cdot e^{-\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

بما أن $f_n(\alpha_n)$: فإن : $e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n}$

$$= \frac{n\,e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(\frac{\alpha_n}{n\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\cdot e^{-\alpha_n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{n\,e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n}\right)$$

التمرين الخامس 5 ب

لدينا حسب السؤال 3) ج) : $e^{\alpha_n} \geq \alpha_n + 1 \quad (1)$

و لدينا حسب السؤال 3) د) : $\alpha_n > \frac{1}{n}$

إذن : $\alpha_n + 1 > \frac{1}{n} + 1 \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $e^{\alpha_n} \geq \frac{1}{n} + 1$

يعني : $(\forall n\geq 2)\ ;\ e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \geq 0$

يعني : $(\forall n\geq 2)\ ;\ \frac{n\,e^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}\left(e^{\alpha_n} - 1 - \frac{1}{n}\right) \geq 0$

و منه باستعمال نتيجة السؤال 5) أ) نستنتج أن :

$$(\forall n\geq 2)\ ;\ f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$$

لاحظ أن الكمية $\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1}$ موجبة دائما .

التمرين الخامس 5 ج

نعلم أن : $(\forall n\geq 2)(\exists!\ \alpha_n\ \epsilon\ \mathbb{R})\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0 \quad (3)$

إذن من أجل $(n+1)$ لدينا : $\boxed{(\exists!\ \alpha_{n+1}\ \epsilon\ \mathbb{R})\ ;\ f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0}$

و نعلم كذلك حسب نتيجة السؤال 5) ب) أن :

$$(4)\quad \boxed{(\forall n\geq 2)\ ;\ f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \geq 0}$$

من خلال النتيجتين (3) و (4) نستنتج أن :

$$(\forall n\geq 2)\ ;\ f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

و نعلم أن f_{n+1} تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ و هي تقابل .

و تقابله العكسي f_{n+1}^{-1} دالة تزايدية قطعا كذلك على $\mathbb{R}$.

$$(\forall n\geq 2)\ ;\ f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_n)\big) \geq f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_{n+1})\big)$$

يعني : $(\forall n\geq 2)\ ;\ \alpha_n \geq \alpha_{n+1}$

و بالتالي $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية تناقصية .

من جهة أخرى لدينا $\frac{1}{n} \geq 0$ و $\frac{1}{n} < \alpha_n$; $(\forall n\geq 2)$.

إذن $(\forall n\geq 2)\ ;\ \alpha_n > 0$.

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ مصغورة بالعدد 0 .

و بالتالي نستنتج أن $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية و مصغورة إذن فهي متقاربة .

و سوف نحدد نهايتها عن طريق حصرها بمتتاليتين تؤولان معا إلى نفس النهاية .

التمرين الخامس 6 أ

$$n\geq 2\ \Rightarrow\ f_n(\alpha_n) = 0 \ \ et\ \ \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$$

$$\Rightarrow\ e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} \ \ et\ \ \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$$

$$\Rightarrow\ e^{-n\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{n} \ \ et\ \ \frac{1}{n^2} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$$

التمرين الخامس 6 ب

ليكن $n\geq 2$. لدينا : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

نُدخل الدالة التزايدية ln على هذه الأعداد الموجبة قطعا نجد :

$$\ln\left(\frac{1}{n^2}\right) < \ln(e^{-n\alpha_n}) < \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

و منه : $-2\ln n < -n\alpha_n < -\ln n$.

يعني : $\ln n < n\,\alpha_n < 2\ln n$.

و بالتالي : $(\forall n\geq 2)\ ;\ \frac{\ln n}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln n}{n}$.

التمرين الخامس

6 ج

نعلم أن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$

إذن التأطير الثمين الأخير الذي حصلنا عليه يُصبح :

$$(\forall n \geq 2) \ ; \quad \underbrace{\left(\frac{\ln n}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} < \alpha_n < \underbrace{\left(\frac{2\ln n}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}$$

نستنتج إذن من هذه الوضعية حسب مصاديق تقارب المتتاليات أن :

$$\boxed{\lim_{n\infty}(\alpha_n) = 0}$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2007

التمرين الأول I 1 أ

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}(a\sqrt2-1)(b\sqrt2-1) &= \frac{1}{\sqrt2}-\left(a-\frac{1}{\sqrt2}\right)(b\sqrt2-1)\\ &= \frac{1}{\sqrt2}-\left(ab\sqrt2-a-b+\frac{1}{\sqrt2}\right)\\ &= a+b-ab\sqrt2\\ &= a\perp b\end{aligned}$$

التمرين الأول I 1 ب

لنبين أن : $\forall (a,b)\in E^2\ ;\ a\perp b\in E$.

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

$$\begin{aligned}(a,b)\in E^2 &\Leftrightarrow a\neq\frac{1}{\sqrt2}\ \text{و}\ b\neq\frac{1}{\sqrt2}\\ &\Leftrightarrow a\sqrt2-1\neq0\ \text{و}\ b\sqrt2-1\neq0\\ &\Leftrightarrow (a\sqrt2-1)\,(b\sqrt2-1)\neq0\\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt2}(a\sqrt2-1)\,(b\sqrt2-1)\neq0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}(a\sqrt2-1)\,(b\sqrt2-1)\neq\frac{1}{\sqrt2}\\ &\Leftrightarrow a\perp b\neq\frac{1}{\sqrt2}\\ &\Leftrightarrow a\perp b\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{\sqrt2}\right\}\end{aligned}$$

و بالتالي ⊥ قانون تركيب داخلي في E .

التمرين الأول I 2

لكي تكون $(E,\perp)$ زمرة تبادلية يكفي أن يكون ⊥ تبادليا و تجميعيا و أن يقبل عنصرا محايدا في E و أن يقبل كل عنصر من E مماثلا من E

ليكن الزوج (a,b) عنصرا من E^2 .

لدينا :

$$\begin{aligned}a\perp b &= \frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}(a\sqrt2-1)(b\sqrt2-1)\\ &= \frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}(b\sqrt2-1)(a\sqrt2-1)\\ &= b\perp a\end{aligned}$$

إذن ⊥ قانون تبادلي في E .

ليكن e العنصر المحايد للقانون ⊥ في E .

يعني : $(\forall x\in E)\ ;\ x\perp e=e\perp x=x$

يعني : $(\forall x\in E)\ ;\ x+e-xe\sqrt2=x$

يعني : $(\forall x\in E)\ ;\ e(1-x\sqrt2)=0$

بما أن $x\in E$ فإن $x\neq\frac{1}{\sqrt2}$.

يعني : $1-x\sqrt2\neq0$ و منه $e=0$.

و بما أن $0\in E$ فإن 0 هو العنصر المحايد للقانون ⊥ في E .

ليكن x عنصرا من E و y مماثله بالنسبة للقانون ⊥ في E .

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x\perp y=y\perp x=0\\ &\Leftrightarrow x+y-xy\sqrt2=0\\ &\Leftrightarrow y(1-x\sqrt2)=-x\\ &\Leftrightarrow y=\frac{-x}{1-x\sqrt2}=\frac{x}{x\sqrt2-1}\ ;\ x\neq\frac{1}{\sqrt2}\end{aligned}$$

و للتأكد من أن : $\frac{x}{x\sqrt2-1}\neq\frac{1}{\sqrt2}$

نفترض التساوي إذن : $x\sqrt2=x\sqrt2-1$

و منه $0=-1$ و هذا تناقض واضح .

إذن : $\frac{x}{x\sqrt2-1}\neq\frac{1}{\sqrt2}$ أي : $\frac{x}{x\sqrt2-1}\in E$

يعني أن كل x من E يقبل مماثلا من E و هو $\frac{x}{x\sqrt2-1}$ بالنسبة لـ ⊥ .

خلاصة : $(E,\perp)$ زمرة تبادلية .

التمرين الأول II 1 أ

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\\ &= -2\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}=-2A\end{aligned}$$

إذن : $A^2=-2A$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned}M(a) &= \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}\sqrt2-a&a\\a&\sqrt2-a\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\0&\sqrt2\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-a&a\\a&-a\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{a}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\\ &= I+\frac{a}{\sqrt2}A\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{M(a)=I+\frac{a}{\sqrt2}A}$

التمرين الأول II 1 ب

لكي يكون F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

يكفي أن نبين أن : $\forall M(a),M(b)\in F\ ;\ M(a)\times M(b)\in F$

في البداية نلاحظ أن $M(a)$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية .

إذن المجموعة F جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من F .

$$\begin{aligned}M(a)\times M(b) &= \left(I+\frac{a}{\sqrt2}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt2}A\right)\\ &= I+\frac{b}{\sqrt2}A+\frac{b}{\sqrt2}A+\frac{ab}{2}A^2\\ &= I+\frac{b}{\sqrt2}A+\frac{b}{\sqrt2}A+\frac{ab}{2}(-2A)\\ &= I+\left(\frac{b}{\sqrt2}+\frac{a}{\sqrt2}-ab\right)A\\ &= I+\frac{(b+a-ab\sqrt2)}{\sqrt2}A\\ &= M(a+b-ab\sqrt2)\\ &= M(a\perp b)\end{aligned}$$

بما أن ⊥ قانون تركيب داخلي في F فإن $(a\perp b)$ ينتمي إلى F .

نحصل إذن على ما يلي : $M(a)\times M(b)\in F$.

و هذا يعني أن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول II 2 أ

لكي يكون التطبيق φ تشاكلا من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$ يكفي أن نتأكد من أن : $\forall(a,b)\in E^2\ ;\ \varphi(a)\times\varphi(b)=\varphi(a\perp b)$

ليكن a و b عنصرين من المجموعة E .

$$\begin{aligned}\varphi(a)\times\varphi(b) &= M(a)\times M(b)\\ &= \left(I+\frac{a}{\sqrt2}A\right)\left(I+\frac{b}{\sqrt2}A\right)\\ &= I+\left(\frac{b}{\sqrt2}\right)A+\left(\frac{a}{\sqrt2}\right)A+\left(\frac{ab}{\sqrt2}\right)A^2\end{aligned}$$

$$= I + \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{ab}{\sqrt{2}}\right)(-2A)$$
$$= I + \left(\frac{a+b-ab\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)A$$
$$= I + \left(\frac{a\perp b}{\sqrt{2}}\right)A$$
$$= M(a\perp b)$$
$$= \varphi(a\perp b)$$

إذن : $\varphi(a)\times\varphi(b) = \varphi(a\perp b)$

و هذا يعني أن φ تشاكل من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$.

لكي يكون التطبيق φ تقابلا يكفي أن يكون شموليا و تباينيا .

الشمولية : لتكن S مصفوفة من F .

إذن حسب تعريف المجموعة F : $S = M(a)$; $(\exists\, a \in E)$

و منه حسب تعريف التطبيق φ : $S = \varphi(a)$; $(\exists\, a \in E)$

و بالتالي φ تطبيق شمولي من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$.

التباينية : ليكن a و b عنصرين من E بحيث $\varphi(a) = \varphi(b)$.

إذن حسب تعريف التطبيق φ نكتب : $M(a) = M(b)$

يعني : $\left(I+\frac{a}{\sqrt{2}}A\right) = \left(I+\frac{b}{\sqrt{2}}A\right)$. إذن $a = b$.

إذن φ تطبيق تبايني .

و بالتالي φ تقابل من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$.

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(E,\perp)$ نحو $(F,\times)$.

التمرين الأول | II | 2 | ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الانطلاق و يحولها إلى مجموعة الوصول و عكسيا كذلك .

نستنتج إذن البنية الجبرية للمجموعة $(F,\times)$ انطلاقا من البنية للمجموعة $(E,\perp)$ عبر التشاكل التقابلي φ .

لدينا $(E,\perp)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\perp$ هو 0 .

و كل عنصر x من E يقبل مماثلا و هو $\left(\frac{x}{x\sqrt{2}-1}\right)$.

إذن $(F,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو $\varphi(0)$

و كل عنصر $M(y)$ من F يقبل مماثلا و هو $\varphi\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$.

$$\begin{cases} \varphi(0) = I + \dfrac{0}{\sqrt{2}}A = I \\ \varphi\left(\dfrac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) = I + \dfrac{y}{\sqrt{2}(y\sqrt{2}-1)}A = M\left(\dfrac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) \end{cases}$$

و بالتالي $(F,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو I .

و كل عنصر $M(y)$ من F يقبل مماثلا و هو العنصر $M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right)$

و للتأكد من صحة الجواب :

$$M(y)\times M\left(\frac{y}{y\sqrt{2}-1}\right) = \left(I+\frac{y}{\sqrt{2}}A\right)\left(I+\frac{y}{2y-\sqrt{2}}A\right)$$
$$= I + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{y}{2y-\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{y^2}{\sqrt{2}(2y-\sqrt{2})}\right)A^2$$
$$= I + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)A + \left(\frac{y}{\sqrt{2}(\sqrt{2}y-1)}\right)A - \left(\frac{2y^2}{2(2y-\sqrt{2})}\right)A$$
$$= I + \left(\frac{2(\sqrt{2}y-1)y+2y-2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A$$
$$= I + \left(\frac{2\sqrt{2}y^2-2y+2y-2\sqrt{2}y^2}{2(\sqrt{2}y-1)\sqrt{2}}\right)A$$
$$= I + 0\times A = I$$

التمرين الثاني | I | 1 | أ

للإجابة على هذا السؤال يمكن استعمال النشر أو التعميل . نختار التعميل :

$$(a+i)^2 + i(1+a^2) = (a+i)^2 + i(a^2-i^2)$$
$$= (a+i)(a+i) + i(a-i)(a+i)$$
$$= (a+i)(a+i) + (ai+1)(a+i)$$
$$= (a+i)(a+i+ai+1)$$
$$= (a+i)(a+1)(i+1)$$

إذن نستنتج أن :

$$(a+i)^2 - (1+a)(1+i)(a+i) + i(1+a^2) = 0$$

و هذا يعني أن العدد العقدي $(a+i)$ حل للمعادلة (E) .

التمرين الثاني | I | 1 | ب

تذكير : إذا كان u و v هما حلا المعادلة $az^2+bz+c=0$.

فإن : $uv = \frac{c}{a}$ و $u+v = \frac{-b}{a}$.

لدينا u و v هما حلا المعادلة (E) . إذن : $u+v = \frac{(1+a)(1+i)}{1}$

نعوض u بقيمته في هذه الكتابة نجد :

$$(i+a)+v = (1+a)(1+i)$$

و منه : $v = (1+a)(1+i)-(i+a)$

$$= 1+i+a+ai-i-a$$
$$= 1+ai$$

التمرين الثاني | I | 2 | أ

نعلم أن كل عدد حقيقي يكون دائما مساويا لمرافقه و سوف نستغل هذه الخاصية لكي نبرهن على أن $\frac{u}{v}$ عددا حقيقيا .

لدينا : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \overline{\left(\frac{a+i}{ai+1}\right)} = \frac{\bar{a}-i}{1-i\bar{a}}$

بما أن $|a| = 1$ فإن $|a| = \sqrt{a\bar{a}} = 1$.

و منه : $\bar{a} = \frac{1}{a}$ إذن : $\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{\bar{a}-i}{1-\bar{a}i} = \frac{\frac{1}{a}-i}{1-\frac{1}{a}i} = \frac{1-ai}{a-i}$

نضرب بسط و مقام النتيجة الأخيرة في العدد العقدي i نجد :

$$\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{(1-ai)\times i}{(a-i)\times i} = \frac{a+i}{ai+1} = \frac{u}{v}$$

إذن : $\boxed{\overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \left(\frac{u}{v}\right)}$

و هذا يعني أن العدد $\left(\frac{u}{v}\right)$ عدد حقيقي .

التمرين الثاني | I | 2 | ب

$$u^2 = (a+i)^2 = a^2+2ai-1 = a\left(a+2i-\frac{1}{a}\right)$$
$$= a(a+2i-\bar{a}) = a\big((a-\bar{a})+2i\big)$$

التمرين الثاني | I | 2 | ج

بصفة عامة لدينا : $z-\bar{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$

و لدينا حسب السؤال ب) : $u^2 = a\big((a-\bar{a})+2i\big)$

$$\Rightarrow \arg(u^2) \equiv \arg(a(a-\bar{a})+2i)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow 2\arg(u) \equiv \arg(a)+\arg\big((a-\bar{a})+2i\big)\ [2\pi]$$

و لدينا : $a-\bar{a}+2i = 2i\,\mathfrak{Im}(z)+2i = 2i\,(\mathfrak{Im}(a)+1)$

إذن : $\arg(a-\bar{a}+2i) \equiv \arg(2i)+\arg(\mathfrak{Im}(a)+1)\ [2\pi]$

لدينا $2i$ عدد تخيلي صرف إذن $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

و لدينا $(\mathfrak{Im}(a)+1)$ عدد حقيقي . إذن $\arg(\mathfrak{I}(a)+1) \equiv 0\ [2\pi]$

و بالتالي : $2\arg(a) \equiv \arg(a)+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

و منه : $\arg(a) \equiv \frac{1}{2}\arg(a)+\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

التمرين الثاني I 3

سوف نستعمل في هذا السؤال المتفاوتة المثلثية .

لدينا : $|u+iv| \le |u|+|iv|$.

إذن : $|a+i+i-a| \le |u|+|v|$.

و منه : $|2i| \le |u|+|v|$.

و بالتالي : $2 \le |u|+|v|$.

التمرين الثاني II 1

لتكن H صورة العدد العقدي i و $\overline{H}$ صورة $-i$.

و لتكن M صورة العدد العقدي a .

لدينا $|u|+|v|=m$ إذن $|a+i|+|ai+1|=m$.

نريد أن نبين أن : $|ai+1|=|a-i|$.

لدينا : $ai+1=i(a-i)$.

إذن : $|ai+1|=|i(a-i)|=|i||a-i|=|a-i|$.

إذن : $|a+i|+|a-i|=m$.

و منه : $|a-(-i)|+|a-i|=m$.

أي : $\overline{H}M+HM=m$

و لكي تكون مجموعة النقط (E_m) إهليلج يكفي أن نتحقق من أن : $\overline{H}H\le m$.

لدينا : $\overline{H}H=|i-(-i)|=|2i|=2$

و لدينا حسب المعطيات $m\ge 2$ إذن $\overline{H}H\le m$.

و بالتالي (E_m) إهليلج مركزه هو منتصف القطعة $[\overline{H}H]$.

أي النقطة O أصل المعلم .

التمرين الثاني II 2 أ

بما أن (E_m) إهليلج .

فإن معادلته الديكارتية تُكتب على الشكل : $(E_m)\ :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

لنحدد الأن قيمتي العددين a و b .

لدينا $m=2b$ إذن $b=\frac{m}{2}$ و منه $b^2=\frac{m^2}{4}$.

و نعلم كذلك أن : $c=\frac{\overline{H}H}{2}=1$ و $c^2=b^2-a^2$.

إذن : $a^2=b^2-c^2$

و بالتالي : المعادلة الديكارتية للإهليلج (E_m) هي :

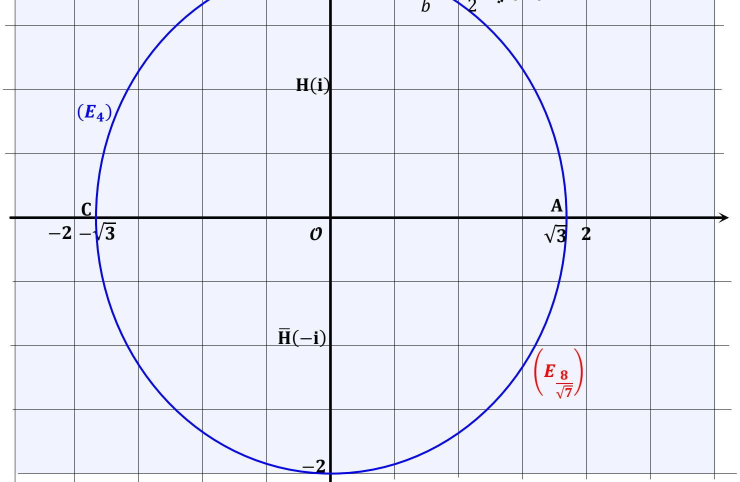
$$(E_m)\ :\ \frac{x^2}{\left(\frac{m^2}{4}-1\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{m^2}{4}\right)}=1$$

أي : $(E_m)\ :\ x^2+\left(1-\frac{4}{m^2}\right)y^2=\left(\frac{m^2}{4}-1\right)$

التمرين الثاني II 2 ب

(E_4) إهليلج يتميز بالعناصر التالية .

- مركزه O
- رؤوسه $A(\sqrt{3},0)$ و $B(-\sqrt{3},0)$ و $C(0,2)$ و $D(0,-2)$
- بؤرتاه $(0,1)$ و $\overline{H}(0,-1)$
- تباعده المركزي $e=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$.



التمرين الثاني II 3

لدينا $(\sqrt{3},0)$ و $B(0,2)$.

لنحدد معادلة المستقيم (AB) و التي تُكتب في شكلها المختصر التالي :

$(AB)\ :\ \ y=px+q$

بحيث p هو الميل و q هو الأرتوب عند الأصل .

إذن : $p=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2}{-\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$

و منه : $(AB): y=\frac{-2\sqrt{3}}{3}x+q$

و لدينا $B(0,2)$ نقطة من المستقيم (AB) .

إذن : $2=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\times 0+b$. أي : $b=2$

و بالتالي : $(AB): y=\frac{-2\sqrt{3}}{3}x+2$

لكي يكون (AB) مماسا للإهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ يكفي أن نحدد نقطة تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ ثم نحدد بعد ذلك معادلة المماس للاهليلج $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في تلك النقطة و نبين أن تلك المعادلة ما هي إلا معادلة المستقيم (AB)

على بركة الله، لدينا حسب السؤال 2) أ) :

$$\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)\ :\ x^2+\left(1-\frac{4}{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}\right)y^2=\left(\frac{\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}{4}-1\right)$$

أي : $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)\ :\ x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7}$

لتحديد نقط تقاطع (AB) و $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحل النظمة التالية :

$$\begin{cases} x^2+\frac{9}{16}y^2=\frac{9}{7} \\ y=\frac{-2\sqrt{3}}{3}x+2 \end{cases}$$

نعوض y بقيمته في معادلة $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ نحصل على :

$$x^2+\frac{9}{16}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}x+2\right)^2=\frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+\frac{9}{16}\left(\frac{4}{3}x^2+4-\frac{8\sqrt{3}}{3}x\right)=\frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow\ x^2+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{3}x=\frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{7}{4}x^2-\frac{3\sqrt{3}}{3}x+\frac{27}{28}=0$$

نضرب طرفي المعادلة في العدد 28 نحصل على :

$$\Leftrightarrow\ (7x)^2-2(7x)(3\sqrt{3})+(3\sqrt{3})^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ (7x-3\sqrt{3})^2=0$$

$$\Leftrightarrow\ 7x-3\sqrt{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

نعوض x في معادلة (AB) نجد : $y=\frac{-2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{7}+2=\frac{8}{7}$

من جهة أخرى لدينا معادلة المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)$

تُكتب بصفة عامة على شكل : $xx_0+\frac{9}{16}yy_0=\frac{9}{7}$

بحيث : $y_0=\frac{8}{7}$ و $x_0=\frac{3\sqrt{3}}{7}$

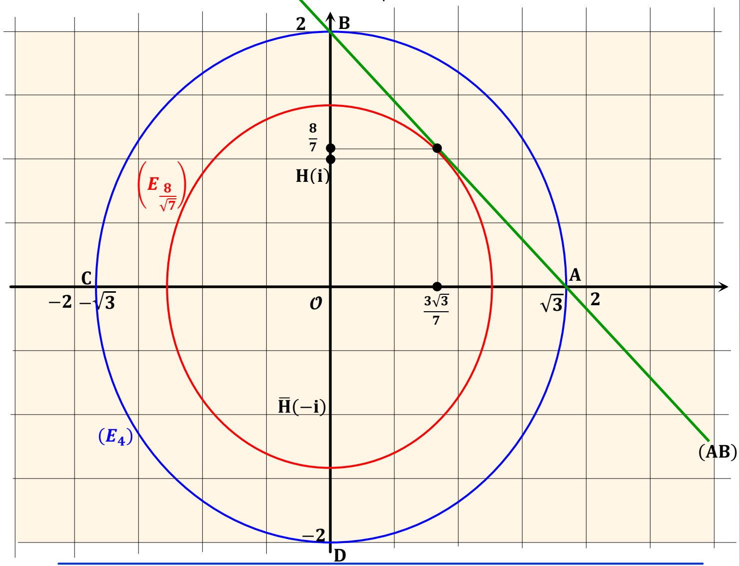
إذن معادلة المماس هي : $\frac{3\sqrt{3}}{7}x+\frac{9}{16}\cdot y\cdot\frac{8}{7}=\frac{9}{7}$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3\sqrt{3}}{7}x+\frac{9}{14}y=\frac{9}{7}$$

$$\Leftrightarrow\ y=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}x$$

و هذه الكتابة الأخيرة هي بالفعل معادلة المستقيم (AB) .

و بالتالي (AB) هو المماس لـ $\left(E_{\frac{8}{\sqrt{7}}}\right)$ في النقطة $\left(\frac{3\sqrt{3}}{7},\frac{8}{7}\right)$.



التمرين الثالث 1 أ

خوارزمية أقليدس هي الآلة التي سوف نوظفها لتحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين، هذه الآلة تستقبل عددين و تنتج في الأخير قاسمهما المشترك الأكبر. و داخل هذه الآلة نجد المراحل التالية :

المرحلة الأولى : $\begin{array}{c|c} 232 & 195 \\ \hline 37 & 1 \end{array}$ 37 غير منعدم إذن نواصل ↜

المرحلة الثانية : $\begin{array}{c|c} 195 & 37 \\ \hline 10 & 5 \end{array}$ 10 غير منعدم إذن نواصل ↜

المرحلة الثالثة : $\begin{array}{c|c} 37 & 10 \\ \hline 7 & 3 \end{array}$ 7 غير منعدم إذن نواصل ↜

المرحلة الرابعة : $\begin{array}{c|c} 10 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$ 3 غير منعدم إذن نواصل ↜

المرحلة الخامسة : $\begin{array}{c|c} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ 1 غير منعدم إذن نواصل ↜

المرحلة السادسة : $\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$ 0 منعدم إذن نتوقف ↻

تتوقف محركات خوارزمية أقليدس عن العمل فور الحصول على باقي منعدم و القاسم المشترك الأكبر للعددين 232 و 195 هو آخر غير منعدم هو 1 .

و بالتالي : $232\wedge 195=1$

التمرين الثالث 1 ب

في البداية وجب علينا البحث عن الحل البديهي (أو الحل الخاص) للمعادلة (E) و ذلك من خلال نتائج القسمات المتتالية لخوارزمية أقليدس .

النتائج :

- المرحلة 1) : $37=232-1\times 195$.
- المرحلة 2) : $10=195-5\times 37$.
- المرحلة 3) : $7=37-3\times 10$.
- المرحلة 4) : $3=10-1\times 7$.
- المرحلة 5) : $1=7-2\times 3$.
- المرحلة 6) : $Woow\ Stop$.

الطريقة هي كالتالي :

- ننطلق من المرحلة الخامسة
- و نعوض 3 بالتعبير $10-1\times 7$ ثم نبسط .
- و نعوض 7 بالتعبير $37-3\times 10$ ثم نبسط .
- و نعوض 10 بالتعبير $195-5\times 37$ ثم نبسط .
- و نعوض 37 بالتعبير $232-1\times 195$ ثم نبسط .

إلى العمل :

$$1=7-2\times 3=7-2(10-1\times 7)=3\times 7-2\times 10$$

$$\Rightarrow\ 1=3\times 7-2\times 10=3\times(37-3\times 10)-2\times 10=3\times 37-11\times 10$$

$$\Rightarrow\ 1=3\times 37-11\times 10=3\times 37-11\times(195-5\times 37)=58\times 37-11\times 195$$

$$\Rightarrow\ 1=58\times 37-11\times 195=58\times(232-1\times 195)-11\times 195=58\times 232-69\times 195$$

$$\Rightarrow\ \boxed{1=58\times 232-69\times 195}$$

إذن الحل الخاص للمعادلة هو الزوج $(-69,-58)$.

سوف نحدد الآن صيغة الحل العام للمعادلة (E) .

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

لدينا : $\begin{cases}195x-232y=1\\ 195(-69)-232(-58)=1\end{cases}$

ننجز عملية الطرح بين هاتين المتساويتين نحصل على :

$$195(x+69)-232(y+58)=0$$

يعني : $\boxed{195(x+69)=232(y+58)}$ $(*)$.

من هذه الكتابة نستنتج أن 195 يقسم الجداء $232(y+58)$.

و بما أن $195\wedge 232=1$ فإنه حسب $Gauss$

نستنتج أن 195 يقسم $(y+58)$.

إذن : $(\exists k'\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y+58=195k'$.

يعني : $y=195k'-58$

لإيجاد x نعوض y في النتيجة $(*)$ نحصل على :

$$195(x+69)=232(195k')$$

يعني : $x=232k'-69$.

نضع $k=k'-1$ فنحصل على :

$$\begin{cases}x=232(k+1)-69=232k+163\\ y=195(k+1)-58=195k+137\end{cases}$$

عكسيا نبرهن أن جميع الأزواج من $\mathbb{Z}^2$ التي تُكتب على شكل $(232k+163\ ;\ 195k+137)$ هي حلول للمعادلة (E) .

و بالفعل لدينا :

$$195(232k+163)-232(195k+137)=45240k+31785-45240k-31784=31785-31784=1$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\{(232k+163\ ;\ 195k+137)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

التمرين الثالث 1 ج

$$\begin{aligned}195d\equiv 1\,[232]\ &\Leftrightarrow\ 232/(195d-1)\\ &\Leftrightarrow\ \exists\,b\,\epsilon\,\mathbb{Z}\ ;\ 232b=195d-1\\ &\Leftrightarrow\ \exists\,b\,\epsilon\,\mathbb{Z}\ ;\ 195d-232b=1\\ &\Leftrightarrow\ (d,b)\ est\ solution\ de\ (E)\\ &\Leftrightarrow\ (\exists\,k\,\epsilon\,\mathbb{Z})\ ;\ \begin{cases}d=163+232k\\ b=137+195k\end{cases}\end{aligned}$$

لدينا : $0\le d\le 232$ إذن : $0\le 163+232k\le 232$.

أي : $-0{,}7\le k\le 0{,}2$

العدد الصحيح النسبي الوحيد المحصور بين $0{,}2$ و $-0{,}7$ هو 0 .

إذن : $d=163+232\times 0=163$

التمرين الثالث 2

يكفي أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 233 لا تقسم العدد 233 . و بالفعل لدينا الاعداد التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 233 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 . و لا أحد من هذه الأعداد يقسم 233 . إذن 233 عدد أولي .

التمرين الثالث 3 أ

ليكن a و b عنصرين من $A\backslash\{0\}$ حيث $f(a)=f(b)$.

لدينا : $\begin{cases} a^{195}\equiv f(a)\,[233] \\ b^{195}\equiv f(b)\,[233]\end{cases}$

بما أن $f(a)=f(b)$ فإن $a^{195}\equiv b^{195}\,[233]$.

و منه : $a^{195d}\equiv b^{195d}\,[233]$.

و لدينا $195d\equiv 1\,[232]$ يعني : $195d=232k+1$

إذن : $a^{232k+1}\equiv b^{232k+1}\,[233]$.

من جهة أخرى لدينا حسب مبرهنة $Fermat$: $a^{232}\equiv 1\,[233]$.

إذن : $a^{232k}\equiv 1\,[233]$. و منه : $a^{232k+1}\equiv a\,[233]$ (1)

بنفس الطريقة نجد : $b^{232k+1}\equiv b\,[233]$ (2) .

بما أن : $a^{232k+1}\equiv b^{232k+1}\,[233]$ فإن : $a\equiv b\,[233]$.

و ذلك باستعمال النتيجتين (1) و (2) .

نستنتج إذن أن 233 قاسم للعدد $|a-b|$.

لدينا : $a\in A\backslash\{0\}$ و $b\in A\backslash\{0\}$.

يعني : $0<a\leq 232$ و $0<b\leq 232$.

و منه : $|a-b|\leq 232<233$.

نلاحظ أن 233 يقسم عددا أصغر منه و هو $|a-b|$.

إذن : $|a-b|=0$. و بالتالي : $a=b$.

في حالة $a=0$ لدينا $f(0)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد 0^{195} على 233 .

يعني : $f(0)=0$ أي : $b=0$.

نحصل على الإستلزام التالي : $f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b$

خلاصة : f تطبيق تبايني .

التمرين الثالث 3 ب

ليكن a و b عنصرين من A بحيث $f(a)=b$.

لدينا : $a^{195}\equiv f(a)\,[233]$. إذن : $a^{195}\equiv b\,[233]$.

و منه : $a^{195d}\equiv b^d\,[233]$.

و بما أن : $195d-232b=1$.

فإن : $a^{1+232b}\equiv b^d\,[233]$ (1) .

من جهة أخرى لدينا : $a^{232}\equiv 1\,[233]$ إذن : $a^{232b}\equiv 1[233]$

يعني : $a\cdot a^{232b}\equiv a\,[233]$. يعني : $a^{1+232b}\equiv a[233]$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $a\equiv b^d\,[233]$.

و نعلم أن $d=163$ إذن $a\equiv b^{163}\,[233]$.

و بما أن $a<233$ فإن a هو باقي القسمة الأقليدية للعدد b^{163} على 233 .

و منه 233 قاسم للعدد $(a-b^{163})$.

إذن يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث $a=b^{163}+233k$.

التمرين الثالث 3 ج

نستنتج من خلال نتيجتي السؤالين 3) أ) و 3) ب) أن التطبيق f تبايني و شمولي من A نحو A . إذن فهو تقابل و تقابله العكسي نستنتجه من جواب السؤال ب) .

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & A \\ & a & \longrightarrow & f(a)\equiv a^{195}\,[233] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & A & \longrightarrow & A \\ & b & \longrightarrow & f^{-1}(b)\equiv b^{163}\,[233] \end{array}$$

التمرين الرابع I 1

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $g(x)=1+(x-1)e^x$.

إذن : $g'(x)=e^x+e^x(x-1)=xe^x$.

بما أن : $e^x>0$; $(\forall x\in\mathbb{R})$.

فإن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارة x .

إذا كان $x=0$ فإن $g'(x)=0$.

إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)>0$.

إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)<0$.

و لدينا :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+(x-1)e^x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+xe^x-e^x\right)=1+0-0=1$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+(x-1)e^x\right)=1+(+\infty-1)(+\infty)=+\infty$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ حسب هذا الجدول أن 0 قيمة دنوية للدالة g .

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)\geq 0$.

التمرين الرابع I 2

لدينا g دالة تناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0[$.

إذن : $(\forall x<0)$; $g(x)>0$.

و لدينا g دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

إذن : $(\forall x>0)$; $g(x)>0$.

و لدينا 0 هو العنصر الوحيد الذي صورته بالدالة g هي 0 .

إذن : $(\forall x\neq 0)$; $g(x)\neq 0$.

و هذا يعني أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

التمرين الرابع II 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=0+(+\infty)=+\infty$$

التمرين الرابع II 2

تذكير بمشتقة الدالة $exponentielle$.

نعلم أن : $(e^{x_0})'=e^{x_0}$; $(\forall\, x_0\in\mathbb{R})$

و هذا يعني أن : $\lim_{x\to x_0}\left(\dfrac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}\right)=e^{x_0}$

نستغل إذن هذه الملاحظة لحساب نهاية f بجوار الصفر .

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\frac{e^x-e^0}{x-0}}\right)=\frac{1}{\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)}=\frac{1}{e^0}=\frac{1}{1}=1=f(0)$$

إذن f دالة متصلة في الصفر .

التمرين الرابع II 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^x-1}\right)'=\frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-1-e^x(x-1)}{(e^x-1)^2}=\frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$$

التمرين الرابع II 3 ب

لدينا : $(\forall\, x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$

نعلم ان : $(e^x-1)^2>0\ ;\ (\forall\, x\in\mathbb{R}^*)$.

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $g(x)$.

و لدينا : $g(0)=0$ و $g(x)>0\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}^*)$.

إذن تنعدم الدالة $f'(x)$ إذا كان $x=0$.

و لدينا : $f'(x)<0\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}^*)$.

يعني أن الدالة f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^x-1}\right)=+\infty$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)-\frac{1}{x}}=0$

نستنتج أذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

التمرين الرابع II 4 أ

$$J(x)=\int_0^x \underbrace{t}_{u(t)}\cdot\underbrace{e^{-t}}_{v'(t)}\,dt$$
$$=[u(t)\cdot v(t)]_0^x-\int_0^x u'(t)\cdot v(t)\,dt$$
$$=[t(-e^{-t})]_0^x-\int_0^x(-e^{-t})\,dt$$
$$=[-te^{-t}]_0^x-[-e^{-t}]_0^x$$
$$=-xe^{-x}-e^{-x}+1$$
$$=e^{-x}(e^x-x-1)$$

التمرين الرابع II 4 ب

ليكن x عددا حقيقيا و نفصل بين ثلاث حالات .

الحالة الأولى : إذا كان x موجب يعني $|x|=x$.

لدينا $x+|x|=2x$ و $x-|x|=0$.

ليكن $0\le t\le x$ إذن $e^{-x}\le e^{-t}\le e^0$.

أي : $te^{-x}\le te^{-t}\le t$

ندخل التكامل $\int_0^x dt$ على هذه الدوال المتصلة حيث $0\le x$ نجد :

$$\int_0^x te^{-x}\,dt\le\int_0^x te^{-t}\,dt\le\int_0^x t\,dt$$
$$\Rightarrow\ e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\le J(x)\le\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$\Rightarrow\ \frac{x^2}{2}e^{-x}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}$$
$$\Rightarrow\ \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

الحالة الثانية : إذا كان x سالب يعني $|x|=-x$.

لدينا : $x+|x|=0$ و $x-|x|=2x$.

ليكن $x\le t\le 0$ إذن $e^0\le e^{-t}\le e^{-x}$.

و منه : $te^{-x}\le te^{-t}\le t$ (تَغير الترتيب لأن t عدد سالب) .

نُدخل التكامل $\int_x^0 dt$ على هذه الدوال المتصلة حيث $x\le 0$ نحصل على :

$$\int_x^0 te^{-x}\,dt\le\int_x^0 te^{-t}\,dt\le\int_x^0 t\,dt$$
$$\Rightarrow\ e^{-x}\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0\le -J(x)\le\left[\frac{t^2}{2}\right]_x^0$$
$$\Rightarrow\ \frac{-x^2}{2}e^{-x}\le -J(x)\le\frac{-x^2}{2}$$
$$\Rightarrow\ \frac{x^2}{2}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-x}$$
$$\Rightarrow\ \frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

الحالة الثالثة : إذا كان x منعدم فإن $J(0)=0$.

و منه : $\Rightarrow\ \underbrace{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}_{=0}\le\underbrace{J(x)}_{=0}\le\underbrace{\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}_{=0}$

الخلاصة : $\dfrac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\dfrac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R})$

التمرين الرابع II 4 ج

لدينا : $\dfrac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le J(x)\le\dfrac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R})$

إذن باستعمال نتيجة السؤال أ) نجد :

$$\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le e^{-x}(e^x-1-x)\le\frac{x^2}{2}e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

نأخذ $x\neq 0$ و نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب قطعا $\frac{e^x}{x^2}$

نحصل على :

$$\frac{1}{2}\cdot e^x\cdot e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}\le\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\le\frac{1}{2}\cdot e^x\cdot e^{-\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}$$

و بالتالي بعد تبسيط الميمنة و الميسرة نحصل في الأخير على التأطير التالي :

$$\frac{1}{2}\cdot e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}\le\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\le\frac{1}{2}\cdot e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}$$

التمرين الرابع II 4 د

لدينا : $\lim\limits_{x\to0}e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}=e^{\left(\frac{0-|0|}{2}\right)}=e^0=1$

و : $\lim\limits_{x\to0}e^{\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}=e^{\left(\frac{0+|0|}{2}\right)}=e^0=1$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{\left(\frac{x-|x|}{2}\right)}}_{\xrightarrow{x\to0}\ \boxed{\frac{1}{2}}}\le\frac{(e^x-1-x)}{x^2}\le\underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{-\left(\frac{x+|x|}{2}\right)}}_{\xrightarrow{x\to0}\ \boxed{\frac{1}{2}}}$$

إذن حسب خاصيات التأطير و النهايات نستنتج أن :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

من جهة أخرى لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-e^x+1}{xe^x-x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} -\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} -\left(\frac{e^x-1-x}{x^2}\right)f(x)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{-1}{2}$$

و بالتالي : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \dfrac{-1}{2}$

و هذا يعني أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر .

و لدينا : $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

التمرين الرابع | II | 5 | أ

$$f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{-g'(x)(e^x-1)^2 + g(x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x-1)^2 + (1+(x-1)e^x)(2(e^x-1)e^x)}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x-1)^2 + 2(e^x-1)e^x + 2(x-1)(e^x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^4}$$

$$= \frac{-xe^x(e^x-1) + 2e^x + 2(x-1)e^{2x}}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{e^x(-xe^x + x + 2 + 2xe^x - 2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{e^x(xe^x + x + 2 + 2xe^x - 2e^x)}{(e^x-1)^3}$$

$$= \frac{e^x\big(e^x(x-2)+(x+2)\big)}{(e^x-1)^3}$$

و بالتالي : $f''(x) = \dfrac{e^x\big(e^x(x-2)+(x+2)\big)}{(e^x-1)^3}$

التمرين الرابع | II | 5 | ب

نضع : $\varphi(x) = e^x(x-2)+(2+x)$.

$$\Rightarrow \quad \varphi'(x) = (xe^x - 2e^x + 2 + x)'$$

$$= xe^x + e^x - 2e^x + 1$$

$$= e^x(x-1)+1$$

$$= g(x) \geq 0 \; ; \; \forall x\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad (\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; \varphi'(x) \geq 0$

$\Rightarrow \quad \varphi \; est \; croissante \; sur \; \mathbb{R}$

و لدينا : $\varphi(0) = 0$ و f دالة تزايدية على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x \geq 0$ فإن $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$.

إذا كان $x \leq 0$ فإن $\varphi(x) \leq \varphi(0) = 0$.

التمرين الرابع | II | 5 | ج

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\big(e^x(x-2)+(x+2)\big)$$

$$= \frac{e^x}{(e^x-1)^2} \times \left(\frac{e^x(x-2)+(x+2)}{(e^x-1)}\right)$$

$$= \frac{e^x}{(e^x-1)^2} \times \frac{\varphi(x)}{(e^x-1)}$$

لدينا : $\forall x\epsilon\mathbb{R}^* \; ; \; e^x > 0 \quad et \quad (e^x-1)^2 > 0$.

إذن إشارة $f''(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $\varphi(x)$ و (e^x-1) .

إذا كان $x > 0$ فإن $\varphi(x) > 0$ و $e^x > e^0 = 1$.

إذن : $f''(x) > 0$

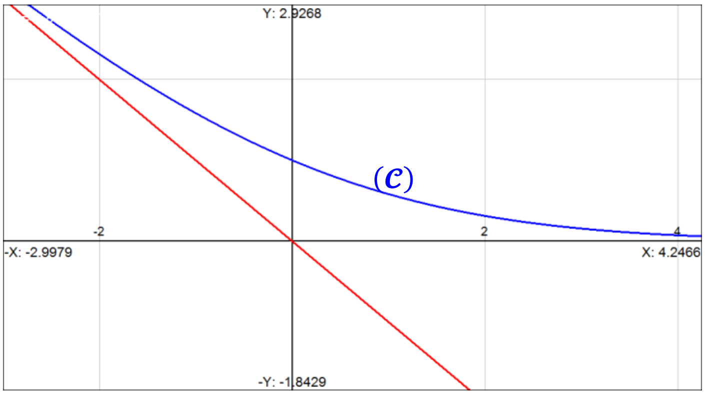
إذا كان $x < 0$ فإن $\varphi(x) < 0$ و $e^x < e^0 = 1$.

إذن : $f''(x) > 0$

في كلتا الحالتين نلاحظ أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*) \; ; \; f''(x) > 0$.

و هذا يعني أن منحنى الدالة f مُحدب .

التمرين الأول | II | 5 | د



التمرين الرابع | III | 1

$$f(x) = 0 \iff \frac{x}{e^x-1} = x \; ; \; x \neq 0$$

$$\iff x = xe^x - x \; ; \; x \neq 0$$

$$\iff e^x = 2 \; ; \; x \neq 0$$

$$\iff x = \ln 2 \; ; \; x \neq 0$$

إذن $\ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$.

التمرين الرابع | III | 2 | أ

لنبين أن : $\frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*) \; ; \; f''(x) > 0$. إذن f' دالة تزايدية على $\mathbb{R}^*$.

إذا كان $x \geq 0$ فإن $f'(x) \geq f'(0)$.

يعني أن : $f'(x) \geq \frac{-1}{2} \quad (1)$

من جهة أخرى لدينا : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x-1)^2} \leq 0 \; ; \; (\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)$

و ذلك لأن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \; ; \; g(x) \geq 0$.

إذن من الكتابة $f'(x) \leq 0$ نستنتج أن $f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$.

يعني : $f'(x) \leq \frac{1}{2} \quad (2)$.

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*) \; ; \; \frac{-1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*) \; ; \; |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

التمرين الرابع | III | 2 | ب

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. فإنه بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية TAF على أي مجال يوجد ضمن $\mathbb{R}$.

نختار المجال الذي طرفاه $\ln 2$ و u_n و الذي سوف أرمز له بالرمز $\overleftrightarrow{[u_n, \ln 2]}$ فقط لتسهيل الكتابات .

$$\Rightarrow \quad \exists\, c \in \overleftrightarrow{]u_n, \ln 2[} \; ; \; \frac{f(u_n)-f(\ln 2)}{u_n - \ln 2} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{f(u_n)-f(\ln 2)}{u_n-\ln 2}\right| = |f'(c)|$$

$$\Rightarrow \quad |f(u_n)-f(\ln 2)| = |f'(c)| \cdot |u_n - \ln 2|$$

بما أن : $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$; $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$.

فإن : $|f'(c)| \le \frac{1}{2}$ لأن : $c \in \mathbb{R}^*$.

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا $|u_n - \ln 2|$ نجد :

$$|f'(c)|\cdot|u_n-\ln 2| \le \frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|f(u_n)-f(\ln 2)| \le \frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$

أو بتعبير آخر : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_{n+1}-\ln 2| \le \frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$

التمرين الرابع III 2 ج

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_n-\ln 2| \le \frac{1}{2}|u_{n-1}-\ln 2|$

$$\le \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2}-\ln 2|$$
$$\le \left(\frac{1}{2}\right)^3 |u_{n-3}-\ln 2|$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n}-\ln 2|$$

نستنتج إذن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|u_n-\ln 2| \le \frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$.

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1 .

إذن : $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. و بذلك نحصل على الوضعية التالية :

$$|u_n-\ln 2| \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\ln 2|}_{\xrightarrow{n\infty}\ 0}$$

أو بالأحرى نحصل على الوضعية التالية :

$$-\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\ln 2|}_{\xrightarrow{n\infty}\ 0} \le (u_n-\ln 2) \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\ln 2|}_{\xrightarrow{n\infty}\ 0}$$

أو الوضعية التالية : $\underbrace{0}_{\xrightarrow{n\infty}\ 0} \le (u_n-\ln 2) \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |1-\ln 2|}_{\xrightarrow{n\infty}\ 0}$

و جميع هذه الوضعيات تمكننا حسب مصاديق تقارب المتتاليات من استنتاج النهاية التالية : $\lim_{n\infty}(u_n-\ln 2)=0$

أو بتعبير أبسط نحصل على النهاية التالية : $\lim_{n\infty}(u_n)=\ln 2$

و بالتالي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى $\ln 2$.

التمرين الرابع IV 1 أ

نستعمل في هذا السؤال البرهان بفصل الحالات .

الحالة الأولى : إذا كان $x>0$. لدينا : $F(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$

و نعلم أن f تناقصية على $\mathbb{R}$.

إذا كان $x \le t \le 2$ فإن $f(x)\ge f(t)\ge f(2x)$.

و منه : $\left(\frac{x}{e^x-1}\right) \ge \left(\frac{1}{e^t-1}\right) \ge \left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)$

نُدخل التكامل على هذه الدوال المتصلة حيث $x<2x$ نجد :

$$\int_x^{2x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)dt \ge \int_x^{2x}\left(\frac{1}{e^t-1}\right)dt \ge \int_x^{2x}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)dt$$
$$\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\int_x^{2x} 1\,dt \ge F(x) \ge \left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)\int_x^{2x} 1\,dt$$
$$\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right) \ge F(x) \ge \left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right)$$

الحالة الثانية : إذا كان $x<0$.

$$2x \le t \le x \quad\Longrightarrow\quad f(2x)\ge f(t)\ge f(x)$$
$$\Longrightarrow \int_{2x}^{x} f(2x)\,dt \ge \int_{2x}^{x} f(t)\,dt \ge \int_{2x}^{x} f(x)\,dt$$
$$\Longrightarrow -\int_{x}^{2x} f(2x)\,dt \ge -\int_{x}^{2x} f(t)\,dt \ge -\int_{x}^{2x} f(x)\,dt$$
$$\Longrightarrow -x\,f(2x) \ge -F(x) \ge -x\,f(x)$$
$$\Longrightarrow x\,f(2x) \le F(x) \le x\,f(x)$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \le F(x) \le \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)$$

خلاصة القول :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \le F(x) \le \left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)} \qquad (*)$$

التمرين الرابع IV 1 ب

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x}{\left(\frac{e^{2x}-e^0}{2x-0}\right)} = \frac{0}{\lim\limits_{\substack{u\to0\\u=2x}}\left(\frac{e^{2x}-e^0}{2x-0}\right)} = \frac{0}{e^0}=0$$

و بنفس الطريقة لدينا :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x}{\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)} = \frac{0}{e^0} = 0$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\right)}_{\xrightarrow{x\to0}\ 0} \le F(x) \le \underbrace{\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)}_{\xrightarrow{x\to0}\ 0}$$

و بالتالي حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to0} F(x) = 0 = F(0)}$$

و هذا يعني أن الدالة F متصلة في الصفر .

التمرين الرابع IV 1 ج

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(\dfrac{2x^2}{e^{2x}-1}\right) \leq F(x) \leq \left(\dfrac{x^2}{e^x-1}\right)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)}_{\substack{x\to 0 \\ \to 1}} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x}{e^x-1}\right)}_{\substack{x\to 0 \\ \to 1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = 1$$

$$\Rightarrow F'(0) = 1$$

التمرين الرابع IV 2 أ

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}$. و بالخصوص متصلة على كل مجال $[x,2x]$ حيث $x \epsilon \mathbb{R}^*$.

إذن f تقبل دالة أصلية h بحيث $F(x) = h(2x) - h(x)$.

لدينا : $x \longrightarrow h(x)$ و $x \longrightarrow 2x$ دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ إذن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مُركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و بالتالي : $F(x) = h(2x) - h(x)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F'(x) &= 2h'(2x) - h'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right) - \left(\frac{x}{e^x-1}\right) \\ &= \left(\frac{3-e^x}{e^x+1}\right) f(x)\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ F'(x) = \left(\dfrac{3-e^x}{e^x+1}\right) f(x)}$

التمرين الرابع IV 2 ب

لدينا : $e^x + 1 > 0$ و $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x) > 0$.

و لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ F'(x) = \left(\frac{3-e^x}{e^x+1}\right) f(x)$

إذن : إشارة $F'(x)$ تتعلق بإشارة $(3-e^x)$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
F	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$F(\ln 3)$	$\searrow$	0

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2007

التمرين الأول 1 أ

لدينا p و q أوليان فيما بينهما .
إذن حسب مبرهنة $Bezout$ يوجد عددان نسبيان u_0 و v_0
بحيث $pu_0 + qv_0 = 1$.

التمرين الأول 1 ب

ليكن $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حلا للنظمة .
لدينا من خلال السؤال أ) : $qv_0 = 1 - pu_0$.

إذن :
$$\begin{aligned} x_0 &= bpu_0 + a(1-pu_0) \\ &= bpu_0 + a - apu_0 \\ &= p(bu_0 - au_0) + a \end{aligned}$$

يعني أن : $(x_0 - a) = p(bu_0 - au_0)$
و منه نستنتج أن : $x_0 \equiv a\ [p]$ (1) لأن p يقسم العدد $(x_0 - a)$.
بنفس الطريقة لدينا من خلال السؤال أ) : $pu_0 = 1 - qv_0$

إذن :
$$\begin{aligned} x_0 &= b(1-qv_0) + v_0aq \\ &= b - bqv_0 + v_0aq \\ &= q(av_0 - bv_0) + b \end{aligned}$$

و منه : $(x_0 - b) = q(av_0 - bv_0)$
و هذا يعني أن q يقسم $(x_0 - b)$.
إذن : $x_0 \equiv b\ [q]$ (2) .
من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة (S) .

التمرين الأول 2

الخاصية التي سوف نعتمد عليها في الإجابة على هذا السؤال هي الآتية :

$$\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow mn/a$$

أو بتعبير آخر : إذا كان عددان أوليان فيما بينهما و يقسمان عددا ثالثا فإن جداءهما يقسم كذلك ذلك العدد.
في البداية سوف أبرهن على صحة هذه الخاصية ، مع العلم أنك لست مطالبا بهذا البرهان في الإمتحان الوطني .
إذا كان m يقسم a فإنه يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث $a = km$.
و إذا كان n يقسم a فإن n يقسم الجداء mk .
إذن حسب $Gauss$ نستنتج أن n يقسم k لأن m و n أوليان فيما بينهما .
و بالتالي يوجد k' من $\mathbb{Z}$ بحيث $k = nk'$.
من $a = mk$ و $k = nk'$ نستنتج أن $a = mn\,k'$.
و هذا يعني أن mn يقسم كذلك العدد a .
إنتهى البرهان على الخاصية و نعود إلى التمرين لتوظيف هذه الخاصية .
ليكن x حلا للنظمة (S) و نريد أن نبين أن العدد pq يقسم الفرق $(x - x_0)$.
لدينا x و x_0 حلان للنظمة (S) . إذن :
$$\begin{cases} x \equiv a\ [p] \\ x \equiv b\ [q] \\ x_0 \equiv a\ [p] \\ x_0 \equiv b\ [q] \end{cases}$$

من هذه المتوافقات الأربع نستنتج وجود أعداد نسبية k_1 و k_2 و k_3 و k_4
بحيث :
$$\begin{cases} (x-a) = k_1 p \\ (x-b) = k_2 q \\ (x_0 - a) = k_3 p \\ (x_0 - b) = k_4 q \end{cases}$$

من خلال هذه المتساويات الأربع نستنتج أن :
$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x-a) - (x_0 - a) \\ &= k_1p - k_3p \\ &= (k_1 - k_3)p \end{aligned}$$

و كذلك :
$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x-b) - (x_0 - b) \\ &= k_2q - k_4q \\ &= (k_2 - k_4)q \end{aligned}$$

نحصل إذن على ما يلي :
$$\begin{cases} (x-x_0) = (k_1 - k_3)p \\ (x - x_0) = (k_2 - k_4)q \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$$

يعني :
$$\begin{cases} p/(x-x_0) \\ q/(x-x_0) \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$$

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن : $pq/(x - x_0)$.

التمرين الأول 3

لنبرهن الآن على أنه إذا كان x عددا صحيحا نسبيا بحيث يكون الجداء pq قاسما للفرق $(x - x_0)$ فإن x حل للنظمة (S) .
ننطلق إذن من الإفتراض $pq/(x - x_0)$.
لدينا x_0 حل للنظمة (S) إذن :
$$\begin{cases} x_0 \equiv a\ [p] \\ x_0 \equiv b\ [q] \end{cases}$$

و منه يوجد عددان نسبيان k_1 و k_2 بحيث $x_0 = k_1 p + a$ (3)
و $x_0 = k_2 q + b$ (4)
بما أن $pq/(x - x_0)$ و ذلك حسب الإفتراض.
فإنه يوجد k_3 من $\mathbb{Z}$ بحيث $(x - x_0) = k_3\,pq$ (5) .
من (3) و (5) نستنتج أن : $x - (k_1p + a) = k_3\,pq$.
يعني : $(x - a) = p(k_3q + k_1)$.
أي : $p/(x - a)$. و منه : $x \equiv a\ [p]$ (6) .
من (4) و (5) نستنتج أن : $x - (k_2q + b) = k_3\,pq$.
يعني : $(x - b) = q(k_3p + k_2)$ أي : $q/(x - b)$.
يعني : $x \equiv b\ [q]$ (7) .
من (6) و (7) نستنتج أن x حل للنظمة (S) .

التمرين الأول 4

من خلال نتيجتي السؤالين السابقين نستطيع كتابة التكافؤ التالي :

$$x \ \ est\ \ solution\ \ de\ \ (S) \iff pq/(x - x_0)$$

$$\begin{gathered} Autrement-dit: \\ x\ \ est\ solution\ \ du\ système\ \ (S) \\ si\ et\ si\ et\ seulement\ si \\ pq\ divise\ (x - x_0) \end{gathered}$$

أو بتعبير أخير : $x \equiv x_0\ [pq]$ $\iff$ x حل للنظمة (S)
إذن مجموعة حلول النظمة (S) هي جميع الأعداد النسبية التي يكون باقي قسمتها على pq مساويا لـ x_0 . أو بتعبير آخر نقول أن مجموعة حلول النظمة (S) هو صنف التكافؤ $\overline{x_0}$ $(classe\ d'équivalence)$
التي هي عنصر من عناصر الفضاء المتجهي $\mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$.

التمرين الأول 5

نريد أن نحل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S_0) التالية : $(S_0) : \begin{cases} x \equiv 1\ [8] \\ x \equiv 3\ [13] \end{cases}$
و أشير إلى أن النظمة (S_0) حالة خاصة للنظمة (S) و ذلك بحيث
$p = 8$ و $q = 13$ و $a = 1$ و $b = 3$ و $8 \wedge 13 = 1$.
و تُعتبر الأسئلة السابقة دراسة نظرية لحلول النظمة $\begin{cases} x \equiv a\ [p] \\ x \equiv b\ [q] \end{cases}$
مع $p \wedge q = 1$. و السؤال الخامس عبارة عن تطبيق عددي لنتائج تلك الدراسة .
ليكن x حلا للنظمة (S_0) إذن حسب التكافؤ السابق $x \equiv x_0\ [8 \times 13]$
لنحسب الآن x_0 الحل الخاص للنظمة (S_0) باستعمال خوارزمية القسمات المتتالية لأقليدس حيث $p = 8$ و $q = 13$.

$\begin{array}{c\|c} 13 & 8 \\ & 1 \\ 5 & \end{array}$	$\longmapsto$	$\boxed{5 = 13 - 8}$ (1)	المرحلة الأولى
$\begin{array}{c\|c} 8 & 5 \\ & 1 \\ 3 & \end{array}$	$\longmapsto$	$\boxed{3 = 8 - 5}$ (2)	المرحلة الثانية
$\begin{array}{c\|c} 5 & 3 \\ & 1 \\ 2 & \end{array}$	$\longmapsto$	$\boxed{2 = 5 - 3}$ (3)	المرحلة الثالثة
$\begin{array}{c\|c} 3 & 2 \\ & 1 \\ 1 & \end{array}$	$\longmapsto$	$\boxed{1 = 3 - 2}$ (4)	المرحلة الرابعة
$\begin{array}{c\|c} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}$	$\longmapsto$	*Stop right now !*	المرحلة الخامسة

نوقف محركات هذه الماكينة عندما نحصل على أول باقي منعدم .
ننطلق من النتيجة (4) و نعوض فيها العدد 2 بالتعبير $(5-3)$ ثم نبسط .
ثم بعد ذلك نعوض العدد 3 بالتعبير $(8-5)$ ثم نُبسط . ثم بعد ذلك
نعوض العدد 5 بالتعبير $(13-8)$ ثم نبسط نحصل أخيرا على المتساوية المطلوبة . (let's do it now)

$$(4)\quad 1 = 3 - 2 \;\overset{\text{حسب (3)}}{\Longrightarrow}\; 1 = 3 - (5-3) = 2\times 3 - 5$$
$$\overset{\text{حسب (2)}}{\Longrightarrow}\; 1 = 2(8-5) - 5 = 2\times 8 - 3\times 5$$
$$\overset{\text{حسب (1)}}{\Longrightarrow}\; 1 = 2\times 8 - 3(13-5) = 5\times 8 - 3\times 13$$

إذن : $1 = 5\times 8 - 3\times 13$. يعني : $1 = 8u_0 + 13v_0$.
حيث $u_0 = 5$ و $v_0 = -3$.
و منه :
$$x_0 = bpu_0 + aqv_0 = 3\times 8\times 5 - 1\times 13\times 3 = 81$$

إذن حلول النظمة (S_0) هي جميع الأعداد النسبية التي باقي قسمتها على 8×13 يساوي 81 .
يعني أن مجموعة الحلول هي صنف التكافؤ $\overline{81}$ في الفضاء $\mathbb{Z}/104\,\mathbb{Z}$.
أو باستعمال التكافؤ السابق نكتب :

$$\boxed{x \equiv 81\,[104] \iff x \text{ حل للنظمة } (S_0)}$$

أي أن مجموعة الحلول هي :

$$\boxed{les\ solutions = \{\,104k + 81\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\,\}}$$

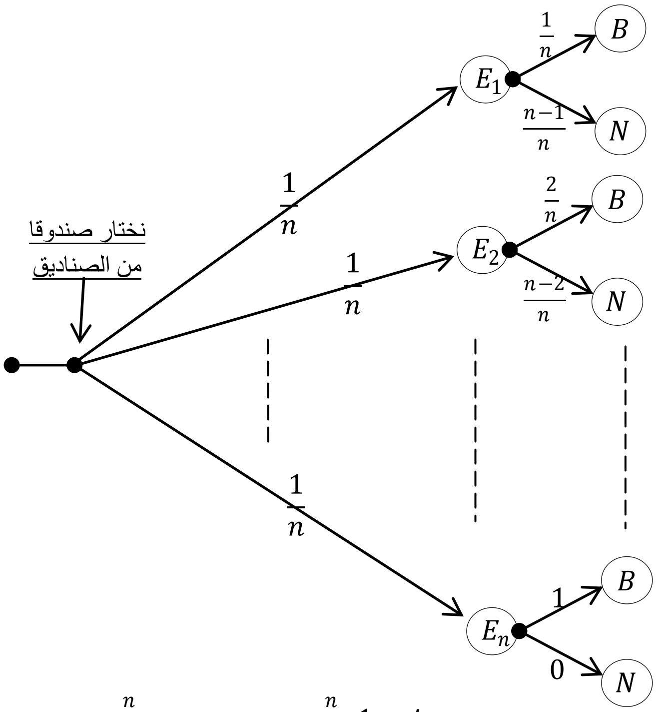
مثال من تلك الحلول : من أجل $k = 1$ نحصل على الحل 185 .
و بالفعل لدينا : $185 \equiv 1\,[8]$ و $185 \equiv 3\,[13]$.

التمرين الثاني 1

يُنصح باستعمال نموذج شجرة الاحتمالات لدراسة أي تجربة عشوائية
و في جل مراحل هذا التمرين نشتغل بـ $1 \le i \le n$.

و نضع :
- $E_i =$ " اختيار الصندوق رقم "
- $B =$ " سحب كرة بيضاء "
- $N =$ " سحب كرة سوداء "

نحول التجربة الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :

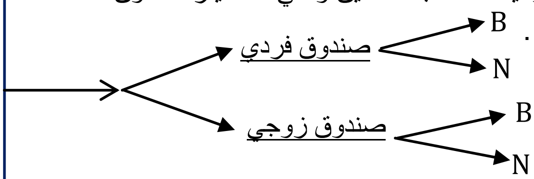


من خلال هذه الشجرة نكتب : $p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B\cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\times\frac{i}{n}$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$$
$$= \frac{n+1}{2n}$$

التمرين الثاني 2

لنحسب احتمال السحب من صندوق فردي (أي يحمل رقما فرديا)
نحن أمام تجربة عشوائية متعلقة بالصناديق و هي " اختيار صندوق
من بين n صندوق " .



في البداية أذكر بما يلي :
إذا كان n عددا فرديا فإنه في المجموعة $\{1,2,3,\cdots,n\}$
يوجد $\frac{n+1}{2}$ عدد فردي .
و إذا كان n عددا زوجيا فإنه في المجموعة $\{1,2,3,\cdots,n\}$
يوجد $\frac{n}{2}$ عدد فردي .

إذن :
$$p\left(\text{صندوق فردي}\right) = \frac{\text{عدد الصناديق الفردية}}{\text{مجموع}}$$
$$= \frac{\frac{n+1}{2}}{n} = \boxed{\frac{n+1}{2n}}$$

التمرين الثاني 3

نضع : B_I = " الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تَمَّ من صندوق يحمل رقما فرديا ".

من خلال شجرة الاحتمالات السابقة نكتب :

$$p(B_I) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\ \text{فردي}}}^{n} p(B\cap E_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\ \text{فردي}}}^{n} \left(\frac{i}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i=1 \\ i=2k+1}}^{n} i$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(2k+1) = \frac{1}{n^2}\left(2\left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} k\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{n^2-1}{4n^2}+\frac{n-1}{2n^2} = \frac{n^2-1}{4n^2}+\frac{2(n-1)}{4n^2}$$

$$= \frac{n^2+2n-3}{4n^2} = \boxed{\frac{(n-1)(n+3)}{4n^2}}$$

و بالتالي : $\boxed{p(B_I) = \frac{(n-1)(n+3)}{4n^2}}$

التمرين الثالث 1 أ

لدينا : $(H) : \{\,M(z)\ ;\ z^2+\bar z^2-|z|^2=1\}$.

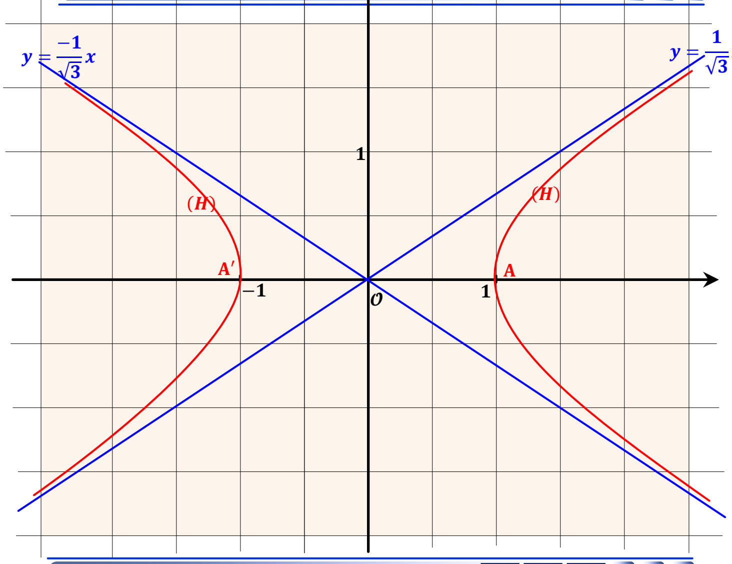
و نضع : $z = x+iy$.

إذن المجموعة (H) عبارة عن هذلول مركزه أصل المعلم $O(0,0)$

و رأساه هما $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$. و مقارباه هما المستقيمان

$y = \frac{1}{\sqrt3}x$ و $y=\frac{-1}{\sqrt3}x$.

التمرين الثالث 1 ب



التمرين الثالث 2 أ

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (H) .

نضع : $\varphi(a,b) = a\bar b+\bar a b-\overline{ab}$.

و من أجل اختصار الكتابة نضع مؤقتا $\varphi := \varphi(a,b)$.

لدينا $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (H) .

إذن: $\begin{cases} a^2+\bar a^2-|a|^2=1\\ b^2+\bar b^2-|b|^2=1\end{cases}$

نضرب المتساويتين طرفا طرفا نحصل على :

$$(a^2+\bar a^2-|a|^2)(b^2+\bar b^2-|b|^2)=1$$

يعني :

$$((a\bar b)^2+(\bar a b)^2) - (a^2|b|^2+b^2|a|^2) + (\bar a^2|b|^2+\bar b^2|a|^2)$$
$$= 1-\left((ab)^2+(\overline{ab})^2-|ab|^2\right)$$

و لدينا :

$$\varphi\bar\varphi = (a\bar b+\bar a b-\overline{ab})(\bar a b+a\bar b-ab)$$
$$= 3|ab|^2 + \left((a\bar b)^2+(\bar a b)^2\right) - (a^2|b|^2+b^2|a|^2) + (\bar a^2|b|^2+\bar b^2|a|^2)$$
$$= 3|ab|^2+1-\left((ab)^2+(\overline{ab})^2\right)-|ab|^2$$

إذن : $(*)\quad \varphi\bar\varphi = 2|ab|^2+1-\left((ab)^2+(\overline{ab})^2\right)$

من جهة أخرى: $\varphi-\bar\varphi = (a\bar b+\bar ab-\overline{ab}) - (\bar a b+a\bar b-ab)$
$= ab-\overline{ab}$

إذن : $(**)\quad \boxed{\varphi-\bar\varphi = ab-\overline{ab}}$

و منه : $(\varphi-\bar\varphi)^2 = \varphi^2+\bar\varphi^2-2\,\varphi\bar\varphi$
$= (ab)^2+(\overline{ab})^2-2|ab|^2$

يعني: $\varphi^2+\bar\varphi^2-2\,\varphi\bar\varphi = (\varphi^2+\bar\varphi^2-\varphi\bar\varphi)-\varphi\bar\varphi$
$= (ab)^2+(\overline{ab})^2-2|ab|^2$

و منه : $\varphi^2+\bar\varphi^2-|\varphi| = \varphi\bar\varphi + \left((ab)^2+(\overline{ab})^2-2|ab|^2\right)$

باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على: $\varphi^2+\bar\varphi^2-|\varphi|^2 =$
$= 2|ab|^2-\left((ab)^2+(\overline{ab})^2\right)+1+$
$+ (ab)^2+(\overline{ab})^2-2|ab|^2 = 1$

حصلنا إذن العلاقة التالية : $\varphi^2+\bar\varphi^2-|\varphi|^2=1$

أو باستعمال الترميز الأصلي نكتب :

$$\boxed{(\varphi(a,b))^2+\left(\overline{\varphi(a,b)}\right)^2-|\varphi(a,b)|^2=1}$$

و بالتالي $M(\varphi(a,b))$ نقطة من (H) .

التمرين الثالث 2 ب

$\varphi(z,1) = z+\bar z-\bar z = z$

$\varphi(z,\bar z) = zz+\bar z\bar z-\overline{z\bar z} = z^2+\bar z^2-\bar z z$
$= z^2+\bar z^2-|z|^2=1$

التمرين الثالث 3

نريد أن نبين أن * قانون تجميعي و تبادلي و يقبل عنصرا محايدا و كل عنصر يمتلك مماثلا في (H) بالقانون * .

نحتاج في البدية إلى أن نبين ما يلي :

$$\begin{cases} (1)\quad \varphi(a,b)-\varphi(\bar a,\bar b) = ab-\overline{ab}\\ (2)\quad \overline{\varphi(a,b)} = \varphi(\bar a,\bar b)\end{cases}$$

لدينا : $\overline{\varphi(a,b)} = \overline{(\bar a b+a\bar b-\overline{ab})} = a\bar b+\bar a b-ab$
$= \varphi(\bar a,\bar b)$

و لدينا كذلك :

$\varphi(a,b)-\varphi(\bar a,\bar b) = (a\bar b+\bar ab-\overline{ab})-(\bar a b+a\bar b-ab)$
$= ab-\overline{ab}$

الآن لتكن $M(a)$ و $M(b)$ و $M(c)$ ثلاث عناصر من (H) .

لدينا: $(M(a)*M(b))*M(c) = M(\varphi(a,b))*M(c)$

$$= M(\varphi(\varphi(a,b)\,;c))$$
$$= c\,\overline{\varphi(a,b)}+\bar c\,\varphi(a,b)-\bar c\,\overline{\varphi(a,b)}$$
$$= c\,\varphi(\bar a,\bar b)+\bar c\,\varphi(a,b)-\bar c\,\varphi(\bar a,\bar b)$$
$$= c\,\varphi(\bar a,\bar b)+\bar c\,\left(\varphi(a,b)-\varphi(\bar a,\bar b)\right)$$
$$= c\,\varphi(\bar a,\bar b)+\bar c\,(ab-\overline{ab})$$
$$= c(\bar a b+a\bar b-ab)+\bar c\,ab-\overline{abc}$$
$$= \bar a bc+\bar b ac+\bar c ab-(abc+\overline{abc})\quad (3)$$

و بنفس الطريقة لدينا : $M(a)*\big(M(b)*M(c)\big) = M(a)*M\big(\varphi(b,c)\big)$

$$\begin{aligned}
&= M\Big(\varphi\big(a\,;\,\varphi(b,c)\big)\Big)\\
&= \bar{a}\,\varphi(b,c) + a\,\varphi(\bar{b},\bar{c}) - \bar{a}\,\varphi(\bar{b},\bar{c})\\
&= a\,\varphi(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}\,\big(\varphi(b,c) - \varphi(\bar{b},\bar{c})\big)\\
&= a\,\varphi(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}\,\big(bc - \overline{bc}\big)\\
&= a\,\big(\bar{b}c + b\bar{c} - bc\big) + \bar{a}\,\big(bc - \overline{bc}\big)\\
&= \bar{a}bc + \bar{b}ac + \bar{c}ab - \big(abc + \overline{abc}\big) \quad (4)
\end{aligned}$$

من النتيجتين (3) و (4) نستنتج أن :

$$\big(M(a)*M(b)\big)*M(c) = M(a)*\big(M(b)*M(c)\big)$$

و بالتالي $*$ قانون تجميعي في (H) .

التبادلية :

في البداية لدينا :

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b) &= a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}\\
&= b\bar{a} + \bar{b}a - \overline{ba}\\
&= \varphi(b,a)
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\varphi(a,b) = \varphi(b,a)}$ (5) .

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا :

$$\begin{aligned}
M(a)*M(b) &= M\big(\varphi(a,b)\big)\\
&= M\big(\varphi(b,a)\big)\\
&= M(b)*M(a)
\end{aligned}$$

و بالتالي $*$ قانون تبادلي في (H) .

العنصر المحايد : ننطلق من الكتابة $M(a)*M(e) = M(a)$.

يعني : $M\big(\varphi(a,e)\big) = M\big(\varphi(a,1)\big)$.

إذن : $\varphi(a,e) = \varphi(a,1)$. يعني : $e = 1$

يعني : $M(a)*M(1) = M(1)*M(a) = M(a)$.

لأن القانون $*$ تبادلي .

و لدينا $1^2 + \bar{1}^2 - |1|^2 = 1$ إذن $M(1)\in(H)$.

إذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في (H) .

التماثل : ليكن $M(a)$ و $M(x)$ عنصرين من (H) .

ننطلق من الكتابة : $M(a)*M(x) = M(1)$.

إذن : $M\big(\varphi(a,x)\big) = M\big(\varphi(a,\bar{a})\big)$.

يعني : $\varphi(a,x) = \varphi(a,\bar{a})$. أي : $x = \bar{a}$.

بما أن : $M(a)\in(H)$. فإن : $a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1$.

و منه : $\underline{a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1}$ يعني : $\bar{a}^2 + a^2 - |a|^2 = 1$.

إذن : $M(\bar{a})\in(H)$.

و بالتالي كل عنصر $M(a)$ من (H) يقبل مماثلا $M(\bar{a})$ من (H) بالقانون $*$

خلاصة : $\boxed{(H,*)\ \text{زمرة تبادلية}\quad (H,*)\ \textit{est un groupe abélien}}$

التمرين الرابع 1 أ

لدينا F جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأن : $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \in F$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من F .

لدينا :

$$\begin{aligned}
M(a,b) - M(c,d) &= \begin{pmatrix} a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & -d\\ 5d & c-3d\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} (a-c)-(b+d) & -b-d\\ 5(b-d) & (a-c)-3(b+d)\end{pmatrix}\\
&= M\big((a-c)\,;\,(b-d)\big)\in F
\end{aligned}$$

إذن $(F,+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,;+)$.

ليكن $\lambda\in\mathbb{R}$ و $M(a,b)\in F$.

$$\begin{aligned}
\lambda\, M(a,b) = \lambda\begin{pmatrix} a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda a+\lambda b & -\lambda b\\ 5\lambda b & \lambda a-3\lambda b\end{pmatrix}\\
&= M(\lambda a,\lambda b)\in F
\end{aligned}$$

إذن F جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي $(\cdot)$.

و نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و F جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن الخاصيات التالية و الخاصة بـ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تبقى صالحة في المجموعة F

و منه ؛

$$\begin{cases} \alpha\cdot(M+M') = \alpha\cdot M + \alpha\cdot M'\\ (\alpha+\beta)\cdot M = \alpha\cdot M + \beta\cdot M\\ (\alpha\beta)\cdot M = \alpha\cdot(\beta\cdot M)\\ 1\cdot M = M\end{cases} \;;\; \begin{pmatrix} \forall\, M,M'\in F\\ \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{pmatrix}$$

و بالتالي $(F,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

ملاحظة : يمكن كذلك استعمال تقنية الفضاء المتجهي الجزئي

لكي تكون الأسرة (I,J) أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(F,+,\cdot)$

يكفي أن تكون حرة و تُوَلِّد الفضاء $(F,+,\cdot)$.

1 ب

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من $(F,+,\cdot)$.

$$\begin{aligned}
M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b\\ 5b & a-3b\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b\\ 5b & -3b\end{pmatrix}\\
&= a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\\
&= aI + bJ
\end{aligned}$$

إذن : $\forall\, M(a,b)\in F\ ;\ M(a,b) = aI + bJ$

و هذا يعني أن كل مصفوفة من F تُكتب على شكل تأليفة خطية للمصفوفتين

I و J و من تم فإن الأسرة (I,J) تُولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(F,+,\cdot)$

لنبين أن الأسرة (I,J) حرة .

ليكن α و β عددان حقيقيان بحيث $\alpha I + \beta J = 0$.

يعني : $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\beta\\ 5\beta & -3\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

و منه : $\begin{cases} \alpha+\beta = 0\\ -\beta = 0\\ 5\beta = 0\\ \alpha - 3\beta = 0\end{cases}$ أي : $\alpha = \beta = 0$ إذن (I,J) أسرة حرة .

و بالتالي (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي F و بُعده يساوي 2 .

(البُعد هو عدد عناصر الأساس)

التمرين الرابع 2

ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

هذا يعني أن : $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$; $(\exists\alpha_1\in\mathbb{R})(\exists\alpha_2\in\mathbb{R}^*)$

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا . نضع : $z = m_1 + m_2\alpha$

إذن : $z = m_1 + m_2(\alpha_1 + i\,\alpha_2) = m_1 + m_2\alpha_1 + i\,m_2\alpha_2$

و بما أن : $z = x + iy$ فإن : $\begin{cases} x = m_1 + m_2\alpha_1\\ y = m_2\alpha_2\end{cases}$

و منه : $\begin{cases} m_1 = \left(x - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}y\right)\in\mathbb{R}\\[2mm] m_2 = \left(\dfrac{y}{\alpha_2}\right)\in\mathbb{R}\end{cases}$

يعني : $(\forall z\in\mathbb{C})(\exists\,(m_1,m_2)\in\mathbb{R}^2)\ ;\ z = m_1 + m_2\alpha$

و هذا يعني بكل بساطة أن الأسرة $(1,\alpha)$ مولدة للفضاء المتجهي

الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$ (8) .

لتكن $x + \alpha y$ تأليفة خطية منعدمة للعنصرين 1 و α .

يعني : $x + \alpha y = 0$ أي : $x + y(\alpha_1 + i\alpha_2) = 0$

يعني : $\begin{cases} x + \alpha_1 y = 0\\ \alpha_2 y = 0\end{cases}$ أي : $\begin{cases} x = 0\\ y = 0\end{cases}$.

إذن $(1,\alpha)$ أسرة حرة (9) .

من (8) و (9) نستنتج أن $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$

التمرين الرابع 3 أ

نضع $z = x + \alpha y$ حيث x و y عددان حقيقيان

و نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :

$$\psi\ :\ \mathbb{C}\ \longrightarrow\ F$$
$$z = x + \alpha y\ \longrightarrow\ M(x,y)$$

لدينا $\alpha = 0 + \alpha 1$ إذن $\psi(\alpha) = M(0,1) = J$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned}
J^2 + 2(I+J) &= \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -4 & 2\\ -10 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2\\ 10 & -4\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

إذن : $J^2 + 2(I+J) = \mathcal{O}$

يعني أن : $J^2 = -2(I+J)$

التمرين الرابع | 3 ب

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث $z = x + \alpha y$ و $z' = c + \alpha d$.

لكي يكون ψ تشاكلا يكفي أن يحقق : $\psi(zz') = \psi(z) \times \psi(z')$

لدينا :
$$\begin{aligned}
\psi(x+\alpha y) \times \psi(c+\alpha d) &= M(x,y) \times M(c,d)\\
&= (x\,I + y\,J) \times (c\,I + d\,J)\\
&= xc\,I + xd\,J + yc\,J + yd\,J^2\\
&= xc\,I + xd\,J + yc\,J + yd(-2(I+J))\\
&= (xc - 2yd)I + (xd + yc - 2yd)J\\
&= M\big((xc-2yd)\,;\,(xd+yc-2yd)\big)\\
&= \psi\big((xc-2yd) + (xd+yc-2yd)\alpha\big)
\end{aligned}$$

إذن لكي يكون ψ تشاكلا يكفي أن نتحقق :
$$\psi\big((xc-2yd) + (xd+yc-2yd)\alpha\big) = \psi(xc + \alpha xd + \alpha yc + \alpha^2 yd)$$

يعني :
$$(xc-2yd) + \alpha(xd+yc-2yd) = xc + \alpha xd + \alpha yc + \alpha^2 yd$$

بعد ترتيب حدود هذه المتساوية نحصل على :
$$(yd)\alpha^2 + (2yd)\alpha + (2yd) = 0$$

يعني : $\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0$.

نحل هذه المعادلة الظريفة من الدرجة الثانية نجد $\alpha = -1 + i$

أو $\alpha = -1 - i$.

و أشير كذلك إلى أن كل عنصر $M(x,y)$ يوجد عدد عقدي وحيد $z = x + \alpha y$ حيث $\psi(z) = M(x,y)$. و ذلك لأن $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $\mathbb{C}$. و كل عدد يُكتب بكيفية وحيدة على شكل تأليفة خطية لـ 1 و α .

خلاصة : من أجل $\alpha = i - 1$ أو $\alpha = -1 - i$ يكون ψ تشاكلا تقابليا من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(F,\times)$.

التمرين الرابع | 4

نأخذ : $\alpha = -1 + i$. لدينا :
$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
&= \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\,e^{\frac{i3\pi}{4}} = \left[\sqrt{2}\,,\frac{3\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

و منه حسب $Moivre$:
$$\alpha^{2007} = \left[\sqrt{2}^{2007}\,,\frac{2007 \times 3\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}^{2007}\,,\frac{6021\pi}{4}\right]$$

بما أن : $\dfrac{6021\pi}{4} = 2 \times 752 \times \pi + \dfrac{5\pi}{4}$

فإن : $\dfrac{6021\pi}{4} \equiv \dfrac{5\pi}{4}\ [2\pi]$

و منه : $\alpha^{2007} = \left[\sqrt{2}^{2007}\,;\frac{5\pi}{4}\right]$

لنكتب الآن α^{2007} في الأساس $(1,\alpha)$.

ليكن x و y عددين حقيقيين حيث $\alpha^{2007} = x \cdot 1 + y \cdot \alpha$ $(*)$.

هدفنا هو تحديد x و y .

لدينا :
$$\begin{aligned}
x + \alpha y &= [x,0] + \left[\sqrt{2}\,,\frac{3\pi}{4}\right] \times [y,0]\\
&= [x,0] + \left[\sqrt{2}y\,;\frac{3\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

إذن بالإستعانة بالمتساوية $(*)$ نكتب :
$$\left[\sqrt{2}^{2007}\,;\frac{5\pi}{4}\right] = [x,0] + \left[\sqrt{2}y\,;\frac{3\pi}{4}\right]$$

إذن الجزءان الحقيقيان لطرفي هذه المتساوية متساويان و الجزءان التخيليان متساويان كذلك . و من ثم نحصل على النظمة العجيبة (S) التالية :
$$(S) : \begin{cases}\sqrt{2}^{2007}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = x + \sqrt{2}y\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\[2mm] \sqrt{2}^{2007}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}y\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\end{cases}$$

لدينا : $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

و كذلك : $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

إذن النظمة (S) تصبح :
$$(S) : \begin{cases}\sqrt{2}^{2007}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = x + \sqrt{2}y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\\[2mm] \sqrt{2}^{2007}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

من المعادلة الثانية نستنتج أن : $y = -2^{1003}$

و لدينا حسب المعادلة الأولى : $x = -2^{1003} - (2^{1003} \times 2^0) = -2^{1004}$

و بالتالي : $\alpha^{2007} = (-2^{1003}) + \alpha(-2^{1004})$

بعد حصولنا على هذه الصيغة الثمينة تصبح التتمة سهلة و في المتناول .

لدينا :
$$\begin{aligned}
J^{2007} &= J \times J \times \cdots \times J\\
&= \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \cdots \times \psi(\alpha)\\
&= \psi(\alpha \times \alpha \times \alpha \times \cdots \times \alpha)\\
&= \psi(\alpha^{2007})\\
&= \psi\big((-2^{1003}) + \alpha(-2^{1004})\big)\\
&= M\big((-2^{1003})\,;\,(-2^{1004})\big)\\
&= (-2^{1003})\,I + (-2^{1004})\,J
\end{aligned}$$

و بالتالي:
$$\boxed{J^{2007} = (-2^{1003})\,I + (-2^{1004})\,J}$$

التمرين الخامس | I 1 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $g(x) = 1 + x - e^{-x}$

g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن مجموع من الدوال المعرفة و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

لدينا : $g'(x) = 1 + e^{-x} > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذن g دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

التمرين الخامس | I 1 ب

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(1 + x - e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1 + x - e^{-x}) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين الخامس | I 1 ج

لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $g(\mathbb{R})$
$$\begin{aligned}
g(\mathbb{R}) = g(]-\infty\,;+\infty[) &= \left]\lim_{x\to-\infty} g(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} g(x)\right[\\
&=]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

بما أن 0 عنصر من $\mathbb{R}$ و g تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

فإنه يوجد عدد وحيد x_0 من $\mathbb{R}$ حيث $g(x_0) = 0$.

من جهة أخرى لدينا : $g(0) = 1 + 0 - e^{-0} = 0$.

إذن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.

التمرين الخامس I 2 أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=g(x)}}\frac{1}{t} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=g(x)}}\frac{1}{t} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=g(x)}}\frac{1}{t} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\substack{t\to0^-\\ t=g(x)}}\frac{1}{t} = -\infty$$

التمرين الخامس I 2 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{-(1+e^{-x})}{(1+x-e^{-x})^2}$$

التمرين الأول I 2 ج

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x) = \dfrac{-(1+e^{-x})}{(1+x-e^{-x})^2}$

و نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ 1+e^{-x} > 0$.

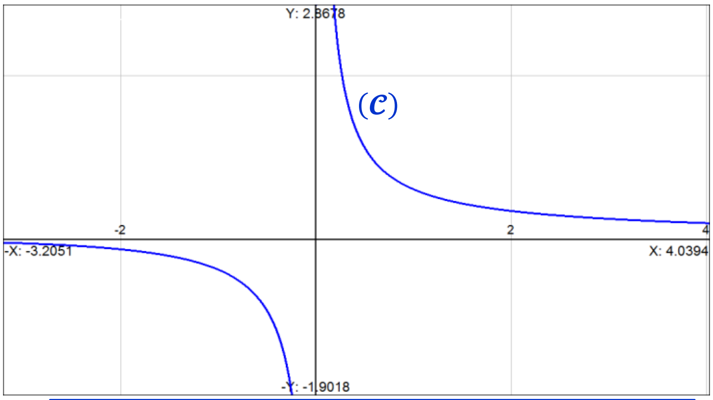
إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) < 0$.

و هذا يعني أن الدالة f تناقصية على $\mathbb{R}^*$.

و نضع جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

التمرين الخامس I 2 د



التمرين الأول I 3 أ

نعتبر الدوال العددية h_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي

$h_n(x) = f(x) - n\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$.

نلاحظ في البداية أن h_n متصلة على $]0;+\infty[$ لأن f متصلة على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}_+^*)\ ;\ h_n'(x) = f'(x) < 0$.

إذن h_n تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

و بالتالي h_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو صورته $h_n(\,]0,+\infty[\,)$

$h_n(\,]0,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} h_n(x)\ ;\ \lim_{x\to0^+} h_n(x)\right[=]-n\ ;\ +\infty[$

و بالتالي h_n تقابل من المجال $]0;+\infty[$ نحو المجال $]-n\ ;+\infty[$.

و بما أن 0 عنصر من مجموعة الوصول $]-n\ ;+\infty[$.

فإنه يقبل سابقا واحدا x_n في المجال $]0\ ;+\infty[$ بالتقابل h_n .

أو بتعبير أجمل : $\exists!\ x_n\ \epsilon\ ]0,+\infty[\ ;\ h_n(x_n) = 0$.

يعني : $\exists!\ x_n\ \epsilon\ ]0,+\infty[\ ;\ f(x_n) = n \quad (*)$

التمرين الخامس I 3 ب

نعلم أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})(\exists!\ x_n\ \epsilon\ ]0,+\infty[\,)\ ;\ f(x_n) = n$

لدينا : $(n+1) > n\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N})$.

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ f(x_{n+1}) > f(x_n)$

و ذلك لأن : $f(x_n) = n$ و $f(x_{n+1}) = n+1$.

و بما أن f متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} تناقصية كذلك .

إذن نُدخل الدالة التناقصية f^{-1} على المتفاوتة $f(x_{n+1}) > f(x_n)$

نحصل على : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ f^{-1}\big(f(x_{n+1})\big) > f^{-1}\big(f(x_n)\big)$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ x_{n+1} > x_n$

و بالتالي $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

و لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ x_n\ \epsilon\ ]0,+\infty[$.

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ x_n > 0$.

إذن المتتالية $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ مصغورة بالعدد 0 .

و بالتالي $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة لأنها تناقصية و مصغورة .

و نضع $l = \lim(x_n)$

التمرين الخامس I 3 ج

نعلم أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})(\exists!\ x_n > 0\,)\ ;\ f(x_n) = n$.

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}), (\exists!\ x_n > 0\,)\ ;\ \dfrac{1}{1+x_n-e^{-x_n}} = n$

أي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}), (\exists!\ x_n > 0\,)\ ;\ (1+x_n-e^{-x_n}) = \dfrac{1}{n}$

عندما يؤول n إلى $+\infty$ نحصل على : $\lim\limits_{n\infty}(1+x_n-e^{-x_n}) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

أي : $1+l-e^{-l} = 0$ يعني : $(1+l) = e^{-l}$.

لنبين الآن على أن $l = 0$. و من أجل ذلك نستعين بالبرهان بالخلف

و نفترض أن $l \neq 0$. إذن : $l > 0$ أو $l < 0$.

بما أن $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ x_n > 0$. فإن $l > 0$.

و منه $e^{-l} < 1$ و $1+l > 0$.

لدينا $(1+l) = e^{-l}$ إذن $0 < (1+l) < 1$.

يعني : $-1 < l < 0$ و هذا تناقض مع كون $l > 0$.

و بالتالي : $l = \lim(x_n) = 0$

التمرين الخامس II 1 أ

$$f(x) = 1 \iff \frac{1}{1+x-e^{-x}} = 1 \iff 1+x-e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = x$$

التمرين الخامس II 1 ب

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x) = e^{-x} - x$

لدينا φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها فرق دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$.

إذن φ متصلة على أي مجال من $\mathbb{R}$ و بالخصوص نختار المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$

لدينا : $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{-1}{e}} - \frac{1}{e}$ و : $\varphi(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$

لنحدد الآن إشارة كل من $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\varphi(1)$.

لدينا $-1 < 0$ إذن $e^{-1} < 1$ يعني : $e^{-1} - 1 < 0$

و منه : $\varphi(1) < 0 \quad (1)$

و لدينا : $e > 1$. إذن : $\frac{1}{e} < 1$.

يعني : $e^{\frac{1}{e}} < e$. أي : $e^{\frac{-1}{e}} > \frac{1}{e}$. إذن : $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) > 0 \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن $\varphi(1) \times \varphi\left(\frac{1}{e}\right) < 0$.

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $\exists\ \alpha\ \epsilon\ \left]\frac{1}{e},1\right[\ ;\ \varphi(\alpha) = 0$

أو بتعبير آخر : $\exists\ \alpha\ \epsilon\ \left]\frac{1}{e},1\right[\ ;\ e^{-\alpha} = \alpha$

التمرين الخامس II 2 أ

لنبين باستعمال البرهان بالترجع على صحة العبارة (P_n) التالية .

$$(P_n)\ :\ \frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$$

من أجل $n = 1$ لدينا $\frac{1}{e} \leq y_1 = 1 \leq 1$.
إذن العبارة (P_1) صحيحة .
ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و نفترض أن (P_n) صحيحة .
إذن : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ و منه : $-1 \leq -y_n \leq \frac{-1}{e}$
أي : $e^{-1} \leq e^{-y_n} \leq e^{\frac{-1}{e}}$ إذن : $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq e^{\frac{-1}{e}}$ (3)
و لدينا كذلك $\frac{1}{e} > 0$ إذن $e^{\frac{1}{e}} > 0$ و منه : $e^{\frac{-1}{e}} < 1$ (4)
من (3) و (4) نستنتج أن : $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$
و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .
و بذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية :

$$\begin{cases} (P_1)\ est\ vraie \\ (P_n) \implies (P_{n+1})\ ;\ \forall n \epsilon \mathbb{N}^* \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$.
يعني : $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

التمرين الخامس II 2 ب

سوف نستعمل في هذا السؤال مبرهنة التزايدات المنتهية (TAF) .
و من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\varphi(x) = e^{-x}$
نلاحظ أن φ متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
إذن يمكن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة φ في أي مجال يوجد ضمن $\mathbb{R}$.
نختار المجال الذي طرفاه α و y_n و الذي سوف نرمز له بالرمز $\overleftrightarrow{[\alpha, y_n]}$ و ذلك لأنه لا ندري من الأكبر من بين α و y_n .
لدينا φ متصلة على $\overleftrightarrow{[\alpha, y_n]}$ و قابلة للاشتقاق على $\overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}$
إذن حسب :

$$\exists!\, c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\ ;\ \left(\frac{\varphi(y_n) - \varphi(\alpha)}{y_n - \alpha}\right) = \varphi'(c)$$

$$\implies \exists!\, c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\ ;\ \left|\frac{\varphi(y_n) - \varphi(\alpha)}{y_n - \alpha}\right| = |\varphi'(c)|$$

نعلم أن : $\begin{cases} \varphi(y_n) = e^{-y_n} = y_{n+1} \\ \varphi(\alpha) = e^{-\alpha} = \alpha \end{cases}$

إذن : $\exists!\, c\ \epsilon\ \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\ ;\ |y_{n+1} - \alpha| = |\varphi'(c)| \cdot |y_n - \alpha|$ $(*)$
و نعلم أن $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ و $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ و $\alpha < c < y_n$.
إذن : $\frac{1}{e} < c < 1$
و منه : $-e^{-1} < -e^{-c} < -e^{\frac{-1}{e}}$ (5)
نعلم أن العدد الموجب يكون دائما أكبر من العدد السالب .
إذن : $-e^{-1} < e^{\frac{-1}{e}}$ (6)
من (5) و (6) نستنتج أن : $-e^{\frac{-1}{e}} < -e^{-c} < e^{\frac{-1}{e}}$
يعني أن : $|\varphi'(c)| < e^{\frac{-1}{e}}$
نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|y_n - \alpha|$ نجد :

$$|y_n - \alpha| \cdot |\varphi'(c)| < e^{\frac{-1}{e}} |y_n - \alpha|$$

و باستعمال النتيجة $(*)$ نكتب في الأخير .

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ |y_{n+1} - \alpha| < e^{\frac{-1}{e}} |y_n - \alpha| \quad (**)$$

التمرين الخامس II 2 ج

باستعمال النتيجة $(**)$ نلاحظ أن : $|y_n - \alpha| < e^{\frac{-1}{e}} |y_{n-1} - \alpha|$

$$\begin{aligned}
&< \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)\left(e^{\frac{-1}{e}}\right) |y_{n-2} - \alpha| \\
&< \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)\left(e^{\frac{-1}{e}}\right)\left(e^{\frac{-1}{e}}\right) |y_{n-3} - \alpha| \\
&< \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^4 |y_{n-4} - \alpha| \\
&\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
&< \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |y_{n-(n-1)} - \alpha|
\end{aligned}$$

إذن : $|y_n - \alpha| < \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |y_1 - \alpha|$
يعني : $|y_n - \alpha| = \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha|$
لنحسب الآن نهاية المتتالية $\left(\left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha|\right)_{n \epsilon \mathbb{N}}$
نعلم أن $\frac{1}{e} > 0$ إذن $\frac{-1}{e} < 0$ و منه $e^{\frac{-1}{e}} < 1$.
إذن $\left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1}$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب و أصغر من 1 .
إذن : $\lim \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} = 0$ و منه : $\lim \left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha| = 0$
نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ |y_n - \alpha| < \underbrace{\left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha|}_{n\infty}$$

$$0$$

أو بتعبير أوضح نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{-\left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha|}_{n\infty \ \to\ 0} < (y_n - \alpha) < \underbrace{\left(e^{\frac{-1}{e}}\right)^{n-1} |1 - \alpha|}_{n\infty \ \to\ 0}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نكتب $\lim\limits_{n\infty}(y_n - \alpha) = 0$
أي : $\lim\limits_{n\infty}(y_n) = \alpha$
و بالتالي $(y_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى العدد α .

التمرين الخامس III 1 أ

ليكن $t > 0$ إذن $e^{-t} < 1$ أي $-e^{-t} > -1$
و منه : $(t + 1) - e^{-t} > (t + 1) - 1$

$$\begin{aligned}
&\implies t + 1 - e^{-t} > t \\
&\implies \frac{1}{t + 1 - e^{-t}} < \frac{1}{t} \\
&\implies f(t) < \frac{1}{t} \quad (1)
\end{aligned}$$

و لدينا كذلك $-e^{-t} < 0$ إذن $(t + 1) - e^{-t} < (t + 1)$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{1}{t + 1 - e^{-t}} > \frac{1}{t + 1} \\
&\implies f(t) > \frac{1}{t + 1} \quad (2)
\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{1}{t + 1} < f(t) < \frac{1}{t}$; $(\forall t > 0)$

التمرين الخامس III 1 ب

لدينا : $\frac{1}{t+1} < f(t) < \frac{1}{t}$; $(\forall t > 0)$

نلاحظ أن طرفي هذا التأطير عبارة عن دالتين متصلتين على $]0,+\infty[$.
و لدينا : $x < 2x$. إذن بعد إدخال التكامل $\int_x^{2x} dt$ على هذه المتفاوتة نحصل على . $\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t+1}\right)dt < \int_x^{2x} f(t)\,dt < \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}\right)dt$

إذن : $[\ln|1+t|]_x^{2x} < F(x) < [\ln|t|]_x^{2x}$

نأخذ $x > 0$ و $t > 0$ نجد :

$$\ln(1+2x) - \ln(1+x) < F(x) < \ln(2x) - \ln x$$

أي : $\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) < F(x) < \ln 2$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1}\right) = \ln 2$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 0)\ ;\ \underbrace{\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ \ln 2} < F(x) < \underbrace{\ln 2}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ \ln 2}$$

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و التأطير نجد : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ln 2}$

التمرين الخامس III 2 أ

تذكير : إذا كانت f و g دالتين معرفتين على $[a,b]$ بحيث f و g متصلتين على $[a,b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a,b[$.

و : $\begin{cases} \forall t \in [a,b]\ ;\ f'(t) \geq g'(t) \\ f(a) = g(a) \end{cases}$

فإن : $\forall t \in [a,b]\ ;\ f(t) \geq g(t)$

ليكن t عددا حقيقيا موجبا و نعتبر الدوال العددية φ و ψ و h المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \varphi(t) = 1 - t \\ \psi(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} \\ h(t) = e^{-t} \end{cases}$$

لدينا φ و ψ و h كلها دوال متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و لدينا : $\begin{cases} \varphi'(t) = -1 \\ \psi'(t) = t - 1 \\ h'(t) = -e^{-t} \end{cases}$

لدينا $t \geq 0$ إذن $-t \leq 0$.
و منه $-e^{-t} \leq -1$ يعني $h'(t) \leq \varphi'(t)$.
و بما أن : $h(0) = \varphi(0) = 1$.
فإن : $(\forall t \in [0,+\infty[)\ ;\ h(t) \leq \varphi(t)$
يعني : $(\forall t \in [0,+\infty[)\ ;\ e^{-t} \leq 1 - t \quad (1)$
و بنفس الطريقة لدينا : $-e^{-t} \geq t - 1$. إذن : $h'(t) \geq \psi'(t)$
و بما أن : $h(0) = \psi(0) = 1$ فإنه حسب الخاصية المذكورة :
$(\forall t \in [0,+\infty[)\ ;\ h(t) \geq \psi(t)$
يعني : $(\forall t \in [0,+\infty[)\ ;\ e^{-t} \geq 1 - t + \frac{t^2}{2} \quad (2)$
من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall t \geq 0)\ ;\ \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \geq (1 - t)$$

التمرين الخامس III 2 ب

لدينا : $(\forall t \geq 0)\ ;\ \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \geq (1 - t)$

هذا التأطير صالح لأي عدد t من $\mathbb{R}^*$. إذن فهو صالح في أي مجال يوجد ضمن $\mathbb{R}^*$. و نختار المجال $]0;4[$.

إذن نكتب : $\forall t \in]0;4[\ ;\ \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t} \geq (1-t)$

يعني : $\forall t \in]0;4[\ ;\ -(1-t) \geq -e^{-t} \geq -\left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right)$

نضيف إلى أطراف هذا التأطير الكمية $(1+t)$ نجد :

$$(\forall t \in]0;4[)\ ;\ 2t \geq 1 + t - e^{-t} \geq 2t - \frac{t^2}{2}$$

يعني : $\forall t \in]0;4[\ ;\ 2t \geq 1 + t - e^{-t} \geq \frac{4t - t^2}{2}$

و عند المرور إلى المقلوب نجد :

$$(\forall t \in]0;4[)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{1 + t - e^{-t}} \leq \frac{2}{4t - t^2}$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall t \in]0;4[)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{2}{4t - t^2}$$

و لدينا : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4 - t + t}{4t - t^2}\right) = \frac{4}{2(4t - t^2)} = \frac{2}{4t - t^2}$

و بالتالي : $(\forall t \in]0;4[)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

التمرين الخامس III 2 ج

لدينا : $(\forall t \in]0;4[)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

$$\Rightarrow\ \int_x^{2x}\left(\frac{1}{2t}\right)dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)dt$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}[\ln|t|]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}[\ln|t|]_x^{2x} + \frac{1}{2}[\ln|4-t|]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\ln 2}{2} \leq F(x) \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right) = \ln\left(\frac{4-0}{4-0}\right) = \ln 1 = 0$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{\ln 2}{2}\right)}_{\xrightarrow[x\to0^+]{}\ \frac{\ln 2}{2}} \leq F(x) \leq \underbrace{\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)\right)}_{\xrightarrow[x\to0^+]{}\ \frac{\ln 2}{2}}$$

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\lim_{x\to0^+} F(x) = \frac{\ln 2}{2} = F(0)$$

و بالتالي F دالة متصلة على يمين الصفر .

التمرين الخامس III 3 أ

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$.
إذن f دالة متصلة على المجال $]0;+\infty[$.
ليكن a عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.
إذن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال $]0;+\infty[$ و بالخصوص فهي تقبل دالة أصلية $\mathcal{T}$ و التي تنعدم في a و تحقق :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{T}\ :\ ]0,+\infty[\ \longrightarrow\ \mathbb{R} \\ \qquad x\ \longrightarrow\ \int_a^x f(t)\,dt \end{array}} \quad \text{و} \quad \boxed{\begin{cases} \mathcal{T}(a) = 0 \\ \mathcal{T}'(x) = f(x) \end{cases}}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة F نكتب :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} f(t)\,dt = \int_x^{a} f(t)\,dt + \int_a^{2x} f(t)\,dt \\ &= \int_a^{2x} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \\ &= \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $(\forall x > 0)\ ;\ F(x) = \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$

و بما أن : $x \longrightarrow 2x$ و $x \longrightarrow \mathcal{T}(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ فإن الدالة $x \longrightarrow \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\,\mathcal{T}'(2x) - \mathcal{T}'(x) \\ &= 2\,f(2x) - f(x) \\ &= \frac{2}{g(2x)} - \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{2\,g(x) - g(2x)}{g(2x) \times g(x)} \\ &= \frac{2(1 + x - e^{-x}) - (1 + 2x - e^{-2x})}{g(2x) \times g(x)} \\ &= \frac{(e^{2x} - 2e^{x} + 1)}{e^{2x} g(2x) g(x)} \\ &= \frac{(e^{x} - 1)^2}{e^{2x} g(2x) g(x)} \end{aligned}$$

التمرين الخامس III 3 ب

نعلم أنه إذا كان x عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$ فإن :

$$\begin{cases} g(2x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ e^{2x} > 0 \\ (e^{x} - 1)^2 > 0 \end{cases}$$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ F'(x) > 0$

و بالتالي F تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

أجوبة امتحان الدورة العادية 2008

التمرين الأول 1 أ

نلاحظ أن E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأن : $M(0,0)\in E$.

ليكن γ و β عددين حقيقيين و $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E

$$\gamma M(a,b)+\beta M(c,d) = \gamma\begin{pmatrix} a & \sqrt3 b\\ \frac{-1}{\sqrt3}b & a\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} c & \sqrt3 d\\ \frac{-1}{\sqrt3}d & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma a+\beta c & \sqrt3(\gamma b+\beta d)\\ \frac{-1}{\sqrt3}(\gamma b+\beta d) & \gamma a+\beta c\end{pmatrix}$$

إذن : $\gamma M(a,b)+\beta M(c,d)\in E$; $\left(\begin{array}{c}\forall\,(\gamma,\beta)\in\mathbb{R}^2\\ \forall\, M(\gamma,\beta),M(c,d)\in E\end{array}\right)$

إذن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

التمرين الأول 1 ب

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من المجموعة E .

$$M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt3b\\ \frac{-1}{\sqrt3}b&a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&\sqrt3\\ \frac{-1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix} = aI+bJ$$

إذن كل مصفوفة من E تُكتبُ على شكل تأليفة خطية للمصفوفتين I و J .

و هذا يعني أن الأسرة (I,J) تُوَلِّدُ الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$.

لنبين الآن أن (I,J) أسرة حرة .

من أجل ذلك نعتبر تأليفة منعدمة للمصفوفتين I و J .

$$\alpha I+\beta J=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha&\sqrt3\beta\\ \frac{-1}{\sqrt3}\beta&\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$$

إذن (I,J) أسرة حرة (أو مستقلة خطيا) .

و بالتالي (I,J) أساس الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$.

التمرين الأول 2 أ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من الفضاء المتجهي E .

لدينا : $M(a,b)\times M(c,d) = (aI+bJ)\times(cI+dJ) = ac\,I+ad\,J+bc\,J+bd\,J^2$

و لدينا : $J^2=\begin{pmatrix}0&\sqrt3\\ \frac{-1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&\sqrt3\\ \frac{-1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I$

إذن: $M(a,b)\times M(c,d)=(ac-bd)I+(ad+bc)J = M(ac-bd\ ;\ ad+bc)\in E$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول 2 ب

ليكن $(a+ib)$ و $(c+id)$ عددين عقديين غير منعدمين .

لدينا : $f\big((a+ib)\times(c+id)\big) = f\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big) = M(ac-bd\ ;\ ad+bc) = M(a,b)\times M(c,d) = f(a+ib)\times f(c+id)$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

لنبين الآن أن f تقابل .

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E^* .

نريد الآن حل المعادلة التالية : $f(x+iy)=M(a,b)$

$$\Leftrightarrow M(x,y)=M(a,b) \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x&\sqrt3y\\ \frac{-1}{\sqrt3}&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&\sqrt3b\\ \frac{-1}{\sqrt3}&a\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$$

إذن المعادلة $f(x+iy)=M(a,b)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{C}^*$.

إذن f تقابل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

التمرين الأول 3

نعلم أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي . إذن $(E,+)$ زمرة تبادلية (1)

و لدينا كذلك $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية .

إذن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية لأن f تشاكل تقابلي (2)

بما أن الضرب $\times$ توزيعي بالنسبة للجمع في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و بما أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

فإن $\times$ توزيعي بالنسبة للجمع في E (3) .

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

التمرين الأول 4

لنحل في E المعادلة $J\times X^3=I$.

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow -J\times J\times X^3=-J\\ &\Leftrightarrow -J^2\times X^3=-J\\ &\Leftrightarrow X^3=-J\\ &\Leftrightarrow [M(a,b)]^3=M(0,-1)\\ &\Leftrightarrow [f(a+ib)]^3=f(-i)\\ &\Leftrightarrow f\big((a+ib)^3\big)=f(-i)\\ &\Leftrightarrow (a+ib)^3=-i\end{aligned}$$

لنحل إذن في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3=-i$.

من أجل ذلك نضع $z=re^{i\theta}$ إذن $r^2e^{3i\theta}=e^{\frac{-i\pi}{2}}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}r=1\\ \theta=\frac{-\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\ ;\ k\in\{0;1;2\}\end{cases}$$

إذا كان $k=0$ فإن $z_0=e^{\frac{-i\pi}{6}}=\frac{\sqrt3}{2}-\frac12 i$

إذن المصفوفة $M\left(\frac{\sqrt3}{2}\ ;\ \frac{-1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k=1$ فإن $z_1=e^{\frac{i\pi}{2}}=i$

إذن المصفوفة $M(0,1)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k=2$ فإن $z_2=e^{\frac{7i\pi}{6}}=\frac{-\sqrt3}{2}-\frac12 i$

إذن المصفوفة $M\left(\frac{-\sqrt3}{2}\ ;\ \frac{-1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة $J\times X^3=I$ تُكتب على الشكل :

$$S=\left\{\left(\frac{\sqrt3}{2}I-\frac12J\right)\ ;J\ ;\left(\frac{-\sqrt3}{2}I-\frac12J\right)\right\}$$

التمرين الثاني I 1 أ

نعتبر المعادلة التالية : $(G) : i\,z^2+(a+\bar a-i)z-\bar a-i\,a\bar a$

لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+\bar a-i)^2+4i\,(\bar a+ia\bar a)\\ &= a^2+\bar a^2-1+2a\bar a-2\bar a i-2ai+4i\bar a-4a\bar a\\ &= a^2+\bar a^2-1-2a\bar a+2\bar a a-2ai\\ &= (a-\bar a-i)^2\end{aligned}$$

التمرين الثاني I 1 ب

لدينا : $\Delta=(a-\bar a-i)^2$. إذن المعادلة G تقبل حلين :

$$z_1=\frac{(i-a-\bar a)-(a-\bar a-i)}{2i}=1+ai$$

$$z_2=\frac{(i-a-\bar a)+(a-\bar a-i)}{2i}=\bar a i$$

إذن مجموعة حلول المعادلة G هي : $S_a=\{1+ai\ ;\ \bar a i\}$

التمرين الثاني | I | 2 |

لدينا المعادلة G تقبل الحلين $\bar{a}i$ و $1+ai$.

إذا كان a حلا للمعادلة (G) فهذا يعني أن : $a=\bar{a}i$ أو $a=1+ai$

في حالة $a=\bar{a}i$ لدينا : $\mathfrak{Re}(a)+i\,\mathfrak{Im}(a) = i\left(\mathfrak{Re}(a)+i\mathfrak{Im}(a)\right) = \mathfrak{Im}(a)+i\,\mathfrak{Re}(a)$

إذن : $\mathfrak{Re}(a)=\mathfrak{Im}(a)$

و في حالة $a=1+ai$ فإن : $\mathfrak{Re}(a)+i\,\mathfrak{Im}(a) = 1+i\left(\mathfrak{Re}(a)+i\,\mathfrak{Im}(a)\right)$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{Re}(a)+i\,\mathfrak{Im}(a) = \left(1-\mathfrak{Im}(a)\right)+i\left(\mathfrak{Re}(a)\right)$$

يعني : $\begin{cases}\mathfrak{Re}(a)=1-\mathfrak{Im}(a)\\ \mathfrak{Im}(a)=\mathfrak{Re}(a)\end{cases}$ أي : $\mathfrak{Re}(a)=\mathfrak{Im}(a)$

إذن في كلتا الحالتين نحصل على : $\mathfrak{Re}(a)=\mathfrak{Im}(a)$.

عكسيا : ليكن a عددا عقديا مكتوبا على شكل $a=r+ri$.

لدينا : $\bar{a}i=(r-ri)i=ri+r=a$.

إذن a حل للمعادلة (G) لأنه مكتوب على شكل $\bar{a}i$.

و بالتالي : $\mathfrak{Im}(a)=\mathfrak{Re}(a) \Leftrightarrow a$ حل لـ (G)

التمرين الثاني | II | 1 | أ

$$\bar{z}=\overline{\left(\frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}\right)}=\frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}}=\frac{1-i\bar{a}-\bar{a}}{-ia-\bar{a}}=\frac{1-\bar{a}(i+1)}{-ia-\bar{a}}$$

نضرب البسط و المقام في العدد العقدي $(-i)$ نجد : $\bar{z}=\dfrac{-i+\bar{a}(i-1)}{-a+\bar{a}i}$

ننطلق من كون $A(a)$ و $B(ia)$ و $C(1+ai)$ نقط مستقيمية .

$$\Leftrightarrow \frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}\right)}=\frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}}=\frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}}=\frac{(i-a)-ai}{-\bar{a}-ai}$$
$$\Leftrightarrow (1-\bar{a}i)-\bar{a}=(i-a)-ai$$
$$\Leftrightarrow i(a-\bar{a})+(a-\bar{a})=(i-1)$$
$$\Leftrightarrow (a-\bar{a})=\left(\frac{i-1}{i+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(2\,\mathfrak{Im}(a)\right)i=\frac{-2i}{-2}=i$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{Im}(a)=\frac{1}{2}$$

التمرين الثاني | II | 2 | أ

ننطلق من الكتابة $R_1(B)=B'$

$$\Leftrightarrow (z_{B'}-z_A)=e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_B-z_A)$$
$$\Leftrightarrow (b'-a)=-i(i\bar{a}-a)$$
$$\Leftrightarrow b'=\bar{a}+ia+a$$

بنفس الطريقة ننطلق من الكتابة : $R_2(C)=C'$

$$\Leftrightarrow (z_{C'}-z_A)=e^{\frac{i\pi}{2}}(z_C-z_A)$$
$$\Leftrightarrow (c'-a)=i(1+ai-a)$$
$$\Leftrightarrow c'=i(1-a)$$

التمرين الثاني | II | 2 | ب

لدينا E هي منتصف القطعة $[BC]$.

إذن : $z_E=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{i\bar{a}+ai+1}{2}$

إذن :
$$\frac{z_{C'}-z_{B'}}{z_E-z_A}=\frac{i(1-a)-(\bar{a}+ia+a)}{\frac{i\bar{a}+ai+1}{2}-a}=2\left(\frac{i-2ai-\bar{a}-a}{i\bar{a}+ai+1-2a}\right)=2i\left(\frac{1-2a+\bar{a}i+ai}{i\bar{a}+ai+1-2a}\right)=2i$$

إذن : $\dfrac{z_{C'}-z_{B'}}{z_E-z_A}=2i$ $(\sharp)$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{C'}-z_{B'}}{z_E-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{B'C'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow (AE)\perp(B'C')$$

و لدينا كذلك حسب النتيجة $(\sharp)$: $\left|\frac{z_{C'}-z_B}{z_E-z_A}\right|=2$

إذن : $|z_{C'}-z_{B'}|=2|z_E-z_A|$ يعني : $B'C'=2\,AE$

التمرين الثالث | I | 1 |

لدينا : $35\times11-96\times4=1$.

إذن حسب مبرهنة $Bezout$ نكتب : $35\wedge96=1$.

ليكن (u,v) الحل العام للمعادلة (E) .

لدينا : $\begin{cases}35u-96v=1\\ 35\times11-96\times4=1\end{cases}$

ننجز عملية الفرق بين المتساويتين فنحصل على :

$\boxed{35(u-11)=96(v-4)}$ $(\otimes)$

إذن العدد 35 يقسم الجداء $96(v-4)$.

و بما أن $35\wedge96=1$.

فإنه حسب مبرهنة $Gauss$ نستنتج أن 35 يقسم $(v-4)$.

إذن : $v=35k+4$; $(\exists k\in\mathbb{Z})$

نعوض v بقيمته في المتساوية $\otimes$ نحصل على :

$35(u-11)=96\times35k$

إذن $u=96k+11$.

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تُكتب على الشكل :

$S=\{(96k+11\ ;\ 35k+4)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

التمرين الثالث | II | 1 | أ

لدينا 2 و 3 و 5 و 7 هي الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 97

و نلاحظ أنه لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 97 عدد أولي .

ليكن $x\wedge97=d$ إذن d يقسم العدد 97 .

و بما أن 97 عدد أولي فإنه يمتلك قاسمين صحيحين طبيعيين فقط

و هما 1 و 97 . إذن $d=97$ أو $d=1$.

إذا افترضنا أن $d=97$ فسوف نحصل على $x\equiv0\,[97]$.

و منه $x^{35}\equiv0\,[97]$. و هذا يعني أن x ليس حلا للمعادلة F .

و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة للتمرين .

إذن $d=1$ و منه $x\wedge97=1$.

التمرين الثالث | II | 1 | ب

لدينا $x\wedge97=1$ و 97 عدد أولي .

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$: $x^{97-1}\equiv1\,[97]$.

أي : $x^{96}\equiv1\,[97]$.

التمرين الثالث II 1 ج

لدينا $x^{35} \equiv 2\ [97]$ لأن x حل للمعادلة (F) .

إذن : $(x^{35})^{11} \equiv 2^{11}\ [97]$. يعني : $x^{35\times 11} \equiv 2^{11}\ [97]$.

و نعلم أن : $35\times 11 - 96\times 4 = 1$. إذن : $35\times 11 = 1 + 96\times 4$.

و منه : $x^{1+96\times4} \equiv 2^{11}\ [97] \quad (1)$

من جهة أخرى لدينا : $x^{96}\equiv 1\ [97]$

إذن : $(x^{96})^4 \equiv 1^4\ [97]$ يعني : $x^{96\times4}\equiv 1\ [97]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد x نجد : $x^{1+96\times4}\equiv x\ [97] \quad (2)$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $x\equiv 2^{11}\ [97]$

التمرين الثالث II 2

عكسيا نفترض أن $x\equiv 2^{11}\ [97]$. إذن : $x^{35}\equiv 2^{11\times35}\ [97]$

يعني : $x^{35}\equiv 2^{96\times4+1}\ [97]$. أي : $x^{35}\equiv 2^{96\times4}\times 2\ [97]$ (3) .

من جهة أخرى لدينا 97 و 2 عددان أوليان .

إذن حسب $(Fmat)$ نكتب : $2^{96}\equiv 1\ [97]$

و منه : $2^{96\times4}\equiv 1[97]$. أي : $2^{96\times4}\times2\equiv 2[97]$ (4)

من المتوافقتين (3) و (4) نستنتج أن : $x^{35}\equiv 2\ [97]$

و بالتالي x حل للمعادلة (F) .

التمرين الثالث II 3

في الأسئلة السابقة تمكنا من إثبات التكافؤ التالي :

$$x^{35}\equiv 2\ [97] \iff x\equiv 2^{11}\ [97]$$

بعد ذلك نستعين بالآلة الحاسبة للحصول على : $2^{11}=2048$

ننجز القسمة الأقليدية للعدد 2048 على العدد 97 نحصل على :

$$\begin{array}{r|l} 2048 & 97 \\ \hline 194 & 21 \\ 108 & \\ 97 & \\ \boxed{11} & \end{array}$$

إذن : $2^{11}\equiv 11\ [97]$. و بالتالي : $x\equiv 11\ [97]$

أي : $x = 97k+11\ ;\ (\exists k\in\mathbb{Z})$

مجموعة حلول المعادلة (F) تُكتب على شكل :

$$\boxed{S=\{97k+11\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}}$$

التمرين الرابع I 1 أ

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - e^{-x^2} - 2x\right) = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=2x$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$

التمرين الرابع I 1 ب

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^+$.

لدينا : $f'(x) = 2+2x\, e^{-x^2} > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - e^{-x^2}\right) = +\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	-1 ↗	$+\infty$

التمرين الرابع I 1 ج

لدينا f متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0;+\infty[$.

إذن f متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,1[$.

و منه f تقابل من المجال $]0,1[$ نحو صورته $\left]-1\,;2-\frac{1}{e}\right[$.

نلاحظ أن $2-\frac{1}{e}\approx 1,6$ إذن $0\in\left]-1\,;2-\frac{1}{e}\right[$

و بالتالي فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا في المجال $]0,1[$ بالتقابل f .

أو بتعبير أجمل : $\exists!\ \alpha\in\,]0,1[\ ;\ f(\alpha)=0$

التمرين الرابع I 1 د

لدينا $f(\alpha)=0$ و $0<\alpha<1$.

إذا كان $0<x<\alpha$ فإن $f(x)<f(\alpha)$ لأن f تزايدية .

و منه $f(x)<0$ على المجال $]0,\alpha[$.

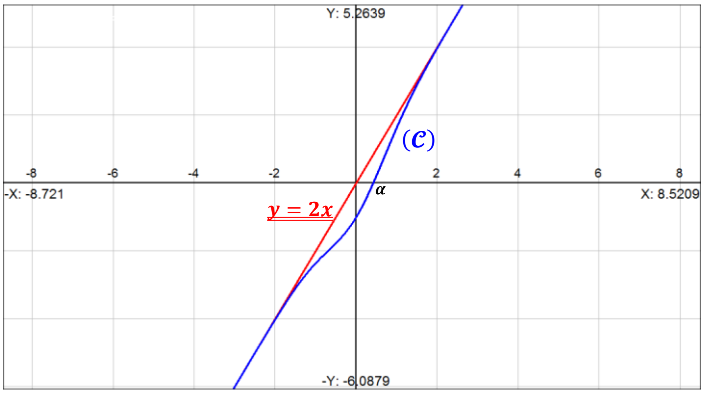
إذا كان $\alpha<x<1$ فإن $f(x)>f(\alpha)$ لأن f تزايدية على $]\alpha,1[$.

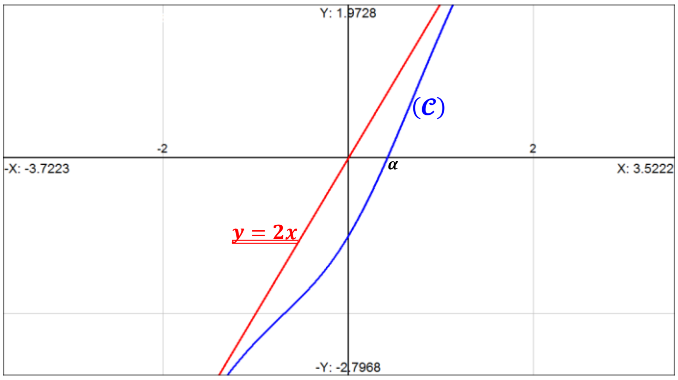
و منه $f(x)>0$ على المجال $]\alpha,1[$.

و بالتالي f موجبة قطعا على المجال $]\alpha,1[$. و f سالبة قطعا على المجال $]0,\alpha[$. و f تنعدم في α .

x	0		α		1
$f(x)$	-1	$-$	0	$+$	$2-\frac{1}{e}$

التمرين الرابع I 1 د





التمرين الرابع II 1 أ

لدينا $t\mapsto e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$. و بالخصوص على $[0,x]$.

إذن فهذه الدالة تقبل دالة أصلية h معرفة على $\mathbb{R}$ و تحقق $h'(x)=e^{-x^2}$

لدينا h دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0,x]$. إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية نكتب :

$$\exists\, c\in\,]0,x[\ ;\ \frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(c)$$

$$\iff\ \exists\, c\in\,]0,x[\ ;\ \frac{1}{x}\left(h(x)-h(0)\right)=e^{-c^2}$$

$$\iff\ \exists\, c\in\,]0,x[\ ;\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=e^{-c^2}$$

التمرين الرابع II 1 ب

لدينا $0<c<x$ إذن $-x^2<-c^2<0$.

و منه : $e^{-x^2}<e^{-c^2}<1$.

باستعمال نتيجة السؤال 1) أ) نحصل على :

$$(\forall x>0)\ ;\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt<1$$

و من أجل $x=1$ نجد : $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt<1$

التمرين الرابع II 2 أ

لدينا :

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(t)\,dt &= \int_0^\alpha \left(2t-e^{-t^2}\right)dt\\ &= 2\int_0^\alpha t\,dt-\int_0^\alpha e^{-t^2}\,dt\\ &= \frac{2\alpha^2}{2}-\int_0^\alpha e^{-t^2}\,dt\\ &= \alpha^2-\int_0^\alpha e^{-t^2}\,dt = g(\alpha)\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 2 ب

لدينا h قابلة للاشتقاق على $[0,x]$ لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق

و هما h و $x\longrightarrow x^2$. و لدينا : $g(x)=x^2-h(x)$.

إذن : $g'(x)=2x-h'(x)=2x-e^{-x^2}=f(x)$

التمرين الرابع II 2 ج

لدينا f موجبة على المجال $]\alpha,1[$.

إذن : $(\forall\, x\in\,]\alpha,1[\,)\ ;\ g'(x)=f(x)>0$

يعني أن الدالة g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]\alpha,1[$.

و منه : g تقابل من المجال $]\alpha,1[$ نحو المجال $]g(\alpha);g(1)[$.

و لدينا كذلك f سالبة قطعا على المجال $[0,\alpha]$.

إذن : $(\forall\, x\in[0,\alpha]\,)\ ;\ g'(x)=f(x)\le 0$

أي أن الدالة g تناقصية على المجال $[0,\alpha]$.

و بما أن $\alpha>0$ فإن $g(\alpha)<g(0)$. أي : $g(\alpha)<0$ (1)

من السؤال II)1)ب) نستنتج أن : $1-\int_0^1 e^{-t^2}\,dt>0$

إذن : $g(1)>0$ (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن : $g(\alpha)\cdot g(1)<0$.

أي أن : $0\in\,]g(\alpha);g(1)[$

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا β في المجال $]\alpha,1[$ بالتقابل f .

أو بتعبير أنيق نكتب : $(\exists!\ \beta\in\,]\alpha,1[\,)\ ;\ f(\beta)=0$

التمرين الرابع II 3 أ

$$\begin{aligned}0<c<x &\Rightarrow e^{-x^2}<e^{-c^2}<1\\ &\Rightarrow e^{-x^2}<\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt<1\ ;\ x>0\\ &\Rightarrow e^{-x^2}<\varphi(x)<1\ ;\ x>0\end{aligned}$$

بما أن : $\lim_{x\to0^+}\left(e^{-x^2}\right)=1$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{\left(e^{-x^2}\right)<\varphi(x)<1}$$

$x\to0^+$ $\quad$ $x\to0^+$

1 $\quad$ 1

و بالتالي حسب خاصيات النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=1=\varphi(0)$$

إذن φ دالة متصلة على اليمين في الصفر .

التمرين الرابع II 3 ب

لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \underbrace{1}_{u'(t)}\cdot\underbrace{e^{-t^2}}_{v(t)}\,dt\ ;\ x>0\\ &= \frac{1}{x}\left([uv]-\int uv'\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(\left[t\,e^{-t^2}\right]_0^x+2\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt\right)\\ &= e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 3 ج

نضع : $M(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt$ إذن : $M'(x)=x^2\,e^{-x^2}$

و لدينا : $\varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2M(x)}{x}$

إذن :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -2x\,e^{-x^2}+\frac{2x^3\,e^{-x^2}-2M(x)}{x^2}\\ &= -2x\,e^{-x^2}+2x\,e^{-x^2}-\frac{2}{x^2}M(x)\\ &= \frac{-2}{x^2}M(x)=\frac{-2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt\end{aligned}$$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ \varphi'(x)=\frac{-2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt}$$

التمرين الرابع II 3 د

انطلاقا من تعبير الدالة $\varphi'(x)$ نستنتج أن : $(\forall x>0)\,;\,\varphi'(x)<0$

إذن φ دالة تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

و بالخصوص φ دالة متصلة و تناقصية على $[0,1]$.

ليكن $x\in[0,1]$ إذن $\varphi(x)\in[\varphi(0);\varphi(1)]$

يعني : $1\ge\varphi(x)\ge\int_0^1 e^{-t^2}\,dt>0$ و منه : $\varphi(x)\in[0,1]$

و بذلك نحصل على الاستلزام التالي : $x\in[0,1]\ \Longrightarrow\ \varphi(x)\in[0,1]$

و هذا يعني أن : $\varphi(\,[0,1]\,)\subset[0,1]$

التمرين الرابع II 4 أ

$$\begin{aligned}-t^2\le0 &\Leftrightarrow e^{-t^2}\le1 \Leftrightarrow t^2e^{-t^2}\le t^2\\ &\Leftrightarrow \int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\int_0^x t^2\,dt\\ &\Leftrightarrow \int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 4 ب

$$\begin{aligned}0\le\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt\le\frac{x^3}{3}\\ &\Rightarrow 0\le\left|\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt\right|\le\left|\frac{x^3}{3}\right|\\ &\Rightarrow \left|\frac{2}{x^2}\right|\cdot\left|\int_0^x t^2e^{-t^2}\,dt\right|\le\left|\frac{2}{x^2}\right|\le\left|\frac{x^3}{3}\right|\\ &\Rightarrow |\varphi'(x)|\le\frac{2}{3}\,|x|\end{aligned}$$

و بما أن $0<x<1$ فإن $|x|<1$.

و بالتالي : $\forall\,x\in\,]0,1[\ ;\ |\varphi'(x)|\le\frac{2}{3}$

II 4 ج — التمرين الرابع

$$\varphi(x)=x \iff \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x \quad ; \quad x>0$$

$$\iff \int_0^x e^{-t^2}\,dt = x^2 \quad ; \quad x>0$$

$$\iff x^2-\int_0^x e^{-t^2}\,dt=0 \quad ; \quad x>0$$

$$\iff g(x)=0 \quad ; \quad x>0$$

II 5 أ — التمرين الرابع

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ 0\le u_n\le 1$

من أجل $n=0$ لدينا $0\le u_n\le 1$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن $0\le u_n\le 1$.

إذن : $u_n\,\epsilon\,[0,1]$. و منه : $\varphi(u_n)\,\epsilon\,[0,1]$

و ذلك لأن : $\varphi([0,1])\subset[0,1]$.

إذن : $0\le u_{n+1}=\varphi(u_n)\le 1$.

و هذا يعني أن العبارة (P_n) صحيحة .

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n)\Longrightarrow(P_{n+1})\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N}\end{cases}$

و منه حسب حسب مبدأ الترجع نستنتج أن (P_n) دائما صحيحة .

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0\le u_n\le 1$.

II 5 ب — التمرين الرابع

لدينا حسب نتائج الأسئلة السابقة .

φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن نستطيع تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية TAF على الدالة φ

في أي مجال يوجد ضمن $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا $u_n\epsilon\mathbb{R}_+^*$ و $\beta\,\epsilon\,\mathbb{R}_+^*$

نختار إذن المجال الذي طرفاه u_n و β .

إذن حسب TAF يوجد عدد حقيقي λ محصور بين u_n و β و يحقق :

$$\frac{\varphi(u_n)-\varphi(\beta)}{u_n-\beta}=\varphi'(\lambda)$$

و منه : $$\left|\frac{\varphi(u_n)-\varphi(\beta)}{u_n-\beta}\right|=|\varphi'(\lambda)|$$

يعني : $|\varphi(u_n)-\varphi(\beta)|=|\varphi'(\lambda)|\cdot|u_n-\beta|$

بما أن $g(\beta)=0$ فإنه حسب $(II$4(ج نستنتج أن : $\varphi(\beta)=\beta$

و لدينا كذلك حسب $(II$4(ب : $\forall x\epsilon]0,1[\ ;\ |\varphi'(x)|\le\frac{2}{3}$

إذن : $|\varphi'(\lambda)|\le\frac{2}{3}$ لأن $\beta\,\epsilon\,]0,1[$

إذن : $|u_{n+1}-\beta|\le\frac{2}{3}|u_n-\beta|\le\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$

أي : $|u_{n+1}-\beta|\le\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n)\Longrightarrow(P_{n+1})\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N}\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\beta|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

II 5 ج — التمرين الرابع

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\beta|\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -\left(\frac{2}{3}\right)^n\le(u_n-\beta)\le\left(\frac{2}{3}\right)^n$

و بما أن $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب و أصغر من 1 .

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ -\left(\frac{2}{3}\right)^n\le(u_n-\beta)\le\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}(u_n-\beta)=0$

أي : $\lim\limits_{n\infty}u_n=\beta$

و بالتالي $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى β .

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2008

التمرين الأول 1

$$
\begin{aligned}
r(M) = M_1 \iff\ & z_1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\
\iff\ & z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}\cdot z+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i-\frac{1}{2}i\right)\\
\iff\ & z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}\cdot z+i-\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\
\iff\ & z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}\cdot z+e^{\frac{i\pi}{2}}\\
\iff\ & z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}\cdot z+e^{\frac{i\pi}{2}}-e^{\frac{5\pi i}{6}}\\
\iff\ & z_1 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\cdot z-e^{\frac{5\pi i}{6}}\right)+e^{\frac{i\pi}{2}}\\
\iff\ & z_1 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\cdot z-e^{\frac{i\pi}{2}}\cdot e^{\frac{5\pi i}{6}}\right)+e^{\frac{i\pi}{2}}\\
\iff\ & \left(z_1-e^{\frac{i\pi}{2}}\right)=e^{\frac{i\pi}{3}}\left(z-e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\\
\iff\ & (z_1-i)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z-i)\\
\iff\ & \overrightarrow{VM_1}=e^{\frac{i\pi}{3}}\cdot\overrightarrow{VM}
\end{aligned}
$$

و بالتالي r دوران مركزه $V(i)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

بنفس الطريقة لدينا :

$$
\begin{aligned}
h(M) = M_1 \iff\ & z_2 = -2\,z+3i\\
\iff\ & z_2 = -2\,z+2i+i\\
\iff\ & z_2 = -2\,(z-i)+i\\
\iff\ & (z_2-i) = -2\,(z-i)\\
\iff\ & \overrightarrow{VM_2} = -2\,\overrightarrow{VM}
\end{aligned}
$$

و بالتالي h تحاكي مركزه $V(i)$ و نسبته -2 .

التمرين الأول 2 أ

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend left, "F = hor"] & M_1 \arrow[r, "h"] & M' \\
z \arrow[r] & z_1 \arrow[r] & z'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
r(M) = M_1 \iff\ & (z_1-i)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z-i)\\
\iff\ & z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}(z-i)+i \quad (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(z_1) = z' \iff\ & (z'-i) = -2(z_1-i)\\
\overset{(1)}{\iff}\ & (z'-i) = -2\,e^{\frac{i\pi}{3}}(z_1-i)\\
\iff\ & (z'-i) = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)(z_1-i)\\
\iff\ & (z'-i) = 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)(z_1-i)\\
\iff\ & (z'-i) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)(z_1-i)\\
\iff\ & (z'-i) = 2\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}(z_1-i)
\end{aligned}
$$

التمرين الأول 2 ب

لدينا :

$$
\begin{aligned}
F :\ & M \longrightarrow M'\\
& z \longrightarrow z' = 2\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}(z_1-i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(M) = M \iff\ & z\left(2\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}-1\right) = 2i\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}-i\\
\iff\ & z = 2\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}(z-i)+i\\
\iff\ & z\left(2\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}-1\right) = i\left(2\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}-1\right)\\
\iff\ & z = i\\
\iff\ & M \equiv \Omega
\end{aligned}
$$

التمرين الأول 3 أ

$$
\begin{aligned}
F(A) = B \iff\ & (z_B-i) = 2\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}(z_A-i)\\
\iff\ & b = 2\,e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}(a-i)+i\\
\iff\ & b = 2\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(a-i)+i\\
\iff\ & b = (1+i\sqrt{3})\,(i-a)+i\\
\iff\ & b = i-a-\sqrt{3}-a\sqrt{3}\,i+i\\
\iff\ & b = -(a+\sqrt{3})+i(2-a\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(B) = C \iff\ & c = 2\,e^{\frac{4i\pi}{3}}(b-i)+i\\
\iff\ & c = (1+i\sqrt{3})(i-b)+i\\
\iff\ & c = (1+i\sqrt{3})\left(i-(a+\sqrt{3})-i(2-a\sqrt{3})\right)+i\\
\iff\ & c = 2i+(a+\sqrt{3})-i(2-a\sqrt{3})-\sqrt{3}+\\
& \qquad +i\sqrt{3}(a+\sqrt{3})+\sqrt{3}(2-a\sqrt{3})\\
\iff\ & c = 2(\sqrt{3}-a)+i(2a\sqrt{3}+3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(C) = D \iff\ & z_D = 2e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}(z_c-i)+i\\
\iff\ & d = 2e^{\left(\frac{4i\pi}{3}\right)}(c-i)+i\\
\iff\ & d = (1+i\sqrt{3})(i-c)+i\\
\iff\ & d = (1+i\sqrt{3})\left(i-2(\sqrt{3}-a)-i(2a\sqrt{3}+3)\right)+i\\
\iff\ & d = 8a-7i
\end{aligned}
$$

التمرين الأول 3 ب

$$
\frac{z_\Omega-z_A}{z_D-z_A} = \frac{i-a}{d-a} = \frac{i-a}{8a-7i-a} = \frac{-1}{7}\in\mathbb{R}
$$

$$
\begin{aligned}
\iff\ & (z_\Omega-z_A) = \frac{-1}{7}(z_D-z_A)\\
\iff\ & \overrightarrow{A\Omega} = \frac{-1}{7}\overrightarrow{AD}\\
\iff\ & A\ \text{et}\ \Omega\ \text{et}\ D\ \text{sont colinéaires}
\end{aligned}
$$

التمرين الأول 3 ج

$$
\frac{4\,z_B+2\,z_C+z_D}{7} = \frac{7i}{7} = z_\Omega
$$

$$
\Longrightarrow\ \Omega = Barycentre\{\,(B,4);\ (C,2)\,;\ (D,1)\,\}
$$

التمرين الأول 3 د

نضع : $a = x + iy$

$$D \in (Axe\ réelle) \Leftrightarrow z_D \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (8a - 7i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 8x + i(8y - 7) \in \mathbb{R} \Rightarrow 8y - 7 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{8}$$

إذن مجموعة النقط $A(a)$ التي من أجلها النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي تشكل مستقيما موازيا للمحور الحقيقي و معادلته $y = \frac{7}{8}$.

التمرين الثاني 1 أ

$$\begin{aligned} 1 - 3(x * y) &= 1 - 3(x + y - 3xy) \\ &= 1 - 3x - 3y + 9xy \\ &= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x) \\ &= (1 - 3x)(1 - 3x) \end{aligned}$$

التمرين الثاني 1 ب

لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned} x, y \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} &\Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}\ et\ y \neq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow (1 - 3x) \neq 0\ \ et\ \ (1 - 3y) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 3x)(1 - 3y) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 3(x * y) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (x * y) \neq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow (x * y) \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

التجميعية : ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - 3yz) \\ &= x + (y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz) \\ &= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y - 3xy) * z \\ &= (x + y - 3xy) + z - 3z(x + y - 3xy) \\ &= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1)\ et\ (2) \Rightarrow x * (y * z) = (x * y) * z$$

$\Rightarrow$ $*$ قانون تجميعي في $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$

التبادلية :

لدينا : $x * y = x + y - 3xy = y + x - 3yx = y * x$

إذن القانون $*$ تبادلي في المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

العنصر المحايد : ليكن e العنصر المحايد لـ $*$ في المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\forall x \neq \frac{1}{3}\right)\ ;\ x * e = e * x = x \\ &\Rightarrow \left(\forall x \neq \frac{1}{3}\right)\ ;\ x + e - 3xe = x \\ &\Rightarrow \left(\forall x \neq \frac{1}{3}\right)\ ;\ e(1 - 3x) = 0 \\ &\Rightarrow e = 0\ ;\ car\ (1 - 3x) \neq 0 \\ &\Rightarrow e = 0 \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

التماثل : ليكن x' مماثل x بالنسبة لـ $*$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x * x' = x' * x = e \\ &\Leftrightarrow x + x' - 3xx' = 0 \\ &\Leftrightarrow x'(1 - 3x) = -x \\ &\Leftrightarrow x' = \left(\frac{-x}{1 - 3x}\right)\ ;\ car\ (1 - 3x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x' = \left(\frac{-x}{1 - 3x}\right) \neq \frac{1}{3}\ ;\ sinon\ \ (1 = 0) \\ &\Leftrightarrow x' = \left(\frac{-x}{1 - 3x}\right) \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

إذن كل عنصر x من $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ يقبل مماثلا $\left(\frac{-x}{1-3x}\right)$ من المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ بالنسبة للقانون $*$.

خلاصة : $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$ زمرة تبادلية .

التمرين الثاني 2 أ

لدينا :

$$\varphi : \left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right) \longrightarrow (\mathbb{R}^* ; \times)$$
$$x \longrightarrow (1 - 3x)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi(x * y) = 1 - 3(x * y) &= 1 - 3(x + y - 3xy) \\ &= 1 - 3x - 3y + 9xy \\ &= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x) \\ &= (1 - 3x)(1 - 3y) \\ &= \varphi(x) \times \varphi(y) \end{aligned}$$

إذن : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}\ ;\ \varphi(x * y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$

إذن φ تشاكل من $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*, \times)$.

لنبين الآن أن φ تقابل . ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}^*$.

المعادلة $\varphi(x) = y$ تقبل حلا وحيدا و هو $x = \left(\frac{1-y}{3}\right)$.

بما أن $y \neq 0$ فإن $\frac{1-y}{3} \neq \frac{1}{3}$.

إذن المعادلة $\varphi(x) = y$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$

و هو العدد $x = \left(\frac{1-y}{3}\right)$.

إذن φ تقابل من $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$ نحو $(\mathbb{R}^*, \times)$.

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي :

$$\varphi^{-1} : (\mathbb{R}^* ; \times) \longrightarrow \left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$$
$$y \longrightarrow \left(\frac{1 - y}{3}\right)$$

التمرين الثاني 2 ب

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \varphi'(x) = -3 < 0$.

إذن φ دالة تناقصية على $\mathbb{R}$.

و منه :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) &= \varphi^{-1}(\,]0 ; +\infty[\,) \\ &= \left]\lim_{y \to +\infty} \varphi^{-1}(y)\ ;\ \varphi^{-1}(0)\right[\\ &= \left]\lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{3}\right)\ ;\ \frac{1}{3}\right[\\ &= \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[\end{aligned}$$

التمرين الثاني 2 ج

لدينا $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$ جزء غير فارغ من المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

يعني : $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[\subset \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

ليكن x و y عنصرين من $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[$.

لدينا : $x * y' = x * \left(\dfrac{-y}{1-3y}\right) = x - \dfrac{y}{1-3y} + \dfrac{3xy}{1-3y} = \dfrac{x-y}{1-3y}$

$$x,y \in \left]-\infty\,;\tfrac{1}{3}\right[\iff x<\frac{1}{3}\ \ et\ \ y<\frac{1}{3}$$
$$\iff 3x<1\ \ et\ \ 3y<1$$
$$\iff (3x-3y)<(1-3y)\ \ et\ \ (1-3y)>0$$
$$\iff \left(\frac{3x-3y}{1-3y}\right)<1\ ;\ car\ \frac{1}{1-3y}>0$$
$$\iff \left(\frac{x-y}{1-3y}\right)<\frac{1}{3}\ ;\ car\ \frac{1}{1-3y}>0$$
$$\iff \left(\frac{x-y}{1-3y}\right)\in\left]-\infty\,;\tfrac{1}{3}\right[$$
$$\iff x*y' \in \left]-\infty\,;\tfrac{1}{3}\right[$$

و بالتالي حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن :

$\left(\left]-\infty\,;\tfrac{1}{3}\right[\,;*\right)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\tfrac{1}{3}\right\};*\right)$

التمرين الثاني 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ و n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا :
$$\varphi\left(x^{(n)}\right) = \varphi\Big(\underbrace{x*x*\cdots*x}_{n\ fois}\Big) = \underbrace{\varphi(x)\times\varphi(x)\times\cdots\times\varphi(x)}_{n\ fois} = \left(\varphi(x)\right)^n$$

التمرين الثاني 3 ب

$$\varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^n \iff 1-3x^{(n)} = (1-3x)^n \iff x^{(n)} = \frac{1-(1-3x)^n}{3}$$

التمرين الثاني 4 أ

لدينا $\top$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$.

لأن : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x+y-\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$.

القانون $\top$ تبادلي في $\mathbb{R}$ لأن تبادلي في $\mathbb{R}$.

و لدينا :
$$x\top(y\top z) = x\top\left(y+z-\frac{1}{3}\right) = x+y+z-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = \left(x+y-\frac{1}{3}\right)+z-\frac{1}{3} = (x\top y)\top z$$

إذن $\top$ قانون تجميعي في $\mathbb{R}$.

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\top$ في $\mathbb{R}$. $\Rightarrow x\top e = e\top x = x$

$$\Rightarrow x+e-\frac{1}{3} = x \Rightarrow e = \frac{1}{3}\in\mathbb{R}$$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$ و x' مماثله بالنسبة لـ $\top$:

$$\Rightarrow x\top x' = x'\top x = \frac{1}{3} \Rightarrow x+x'-\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x' = \left(\frac{2}{3}-x\right)\in\mathbb{R}$$

خلاصة : نستنتج أن $\top$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$ ، تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا و هو $\frac{1}{3}$. و كل عنصر x يقبل $\left(\frac{2}{3}-x\right)$ كمماثل في $\mathbb{R}$.

إذن $(\mathbb{R};\top)$ زمرة تبادلية .

التمرين الثاني 4 ب

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{R}$.

لدينا : $x*(y\top z) = x*\left(y+z-\frac{1}{3}\right) = 2x+y+z-3(xy+xz)-\frac{1}{3}$

و لدينا : $(x*y)\top(x*z) = (x+y-3xy)\top(x+z-3xz) = 2x+y+z-3(xy+xz)-\frac{1}{3}$

نستنتج إذن أن : $x*(y\top z) = (x*y)\top(x*z)$.

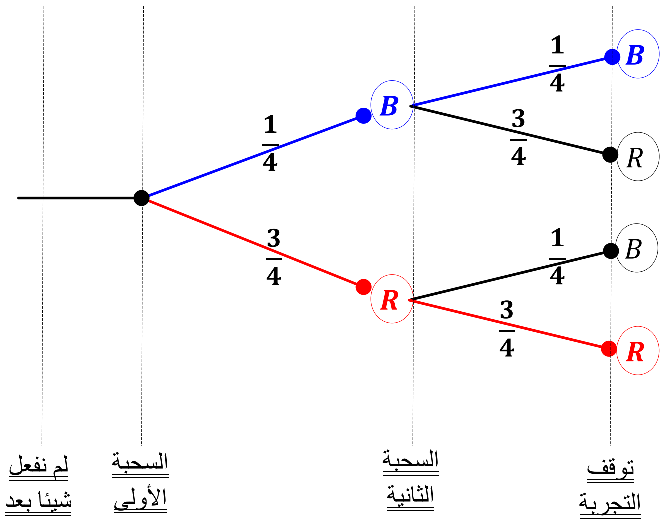
إذن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\top$ (1) .

و لدينا $(\mathbb{R};\top)$ و $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ زمرتان تبادليتان .

إذن من (1) و (2) نستنتج أن $(\mathbb{R},\top,*)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث 1

للإجابة على السؤال نستعين بالشجرة التالية :



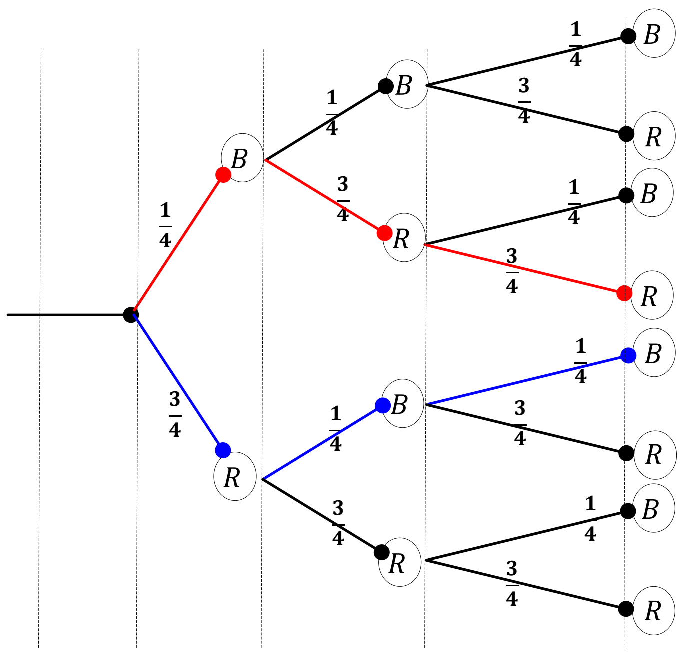
الحدث $[X=2]$ هو توقف التجربة في السحبة رقم 2 .

أو بتعبير آخر : الحصول على كرتين من نفس اللون .

إذن : $p[X=2] = \left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8}$.

$p[X=3]$ هو احتمال توقف التجربة في السحبة رقم 3 .

و من أجل ذلك نستعمل نموذج الشجرة التالية .



إذن : $p[X=3]=\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{3}{16}}$

التمرين الثالث | 2 | أ

$p[X=2k]$ هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k-1)$ و $2k$ و هنا نفصل بين حالتين و ذلك حسب لون الكرتين

الحالة الأولى : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{BR}_{1}\ \underbrace{BR}_{2}\ \cdots\cdots\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{\boldsymbol{BB}}_{k}}^{2k\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة بيضاء و $(k-1)$ كرة حمراء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$

الحالة الثانية : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{RB}_{1}\ \underbrace{RB}_{2}\ \cdots\cdots\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{\boldsymbol{RR}}_{k}}^{2k\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة حمراء و $(k-1)$ كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $(2k-1)$ و $(2k)$ هو :

$$\begin{aligned} p[X=2k] &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}\times\left(\frac{5}{8}\right) \end{aligned}$$

التمرين الثالث | 2 | ب

بنفس الطريقة نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين بيضاوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{RB}_{1}\ \underbrace{RB}_{2}\ \cdots\cdots\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{RB}_{.}\ \underbrace{R\boldsymbol{B}}_{k}\ \boldsymbol{B}}^{2k+1\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على k كرة حمراء و $(k+1)$ كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}}$

الحالة الثانية : توقفت التجربة إثر الحصول على كرتين حمراوين و هذا ما يجسده التسلسل التالي :

$$\overbrace{\underbrace{BR}_{1}\ \underbrace{BR}_{2}\ \cdots\cdots\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{BR}_{.}\ \underbrace{B\boldsymbol{R}}_{k}\ \boldsymbol{R}}^{2k+1\ \text{كرة}}$$

و هذا يعني : أننا نحصل على $(k+1)$ كرة حمراء و k كرة بيضاء.

إذن احتمال هذه الحالة هو : $\boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1}}$

و بالتالي احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $2k$ و $(2k+1)$ هو :

$$\begin{aligned} p[X=2k+1] &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}+\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\frac{3}{16}\right)^{k} \end{aligned}$$

التمرين الرابع | I | 1

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0} f(x) &= \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right) = \lim_{\substack{u\to1\\u=1+2x}}\left(\frac{2\ln u}{u-1}\right) \\ &= 2\lim_{u\to1}\left(\frac{\ln u-\ln 1}{u-1}\right) \\ &= 2(\ln u)'_{/u=1} = 2\left(\frac{1}{1}\right) = 2 = f(0) \end{aligned}$$

لقد استعملت القاعدة التالية : $\lim_{u\to1}\left(\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}\right)=\frac{1}{x_0}\ ;\ (\forall x_0>0)$

إذن f دالة متصلة في الصفر .

التمرين الرابع | I | 2 | أ

لدينا : $h_a(a)=(\ln(1+2a))a^2-(\ln(1+2a)-2a)a^2$

و لدينا : $h_a(0)=-(\ln 1)a^2=0$.

و بما أن h_a متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0,a]$ و $h_a(0)=h_a(a)$.

فإنه حسب $Rolle$ يوجد عنصر b من $]0,a[$ بحيث $h'_a(b)=0$.

$$\Leftrightarrow\ 2(\ln(1+2a)-2a)b=a^2\left(-2+\frac{2}{1+2b}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

التمرين الرابع I 2 ب

لدينا :
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}\right) = \lim_{\substack{a\to 0\\ a=x}}\left(\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}\right)$$

نعلم حسب السؤال أ) وجود عدد b مرتبط بـ a حيث $a<b<0$

و $\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

لاحظ أنه إذا كان a يؤول إلى الصفر فإن b يؤول كذلك إلى الصفر و ذلك بسبب التأطير التالي $a<b<0$

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a=x}}\left(\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}\right) = \lim_{b\to 0}\left(\frac{-2}{1+2b}\right) = -2 \in \mathbb{R}$$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0)=-2$.

التمرين الرابع I 3 أ

لدينا f دالة قابلة للإشتقاق على $I\setminus\{0\}$ لأنها مجموع دوال اعتيادية قابلة للاشتقاق على المجموعة $I\setminus\{0\}$.

و لدينا :
$$f'(x) = \left(\frac{\frac{2x}{1+2x}-\ln(1+2x)}{x^2}\right) = \left(\frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$

إذن : $\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}}$

التمرين الرابع I 3 ب

لدينا g دالة معرفة و متصلة و قابلة للاشتقاق على I .

و لدينا كذلك: $g'(x) = 2-\left(2\ln(1+2x)+\frac{2(1+2x)}{(1+2x)}\right) = -2\ln(1+2x)$

إذا كان $x=0$ فإن $g'(x)=0$.

إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)<0$.

إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)>0$.

لدينا :
$$\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} g(x) = \lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} 2x-(1+2x)\ln(1+2x) = -1-\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+}(1+2x)\ln(1+2x) = -1-\lim_{\substack{u\to 0^+\\ u=1+2x}}(u\ln u) = -1-0=-1$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x-(1+2x)\ln(1+2x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2-\left(\frac{1}{x}+2\right)\ln(1+2x)\right) = (+\infty)(2-2(+\infty)) = -\infty$$

نستنتج جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g	‖ -1	↗	0	↘	$-\infty$

و نلاحظ حسب هذا الجدول أن g متصلة على I و تقبل 0 كقيمة قصوية .

لأن $g'(x)$ تنعدم في 0 و تتغير إشارتها بجوار 0 .

إذن : $(\forall x\in I)\ ;\ g(x)\le 0$.

و بالتالي : $\forall\, x\in I\setminus\{0\}\ ;\ g(x)<0$

التمرين الرابع I 3 ج

لدينا : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي $g(x)$ و $(1+2x)$

و هذا ما يُلخصة الجدول التالي :

x	$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$(1+2x)$	0	$+$	1	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
f	‖ $+\infty$	↘	2	↘	0

التمرين الرابع I 4 أ

$$\lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{\substack{u\to 0^+\\ u=2x+1}}\left(\frac{2\ln u}{u-1}\right) = +\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=\frac{-1}{2}$ مقارب عمودي للمنحنى $(\mathcal{C})$.

لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{u\to+\infty\\ u=2x+1}}\left(\frac{2\ln u}{u-1}\right) = 2\lim_{u\to+\infty}\left(\frac{\ln u}{u}\right)\left(\frac{u}{u-1}\right) = 0$$

إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع I 4 ب

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $\left]\frac{-1}{2}\,;+\infty\right[$.

إذن f متصلة و تناقصية قطعا على $[1,2]$ لأن $[1;2]\subset\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$

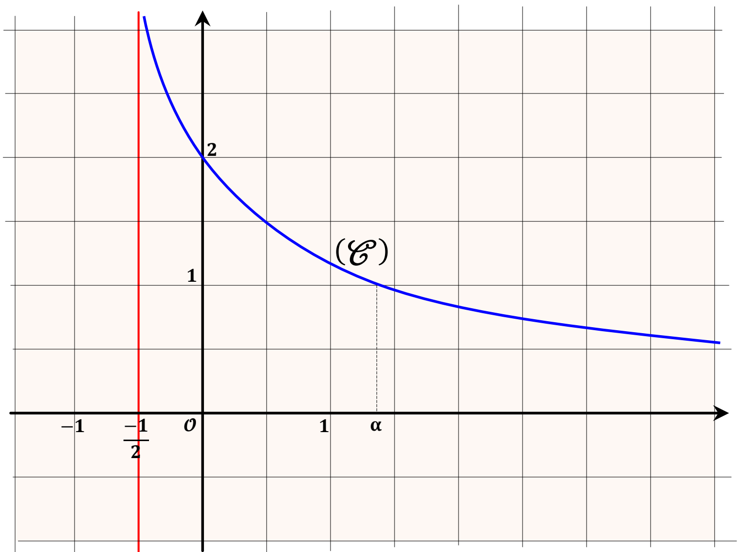
و منه f تقابل من المجال $[1;2]$ نحو صورته $[f(2)\,;(1)]$.

يعني أن f تقابل من المجال $[1;2]$ نحو المجال $[0{,}8\,;1{,}1]$.

و بما أن العدد 1 ينتمي إلى المجال $[0{,}8\,;1{,}1]$ فإنه يمتلك سابقا واحدا بالتقابل من المجال $[1\,;2]$.

أو بتعبير رياضياتي جميل : $\exists!\ \alpha\in[1\,;2]\ ;\ f(\alpha)=1$

التمرين الرابع I 4 ج



التمرين الرابع — II 1 أ

الدالة φ عبارة عن مُركّب دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال I .

و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$

$$x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; 6 \leq 2+4x \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{1+2x} \leq \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\varphi'(x) \leq \frac{2}{3}} \quad (1)$$

$$x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1 > \frac{-1}{2} \;\Leftrightarrow\; 1+2x > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{1+2x} > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\varphi'(x) > 0} \quad (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \;\Leftrightarrow\; (\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

التمرين الرابع — II 1 ب

ننطلق من نتيجة السؤال $I(4$ب) :

$$f(\alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1 \;\Leftrightarrow\; \ln(1+2\alpha) = \alpha \;\Leftrightarrow\; \varphi(\alpha) = \alpha$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0 \;\Rightarrow\; \varphi\ est\ strictement\ \nearrow\ sur\ I$$

$$\Rightarrow \varphi([1;\alpha]) = [\varphi(1)\,;\,\varphi(\alpha)] = [\ln 3\ ;\ \alpha]$$
$$\Rightarrow \varphi([1;\alpha]) \subset [1;\alpha]$$
$$\Rightarrow \varphi(J) \subset J$$

التمرين الرابع — II 2 أ

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) :\ u_n \in J$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 \in [1;\alpha] = J$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن العبارة (P_n) صحيحة .

إذن :

$$\begin{aligned}(P_n)\ est\ vraie &\Rightarrow u_n \in J\\ &\Rightarrow \varphi(u_n) \in \varphi(J) \subset J\\ &\Rightarrow \varphi(u_n) \in J\\ &\Rightarrow \ln(1+2u_n) \in J\\ &\Rightarrow u_{n+1} \in J\\ &\Rightarrow (P_{n+1})\ est\ vraie\end{aligned}$$

لقد حصلنا على الوضعية التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N})\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع في $\mathbb{N}$ نستنتج أن : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \in J$

التمرين الرابع — II 2 ب

لدينا الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I . نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة φ في أي مجال يوجد ضمن I . نختار إذن المجال الذي طرفاه u_n و α . و الذي سوف نرمز له بالرمز $\overleftrightarrow{[\alpha,u_n]}$ و ذلك لأننا نجهل من الأكبر من بين α و u_n .

$\begin{cases}\varphi \text{ متصلة على } \overleftrightarrow{[\alpha;u_n]}\\ \varphi \text{ قابلة للاشتقاق } \overleftrightarrow{]\alpha\,;\,u_n[}\end{cases}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \exists\, c \in \overleftrightarrow{]\alpha;u_n[}\ ;\ \frac{\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)}{u_n-\alpha} = \varphi'(c)\\ &\Rightarrow \left|\frac{\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| = |\varphi'(c)|\\ &\Rightarrow |\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)| = |\varphi'(c)|\cdot|u_n-\alpha|\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\alpha > 1\\ u_n \geq 1\\ c \in \overleftrightarrow{]\alpha;u_n[}\end{cases} \begin{aligned}&\Rightarrow c \geq 1\\ &\Rightarrow 0 < \varphi'(c) \leq \frac{2}{3}\ ;\ d'après\ \text{أ})1)II)\\ &\Rightarrow \frac{-2}{3} < 0 < \varphi'(c) \leq \frac{2}{3}\\ &\Rightarrow \frac{-2}{3} < \varphi'(c) \leq \frac{2}{3}\\ &\Rightarrow |\varphi'(c)| \leq \frac{2}{3}\\ &\Rightarrow |\varphi'(c)|\cdot|u_n-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|\\ &\Rightarrow |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|\ \ ;\ pour\ n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |u_n-\alpha| &\leq \frac{2}{3}|u_{n-1}-\alpha|\ \ ;\ pour\ (n-1)\\ &\leq \frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-2}-\alpha|\\ &\leq \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3}|u_{n-3}-\alpha|\\ &\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\ &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0-\alpha|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0-\alpha| \quad (3)$$

نعتبر العبارة (P_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي : $(P_n) :\ |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

من أجل $n = 0$ لدينا $|u_0-\alpha| = |1-\alpha| \leq 1$.

و ذلك لأن $1 \leq \alpha \leq 2$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (P_n) عبارة صحيحة .

$$\begin{aligned}(P_n)\ est\ vraie &\Rightarrow |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n\\ &\Rightarrow \frac{2}{3}\,|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n\\ &\Rightarrow \frac{2}{3}\,|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\\ &\Rightarrow |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}\,|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\\ &\Rightarrow |u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\\ &\Rightarrow (P_{n+1})\ est\ vraie\end{aligned}$$

و بذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ (\forall n \in \mathbb{N})\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

التمرين الرابع II 2 ج

لدينا $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1 .

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية : $|u_n - \alpha| = \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{n\infty \to 0}$

أو بتعبير آخر نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{-\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{n\infty \to 0} \leq (u_n - \alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{n\infty \to 0}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}(u_n - \alpha) = 0$

يعني : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \alpha}$

التمرين الرابع III 1 أ

لدينا f دالة متصلة على المجال I و $(\forall x\epsilon I)\ ;\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال I .

إذن F قابلة للاشتقاق على المجال I و مشتقتها هي الدالة I .

يعني : $(\forall x\epsilon I)\ ;\ F'(x) = f(x)$.

التمرين الرابع III 1 ب

$$x\,\epsilon\, I \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow F'(x) = f(x) > 0$$
$$\Rightarrow F \text{ est strictement } \nearrow \text{ sur } I$$

التمرين الرابع III 2 أ

$$x\,\epsilon\, I \;\Big|\; \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow 2t+1 > t \Rightarrow \frac{1}{t} > \frac{1}{2t+1}$$
$$\Rightarrow \frac{\ln(2t+1)}{t} > \frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\ ;\ \ln(2t+1) > 0$$
$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{t}\right) dt > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$
$$\Rightarrow \int_1^x f(t)\,dt > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$
$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt$$
$$\Rightarrow \boxed{F(x) - \int_0^1 f(t)\,dt > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt} \quad (*)$$

$$t\,\epsilon\,[0;1] \;\Big|\; \Rightarrow f(t) > 0 \Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt > 0$$
$$\Rightarrow -\int_0^1 f(t)\,dt < 0$$
$$\Rightarrow F(x) - \int_0^1 f(t)\,dt < F(x) \quad (**)$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow \boxed{F(x) > \int_1^x \left(\frac{\ln(2t+1)}{2t+1}\right) dt}$$

التمرين الرابع III 2 ب

$$[(\ln(1+2t))^2]' = \frac{4\ln(1+2t)}{(1+2t)}$$
$$\Rightarrow \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} = \frac{1}{4}((\ln(1+2t))^2)'$$
$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\right) dt = \frac{1}{4}\int_1^x ((\ln(1+2t))^2)'\,dt$$
$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\right) dt = \frac{1}{4}[(\ln(1+2t))^2]_1^x$$
$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\right) dt = \frac{1}{4}((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)$$
$$\Rightarrow F(x) > \int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\right) dt = \underbrace{\frac{1}{4}((\ln(1+2x))^2 - (\ln 3)^2)}_{x \to +\infty \ \to\ \boxed{+\infty}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$$

التمرين الرابع III 3 أ

ليكن $x\,\epsilon\, I$. لدينا $\tilde{F}$ دالة متصلة على المجال $\left[\frac{-1}{2}\,;x\right]$.

و لدينا $\tilde{F}$ قابلة للاشتقاق على المجال $\left]\frac{-1}{2}\,;x\right[$.

و ذلك انطلاقا من دراسة الدالة F .

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية .

$$\Rightarrow \exists\, c\,\epsilon \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \tilde{F}'(c)$$
$$\Rightarrow \exists\, c\,\epsilon \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ \frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}} = f(c)$$
$$\Rightarrow \exists\, c\,\epsilon \left]\frac{-1}{2}\,;x\right[\ ;\ (F(x) - l) = f(c)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

من جهة أخرى : $c\,\epsilon \left]\frac{-1}{2}; x\right[\;\Big|\; \Rightarrow x > c$

$$\Rightarrow f(x) > f(c)\ ;\ car\ f\ est\ \searrow$$
$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x) > \left(x + \frac{1}{2}\right) f(c) = (F(x) - l)$$
$$\Rightarrow (F(x) - l) > \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x) \quad (\star)$$

$$(\star) \;\Big|\; \Rightarrow \left(\frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}}\right) \geq f(x)\ ;\ car\ x > \frac{-1}{2}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}}\right) \geq \underbrace{f(x)}_{x \to \left(\frac{-1}{2}\right)^+ \ \to\ +\infty}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} \left(\frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}}\right) = +\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{-1}{2}\right)^+} \left(\frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right)}{x - \left(\frac{-1}{2}\right)}\right) = +\infty \notin \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \tilde{F}\ n'est\ pas\ dérivable\ à\ droite\ de\ \frac{-1}{2}$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2009

التمرين الأول 1 أ

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ مصفوفتين من المجموعة F .

$$\begin{aligned} M(x,y)\times M(a,b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb+\frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa} \end{pmatrix} \\ &= M\left(xa\,;xb+\frac{y}{a}\right) \in F \end{aligned}$$

إذن : $\forall\, M(a,b), M(x,y) \in F \;\; ; \;\; M(x,y)\times M(a,b) \in F$

التمرين الأول 1 ب

لدينا F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

إذن $\times$ قانون تركيب داخلي في F .

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ ثلاثة عناصر من F .

$$\begin{aligned} \big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f) &= M\left(ac\,;ad+\frac{b}{c}\right)\times M(e,f) \\ &= M\left(eac\,;acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big) &= M(a,b)\times M\left(ce\,;cf+\frac{d}{e}\right) \\ &= M\left(eac\,;acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right) \end{aligned}$$

إذن : $\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f) = M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big)$

يعني أن $\times$ قانون تجميعي في F .

ليكن $M(e_1,e_2)$ العنصر المحايد للضرب في F .

$$\Leftrightarrow \forall\, M(a,b)\in F \;;\; M(a,b)\times M(e_1,e_2) = M(e_1,e_2)\times M(a,b) = M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \quad M\left(ae_1\,;ae_2+\frac{b}{e_1}\right) = M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ae_1 = a \\ ae_2 + \dfrac{b}{e_1} = b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} e_1 = 1 \in \mathbb{R}^* \\ e_2 = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

إذن المصفوفة $I = M(1,0)$ هي العنصر المحايد لـ $\times$ في F .

لتكن $M(x,y)$ مصفوفة من F و $M(x',y')$ مماثلتها بالنسبة لـ $\times$ في F .

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow M(x,y)\times M(x',y') = M(x',y')\times M(x,y) = I \\ &\Leftrightarrow M\left(xx'\,;\,xy'+\frac{y}{x'}\right) = M(1,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \\ y' = -y \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

إذن كل مصفوفة $M(x,y)$ تمتلك مصفوفة مماثلة $M\left(\frac{1}{x},-y\right)$ بالنسبة لـ $\times$ في F . القانون $\times$ ليس تبادليا في F .

لأن :
$$\begin{cases} M(x,y)\times M(y,x) = M(xy\,;\,x^2+1) \\ M(y,x)\times M(x,y) = M(xy\,;\,y^2+1) \end{cases}$$

من أجل $x\neq 1$ و $y\neq -1$ نلاحظ أن :

$$M(x,y)\times M(y,x) \neq M(y,x)\times M(x,y)$$

الخلاصة : $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية .

التمرين الأول 2

لدينا G جزء غير فارغ من F لأنه يضم على الأقل العنصر $(1,0)$.

لتكن $M(a,0)$ و $M(b,0)$ مصفوفتين من G .

لدينا :
$$\begin{aligned} M(b,0)\times\big(M(a,0)\big)^{-1} &= M(b,0)\times M\left(\frac{1}{a},0\right) \\ &= M\left(\frac{b}{a};0\right) \in G \quad car \quad \frac{b}{a}\neq 0 \end{aligned}$$

و بالتالي حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن $(G,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$.

التمرين الأول 3 أ

$$\begin{cases} (1;1)\perp(2;3) = \left(2\,;3+\dfrac{1}{2}\right) = \left(2\,;\,\dfrac{7}{2}\right) \\ (2;3)\perp(1;1) = \left(2\,;2+\dfrac{3}{1}\right) = (2\,;\,5) \end{cases}$$

التمرين الأول 3 ب

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من F . لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi\big(M(c,d)\times M(a,b)\big) &= \varphi\left(M\left(ac\,;bc+\frac{d}{a}\right)\right) \\ &= \left(ac\,;bc+\frac{d}{a}\right) \\ &= (c,d)\perp(a,b) \\ &= \varphi\big(M(c,d)\big)\perp\varphi\big(M(a,b)\big) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(F,\times)$ نحو $(E,\perp)$.

ليكن (a,b) عنصرا من المجموعة E .

نريد حل المعادلة ذات المجهول $M(x,y)$ التالية : $\varphi\big(M(x,y)\big) = (a,b)$

هذه المعادلة تصبح : $(x,y) = (a,b)$

يعني أن $x = a$ و $y = b$.

إذن فالمعادلة تقبل حلا وحيدا و هو $M(a,b)$.

و منه : $\forall\,(a,b)\in E \;\;;\;\; \exists!\, M(x,y)\in F \;\;;\;\; \varphi\big(M(x,y)\big) = (a,b)$

يعني أن φ تقابل من $(F,\times)$ نحو $(E,\perp)$.

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(F,\times)$ نحو $(E,\perp)$.

و يمكننا أن نكتب $(F,\times) = (E,\perp)$.

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الانطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

بما أن $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $M(1,0)$

و كل مصفوفة $M(x,y)$ تقبل مماثلة $M\left(\frac{1}{x};-y\right)$ بالنسبة لـ $\times$ في F .

فإن $(E,\perp)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج $\varphi\big(M(1,0)\big)$

و كل زوج (x,y) يقبل مماثلا $\varphi\left(M\left(\frac{1}{x};-y\right)\right)$ بالنسبة لـ $\perp$ في E .

و لدينا :
$$\begin{cases} \varphi\big(M(1,0)\big) = (1,0) \\ \varphi\left(M\left(\frac{1}{x};-y\right)\right) = \left(\frac{1}{x};-y\right) \end{cases}$$

التمرين الثاني I 1 أ

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-i)^2(m+1)^2 + 4i(m^2+1) \\ &= -2i(m^2+2m+1) + 4i\,m^2 + 4i \\ &= 2i\,m^2 - 4i\,m + 2i \\ &= 2i(m^2-2m+1) \\ &= (1+i)^2(m-1)^2 \\ &= \big((1+i)(m-1)\big)^2 \end{aligned}$$

التمرين الثاني I 1 ب

$$z_1 = (1 - im) \quad \text{و} \quad z_2 = (m - i)$$

التمرين الثاني I 1 ج

نضع : $m = r\,e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 = 1 &\Leftrightarrow (1 - im)(m - i) = 1 \\
&\Leftrightarrow m - i - m^2 i - m = 1 \\
&\Leftrightarrow m^2 = -1 + i \\
&\Leftrightarrow r^2\,e^{2i\theta} = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\
&\Leftrightarrow r^2\,e^{2i\theta} = \sqrt{2}\,e^{\frac{3i\pi}{4}} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \ ; \ k \in \{0;1\} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{8} \quad \text{أو} \quad \theta = \dfrac{11\pi}{8} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{3i\pi}{8}} \\ m_1 = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{11i\pi}{8}} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{2}+4}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}\right) \\ m_2 = \sqrt[4]{2}\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{2}+4}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

التمرين الثاني I 2

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى : تستدعي استعمال القاعدة المهمة التالية :

$$\boxed{e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\,e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$$

لدينا : $m = e^{i\theta}$ و $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ و $-1 = e^{-i\pi}$

إذن :

$$\begin{aligned}
z_1 = 1 - im &= e^{i0} + \left(e^{-i\pi}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\left(e^{i\theta}\right) \\
&= e^{i0} + e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= 2\cos\left(\frac{0 - \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) e^{i\left(\frac{0 + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)} \\
&= 2\cos\left(-\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= 2\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

و كذلك :

$$\begin{aligned}
z_2 = m - i &= e^{i\theta} + \left(e^{-i\pi}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

الطريقة الثانية : الإجابة دون استعمال تلك الطريقة .

في هذا السؤال يجب ضبط جميع قواعد الصيغ المثلثية .

نضع : $z_1 = re^{i\varphi}$

لدينا :

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 - im \\
&= 1 - ie^{i\theta} \\
&= 1 - i(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (1 + \sin\theta) - i\cos\theta
\end{aligned}$$

إذن هدفنا هو ايجاد المجهولين r و φ بدلالة θ بحيث :

$$(1 + \sin\theta) - i\cos\theta = r\cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r\cos\varphi = 1 + \sin\theta \\ r\sin\varphi = -\cos\theta \end{cases}$$

لدينا : $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$

إذن : $(1 + \sin\theta)^2 + \cos^2\theta = r^2$

و منه :

$$\begin{aligned}
r^2 &= 2(1 + \sin\theta) = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\theta\right) \\
&= 2\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right) \\
&= 4\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \\
&= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{r = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة نحصل على :

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= \frac{-\cos\theta}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos(\pi - \theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2} + \theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}}{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}} \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) [k\pi]}$

و بالتالي : $\boxed{z_1 = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}}$

بنفس الطريقة نضع : $z_2 = re^{i\varphi}$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} - i = \cos\theta + i(\sin\theta - 1)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بدلالة θ بحيث :

$$r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = \cos\theta + i(\sin\theta - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = r\cos\varphi \\ \sin\theta - 1 = r\sin\varphi \end{cases}$$

لدينا : $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$

إذن : $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta - 1)^2 = r^2$

و منه : $r^2 = 2(1-\sin\theta)$

أي : $r^2 = 2(1+\sin(-\theta))$

نعلم حسب الجزء الأول من هذا السؤال أن :

$$2(1+\sin\theta) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

إذن : $2(1+\sin(-\theta)) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

يعني : $r^2 = 4\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

و منه : $\boxed{r = 2\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$

ملاحظة : لقد تم اختيار القيمة الموجبة لـ r لأن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا موجبا.

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظمة نحصل على :

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-\cos(\pi-\theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-\sin\left(\frac{-\pi}{2}+\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-2\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

إذن : $\boxed{\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)[k\pi]}$

و بالتالي : $\boxed{z_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$

التمرين الثاني II 1

$M \in (M_1M_2) \quad \Leftrightarrow \quad M$ و M_1 و M_2 نقط مستقيمية .

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_1-m}{z_2-m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-im-m}{m-i-m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad i+m-im \in \mathbb{R}$$

نضع : $m = x+iy$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y)+i(y-x+1) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y-x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = x-1}$$

إذن مجموعة النقط M تشكل مستقيما معادلته $y = x-1$.

التمرين الثاني II 2 أ

ننطلق من $z' = 1-iz$

نريد كتابة هذه المتساوية على شكل : $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$ بحيث ω عدد عقدي .

لدينا : $\begin{cases} e^{i\theta} = -i \\ -\omega e^{i\theta}+\omega = 1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{cases}$

و منه : $z' = e^{\frac{-\pi i}{2}}\left(z-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

التمرين الثاني II 2 ج

نضع : $m = x+iy$

$M \in (M_1M_2) \quad \Leftrightarrow \quad M$ و M_1 و M_2 نقط مستقيمية

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z_1-m}{z_2-m}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1-im-m}{m-i-m}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad (i+m-im) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad i+(x+iy)-i(x+iy) \ \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad y-x+1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = x-1$$

إذن مجموعة النقط M تُشكل مستقيما معادلته : $y = x-1$.

التمرين الثاني II 2 أ

سوف نحتاج إلى أن نكتب العدد $z' = 1-iz$

على شكل $z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$.

بحيث ω و θ عددان مجهولان وجب تحديدهما : $\begin{cases} z' = -iz+1 \\ z' = e^{i\theta}z-\omega e^{i\theta}+\omega \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad -iz+1 = e^{i\theta}z-\omega e^{i\theta}+\omega$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -i = e^{i\theta} \\ 1 = -\omega e^{i\theta}+\omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega(1+i) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta = \frac{-\pi}{2} \\ \omega = \left(\frac{1}{1+i}\right)\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{cases}$$

إذن : $z' = e^{\frac{-i\pi}{2}}\left(z-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه $\Omega\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)$. و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

التمرين الثاني II 2 ب

نضع : $m = x+iy$

$$\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right) \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right)} = -\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\overline{m}+i-1-i\overline{m}}{i} = \frac{m-i-1+im}{i}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-iy)+i-1-i(x-iy) = $$
$$= (x+iy)-i-1+i(x+iy)$$

$$\Leftrightarrow \quad -2i\,x+2i-2i\,y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x+y = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{Re}(m)+\mathfrak{Im}(m) = 1$$

التمرين الثاني II 2 ج

Ω و M و M_1 و M_2 نقط متداورة

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_2-z_\Omega}{z_1-z_\Omega}\right) [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right) \equiv \arg(-i) [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_2-z_1}{z_2-m}\right) \in i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \Re(m)+\Im(m)=1 \ d'après \ (II(2ب$$
$$\Leftrightarrow y=-x+1$$

إذن مجموعة النقط M التي من أجلها Ω و M و M_2 و M_1 متداورة تُشكّل المستقيم (Δ) الذي معادلته الديكارتية هي $(\Delta) : y=-x+1$.

التمرين الثالث 1 أ

لدينا : $a_n = 2^n+3^n+6^n-1 = (2^n-1)+3^n(1+2^n)$

و لدينا : $2\equiv 0\,[2]$ و $3\equiv 1\,[2]$.

إذن : $2^n\equiv 0\,[2]$ و $3^n\equiv 1\,[2]$; $(\forall n\geq 1)$.

و منه : $\begin{cases} 2^n-1\equiv 1\,[2] & (1) \\ 2^n+1\equiv 1\,[2] & (2)\end{cases}$ و $3^n\equiv 1[2]$ (3) .

من (3) و (2) نحصل على : $3^n(1+2^n)\equiv 1\,[2]$ (4)

و من (1) و (4) نحصل على : $(2^n-1)+3^n(1+2^n)\equiv 2\,[2]$

يعني : $(2^n-1)+3^n(1+2^n)\equiv 0\,[2]$.

و منه : $a_n\equiv 0\,[2]$.

و بالتالي : a_n عدد زوجي و ذلك كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي n .

التمرين الثالث 1 ب

لدينا : $a_n = 2^n+3^n+3^n2^n-1 = 2^n(3^n+1)+(3^n-1)$

و نعلم أن : $3\equiv 0\,[3]$. إذن : $3^n\equiv 0\,[3]$.

و منه : $(3^n-1)\equiv -1\,[3]$. وكذلك : $(3^n+1)\equiv 1\,[3]$.

و من (5) و (6) نجد : $2^n(3^n+1)+(3^n-1)\equiv(2^n-1)\,[3]$

يعني : $a_n\equiv(2^n-1)\,[3]$ (7) .

و لدينا : $2\equiv -1\,[3]$. إذن : $2^n\equiv(-1)^n\,[3]$.

و منه : $(2^n-1)\equiv(-1)^n-1\,[3]$ (8) .

من المتوافقتين (7) و (8) نستنتج أن : $a_n\equiv(-1)^n-1\,[3]$

من أجل n عدد زوجي لدينا : $(-1)^{2k}-1=0$.

أي : $(\forall\, n\, pair)$; $a_n\equiv 0\,[3]$

و من أجل n عدد فردي لدينا : $(-1)^{2k+1}-1=-2$.

أي : $(\forall\, n\, impair)$; $a_n\equiv -2\,[3]$.

إذن قيم n التي يكون من أجلها $a_n\equiv 0\,[3]$ هي جميع الأعداد الزوجية .

التمرين الثالث II 2 أ

p عدد أولي و أكبر قطعا من العدد 3 .

إذن : $p\wedge 2=1$ و $p\wedge 3=1$.

و منه حسب $Fermat$: $2^{p-1}\equiv 1\,[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1\,[p]$.

نضرب (1) و (2) طرفا بطرف فنحصل على : $3^{p-1}\cdot 2^{p-1}\equiv 1\,[p]$

إذن : $6^{p-1}\equiv 1\,[p]$

التمرين الثالث II 2 ب

لدينا : $2^{p-1}\equiv 1\,[p]$ إذن : $3\cdot 2^{p-1}\equiv 3\,[p]$ (1)

و لدينا : $3^{p-1}\equiv 1\,[p]$ إذن : $2\cdot 3^{p-1}\equiv 2\,[p]$ (2)

و لدينا : $6^{p-1}\equiv 1\,[p]$ إذن : $6\cdot 6^{p-2}\equiv 1\,[p]$ (3)

و لدينا : $-6\equiv -6\,[p]$ (4)

نجمع المتوافقات (1) و (2) و (3) و (4) طرفا بطرف نجد :

$3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6\cdot 6^{p-2}\equiv 0\,[p]$

يعني : $6\cdot 2^{p-2}+6\cdot 3^{p-2}+6\cdot 6^{p-2}-6\equiv 0\,[p]$.

يعني : $6(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1)\equiv 0\,[p]$.

يعني : $6(a_{p-2})\equiv 0\,[p]$. إذن : $p/6(a_{p-2})$ (5) .

نُفكك العدد 6 إلى جداء عوامل أولية نجد : $6=2^1\times 3^1$.

و لدينا p عدد أولي أكبر قطعا من 3 إذن : $6\wedge p=1$ (6) .

من (5) و (6) نستنتج حسب $Gauss$ أن : p/a_{p-2}

التمرين الثالث II 2 ج

ليكن q عددا أوليا . و نَفصِلُ بين ثلاث حالات للعدد q .

الحالة الأولى : إذا كان $q=2$.

فإنه حسب نتيجة السؤال 1) أ) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $2/a_n$

إذن : $(\exists n\in\mathbb{N}^*)$; $a_n\wedge q=q$

الحالة الثانية : إذا كان $q=3$.

فإنه حسب نتيجة السؤال 1) ب) : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $3/a_n$

إذن : $(\exists n\in\mathbb{N}^*)$; $a_n\wedge q=q$

الحالة الثالثة : إذا كان $q>3$.

فإنه حسب نتيجة السؤال 2) ب) : $(\forall q>3)$; q/a_{q-2}

إذن : $(\exists n\in\mathbb{N}^*)$; $a_n\wedge q=q$

خلاصة : $(\forall q\in\mathbb{P}),(\exists n\in\mathbb{N}^*)$; $a_n\wedge q=q$.

التمرين الرابع I 1 أ

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} x(1-\ln x)^n = \lim_{\substack{t\to 0^+\\ x=t^n}} t^n(1-\ln(t^n))^n = \lim_{t\to 0^+} t^n(1-n\ln(t))^n = \lim_{t\to 0^+}(t-tn\ln(t))^n = 0 = f_n(0)$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = f_n(0)}$

و هذا يعني أن الدالة f_n متصلة على يمين الصفر .

التمرين الرابع I 1 ب

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}(1-\ln x)^n = \lim_{\substack{t\to -\infty\\ t=\ln x}}(1-t)^n = \lim_{\substack{y\to +\infty\\ y=1-t}} y^n = +\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن f_n غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .

التمرين الرابع I 1 ج

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{f_2(x)}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}(1-\ln x)^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim_{x\to +\infty} x(1-\ln x)^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{f_1(x)}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}(1-\ln x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = \lim_{x\to +\infty} x(1-\ln x) = -\infty$$

التمرين الرابع | I | 2 | أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

$$f_1'(x) = (x - x\ln x)' = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x$$

$$\begin{cases} x = 1 \implies f_1'(x) = 0 \\ x > 1 \implies f_1'(x) < 0 \\ x < 1 \implies f_1'(x) > 0 \end{cases}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	0		1		e		$+\infty$
$f_1'(x)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	
f_1	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

التمرين الرابع | I | 2 | ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

$$\begin{aligned} f_2'(x) = (x(1-\ln x)^2)' &= (1-\ln x)^2 - \frac{2x}{x}(1-\ln x) \\ &= (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x) \\ &= (1-\ln x)(1-\ln x-2) \\ &= (1-\ln x)(-1-\ln x) \\ &= (\ln x - 1)(\ln x + 1) \\ &= (\ln x)^2 - 1 \end{aligned}$$

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$\ln x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘	0	↗	$+\infty$

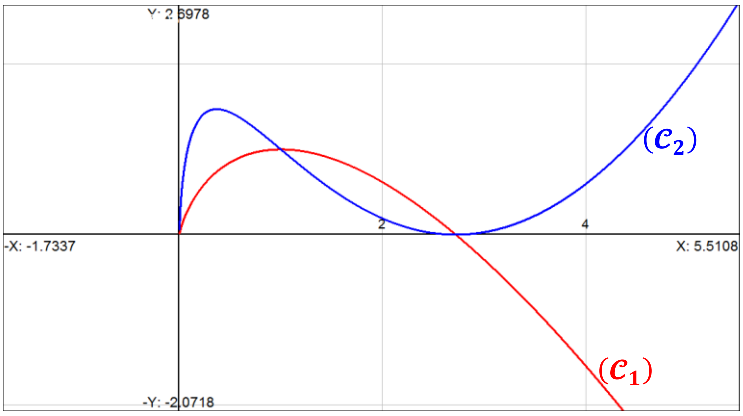
التمرين الرابع | I | 3 | أ

لدينا :

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x) &= x(1-\ln x) - x(1-\ln x)^2 \\ &= x(1-\ln x)(\ln x) \end{aligned}$$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_1(x) - f_2(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$		المنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يوجد أسفل المنحنى $(\mathcal{C}_2)$	نقطة تقاطع	المنحنى $(\mathcal{C}_2)$ يوجد أسفل المنحنى $(\mathcal{C}_1)$	نقطة تقاطع	المنحنى $(\mathcal{C}_1)$ يوجد أسفل المنحنى $(\mathcal{C}_2)$	

التمرين الرابع | I | 3 | ب



التمرين الرابع | II | 1 | أ

لدينا الدالة $x \longrightarrow \frac{f_1(x)}{1+x^2}$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز ψ و تحقق :

$$\begin{cases} \psi'(x) = \dfrac{f_1(x)}{1+x^2} \;;\; \forall x > 0 \\ F(x) = \psi(1) - \psi(e^x) \end{cases}$$

و هذا يعني أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,0[$.

و لدينا :

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\psi(1))' - (\psi(e^x))' = 0 - e^x\psi'(e^x) \\ &= \frac{-e^x\, f_1(e^x)}{1+e^{2x}} = \frac{(x-1)\,e^{2x}}{(1+e^{2x})} \end{aligned}$$

التمرين الرابع | II | 1 | ب

لدينا : $F'(x) = \dfrac{(x-1)\,e^{2x}}{(1+e^{2x})}$; $(\forall x \leq 0)$

و بما أن : $\left(\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) > 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x-1)$.

و لدينا : $x \leq 0 \implies x < 1$

و منه : $x - 1 < 0$. أي أن : $F'(x) < 0$.

و بالتالي F دالة تناقصية قطعا على المجال $]-\infty,0]$.

التمرين الرابع | II | 2 | أ

$$\begin{aligned} t \in [e^x,1] &\iff e^x \leq t \leq 1 \;;\; x > 0 \\ &\implies e^{2x} \leq t^2 \leq 1 \\ &\implies 1+e^{2x} \leq 1+t^2 \leq 2 \\ &\implies 1+e^{2x} \leq 1+t^2 \leq 2 \\ &\implies \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \\ &\implies \frac{1}{2}f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+t^2} \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}} \;;\; f_1(t) > 0 \end{aligned}$$

$$\implies \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \leq \int_{e^x}^{1}\left(\frac{f_1(t)}{1+t^2}\right)dt \leq \int_{e^x}^{1}\left(\frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}\right)dt$$

$$\implies \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt \leq F(x) \leq \left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right)\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt$$

التمرين الرابع | II | 2 | ب

$$\begin{aligned} \left(x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\right)' &= 2x\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right) + x^2\left(\frac{-1}{2x}\right) \\ &= \frac{3x}{2} - x\ln x - \frac{x}{2} \\ &= x(1-\ln x)^1 = f_1(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة $x \longrightarrow x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ دالة أصلية للدالة f_1 على $]0;+\infty[$

التمرين الرابع II 2 ج

لدينا :
$$\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt = \left[x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)\right]_{e^x}^{1} = \frac{3}{4} - e^{2x}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{x\,e^{2x}}{2}$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{2x} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{\substack{t\to-\infty\\ t=2x}} (te^{t})\right) = 0$

إذن :
$$\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{3e^{2x}}{4}+\frac{xe^{2x}}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}(0)+\frac{1}{2}(0)\right) = \frac{3}{4}$$

التمرين الرابع II 3

من خلال التأطير الوارد في جواب السؤال 2) أ) نستنتج الوضعية التالية :
$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt\right)}_{\to\,\frac{3}{8}} \le \underbrace{F(x)}_{\to\, l} \le \underbrace{\left(\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right)\int_{e^x}^{1} f_1(t)\,dt\right)}_{\to\,\frac{3}{4}}$$

إذن : $\boxed{\frac{3}{8} \le l \le \frac{3}{4}}$

التمرين الرابع III 1 أ

$$\begin{aligned}
x \in [1,e] &\iff 1\le x\le e \iff 0\le \ln x\le 1\\
&\Rightarrow (1-\ln x)\ge 0\\
&\Rightarrow x(1-\ln x)^n \ge 0\ ;\ (\forall n\ge 1)\\
&\Rightarrow \int_1^e x(1-\ln x)^n\,dx \ge 0\ ;\ (\forall n\ge1)\\
&\Rightarrow \int_1^e f_n(x)\,dx \ge 0\ ;\ (\forall n\ge 1)\\
&\Rightarrow u_n \ge 0\ ;\ (\forall n\ge 1)
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 1 ب

لدينا :
$$f_{n+1}(x)-f_n(x) = x(1-\ln x)^{n+1} - x(1-\ln x)^n = x(1-\ln x)^n(-\ln x)$$

$$\begin{aligned}
x\in[1,e] &\Rightarrow 1\le x\le e\\
&\Rightarrow (1-\ln x)\ge 0\quad et\quad (-\ln x)\le 0\\
&\Rightarrow f_{n+1}(x)-f_n(x)\le 0\\
&\Rightarrow f_{n+1}(x)\le f_n(x)
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 1 ج

$$\begin{aligned}
x\in[1,e] &\Rightarrow f_{n+1}(x)\le f_n(x)\\
&\Rightarrow \int_1^e f_{n+1}(x)\,dx \le \int_1^e f_n(x)\,dx\\
&\Rightarrow u_{n+1}\le u_n\ ;\ (\forall n\ge 0)\\
&\Rightarrow (u_n)_{n\ge0}\ \ est\ \ décroissante
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 1 د

المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مصغورة بالعدد 0 لأنه لدينا : $(\forall n\ge 1)\ ;\ u_n\ge 0$.

إذن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية و مصغورة إذن فهي متقاربة .

التمرين الرابع III 2 أ

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_1^e f_{n+1}(x)\,dx = \int_1^e \underbrace{x}_{u'(x)}\ \underbrace{(1-\ln x)^n}_{v(x)}\,dx\\
&= [uv] - \int uv'\\
&= \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \left(\frac{n+1}{2}\right)\int_1^e x^2\left(\frac{-1}{x}\right)(1-\ln x)\,dx\\
&= \frac{-1}{2}+\left(\frac{n+1}{2}\right)u_n
\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\ge1)\ ;\ u_{n+1} = \frac{-1}{2}+\left(\frac{n+1}{2}\right)u_n}$

التمرين الرابع III 2 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المطلوب حساب مساحته بالوحدة cm^2.

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f_2(x)-f_1(x)|\,dx\quad (unité)^2$$

بما أن $(\mathcal{C}_1)$ يوجد فوق $(\mathcal{C}_2)$ على المجال $[1,e]$.

فإن : $\forall\, x\in[1,e]\ ;\ |f_2(x)-f_1(x)| = f_2(x)-f_1(x)$

إذن :
$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_1^e f_2(x)dx - \int_1^e f_1(x)dx\quad (unité)^2\\
&= (u_1-u_2)\quad (unité)^2
\end{aligned}$$

و لدينا : $(\forall n\ge1)\ ;\ u_{n+1} = \frac{-1}{2}+\left(\frac{n+1}{2}\right)u_n$

و لدينا : $u_0 = \int_1^e x\,dx = \frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$

إذن : $u_1 = \frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}\right)$

و : $u_2 = \frac{-1}{2}+\frac{e^2}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \left(\frac{e^2}{4}-\frac{5}{4}\right)$

و بالتالي :
$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (u_1-u_2)\quad (unité)^2\\
&= \left(\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}-\frac{e^2}{4}+\frac{5}{4}\right)\ (2\,cm)^2\\
&= \frac{1}{2}(2\,cm)^2 = 2\,cm^2
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 3 أ

$$\begin{aligned}
u_{n+1}\ge 0 &\Rightarrow \frac{-1}{2}+\left(\frac{n+1}{2}\right)u_n\ge 0\\
&\Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n \ge \frac{1}{2}\\
&\Rightarrow \boxed{u_n \ge \left(\frac{1}{n+1}\right)}\quad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{n+1}\le u_n &\Rightarrow \frac{-1}{2}+\left(\frac{n+1}{2}\right)u_n \le u_n\\
&\Rightarrow \frac{-1}{2}+\frac{n\,u_n}{2}+\frac{u_n}{2}\le u_n\\
&\Rightarrow u_n\left(\frac{n+1-2}{2}\right)\le\frac{1}{2}\\
&\Rightarrow u_n\left(\frac{n-1}{2}\right)\le\frac{1}{2}\ ;\ n\ge 2\\
&\Rightarrow \boxed{u_n\le\left(\frac{1}{n-1}\right)}\ ;\ n\ge 2\quad (2)
\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall\, n \geq 2)\ ;\quad \left(\frac{1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \left(\frac{1}{n-1}\right) \qquad (3)$$

التمرين الرابع III 3 ب

لدينا : $\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{n\infty \searrow 0} \leq u_n \leq \underbrace{\left(\frac{1}{n-1}\right)}_{n\infty \searrow 0}$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = 0$

و لدينا :

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \left(\frac{1}{n-1}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right) \leq n\,u_n \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) \leq n\,u_n \leq \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)\\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(n\,u_n) = 1}\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 4 ب

الطريقة الأولى :

لدينا : $d_n = |v_n - u_n|\ ;\ n \geq 1$

$$\begin{aligned} &= \left|\frac{-1}{2} + \frac{n}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}u_{n-1}\right|\\ &= \frac{n}{2}|v_{n-1} - u_{n-1}|\end{aligned}$$

إذن : $d_n = |v_n - u_n| = \frac{n}{2}|v_{n-1} - u_{n-1}|$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)|v_{n-2} - u_{n-2}|\\ &= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)|v_{n-3} - u_{n-3}|\\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots\\ &= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdots\left(\frac{2}{2}\right)|v_1 - u_1|\\ &= \left(\frac{n!}{2^{n-1}}\right)d_1\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 1)\ ;\ d_n = \left(\frac{n!}{2^{n-1}}\right)d_1}$

الطريقة الثانية (la récurrence)

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ d_n = \left(\frac{n!}{2^{n-1}}\right)d_1$

من أجل $n = 1$ لدينا $d_1 = \left(\frac{1!}{2^0}\right)d_1$.

إذن العبارة (P_1) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من 1 و نفترض أن (P_n) صحيحة .

يعني : $d_n = \left(\frac{n!}{2^{n-1}}\right)d_1$

لدينا : $d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}|$

$$\begin{aligned} &= \left|\frac{-1}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right)v_n + \frac{1}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n\right|\\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)|v_n - u_n|\\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)d_n\\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n!}{2^{n-1}}\right)d_1\\ &= \left(\frac{(n+1)n!}{2\cdot 2^{n-1}}\right)d_1\\ &= \left(\frac{(n+1)!}{2^n}\right)d_1\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{d_{n+1} = \left(\frac{(n+1)!}{2^n}\right)d_1}$

و هذا يعني أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

و بذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases}(P_1)\ est\ vraie\\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ (\forall n > 1)\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع نقول : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n \geq 1)\ :\ d_n = \left(\frac{n!}{2^{n-1}}\right)d_1$

التمرين الرابع III 4 ب

نعتبر العبارة (Q_n) المعرفة بما يلي : $(Q_n)\ :\ \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

لنبين بالترجع أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ (Q_n)\ est\ vraie$

من أجل $n = 2$ لدينا : $\frac{2!}{2} \geq 3^0$ إذن العبارة (Q_2) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

و نفترض أن العبارة (Q_n) صحيحة . يعني : $\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

لدينا : $\frac{(n+1)!}{2} = (n+1)\frac{n!}{2} \geq (n+1)3^{n-2}$

$$\begin{aligned} n \geq 2 &\Rightarrow (n+1) \geq 3\\ &\Rightarrow (n+1)\,3^{n-2} \geq 3\cdot 3^{n-2}\\ &\Rightarrow (n+1)\,3^{n-2} \geq 3^{n-1}\\ &\Rightarrow \frac{(n+1)!}{2} \geq 3^{(n+1)-2}\\ &\Rightarrow (Q_{n+1})\ est\ vraie\end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases}(Q_2)\ est\ vraie\\ (Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1})\ ;\ (\forall n \geq 2)\end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع نقول : $(Q_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

III 4 ج التمرين الرابع

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

$$\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2} \iff n! \geq 3^{n-2} \cdot 2$$
$$\iff n! \geq \frac{3^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}}$$
$$\iff \frac{n!}{2^{n-1}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$
$$\iff d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1$$

و بما أن $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ متتالية هندسية أساسها هو العدد $\frac{3}{2}$ و هو عدد موجب و أكبر من 1 . إذن : $\lim_{n\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty$

و بذلك نحصل على الوضعية التالية : $d_n \geq \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1}_{n\infty \to +\infty}$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim_{n\infty}(d_n) = +\infty}$

أي أن المتتالية $(d_n)_{n\geq 2}$ متباعدة .

III 4 د التمرين الرابع

بالخلف نفترض أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة .

لدينا : $d_n = |v_n - u_n|$

بما أن $(u_n)_{n>2}$ متتالية متقاربة و $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة كذلك .

فإن $(d_n)_{n\geq 2}$ متتالية متقاربة كذلك لأن فرق متتاليتين متقاربتين هو متتالية متقاربة .

و هذا يتناقض مع كون $\lim(d_n) = +\infty$ متتالية متباعدة حسب 4) ج) .

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2009

التمرين الأول 1

لدينا V جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنه يضم على الأقل المصفوفة المنعدمة $\mathcal{O} = M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من V . و ليكن u و v عددين حقيقيين .

لدينا :
$$\begin{aligned} u\,M(a,b) + v\,M(c,d) &= \begin{pmatrix} ua & ub \\ 4ub & ua \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vc & vd \\ 4vd & vc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua+vc & ub+vd \\ 4(ub+vd) & ua+vc \end{pmatrix} \\ &= M(ua+vc\,;ub+vd) \in V \end{aligned}$$

إذن V فضاء جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. و لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من V

لدينا :
$$\begin{aligned} M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= aI + bJ \end{aligned}$$

إذن : $(\forall\, M(a,b) \in V), (\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2) : M(a,b) = aI + bJ$

و هذا يعني أن (I,J) أسرة مولدة للفضاء المتجهي V (1) .

لتكن $(xI + yJ)$ تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و J .

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\ xI + yJ = \mathcal{O} \\ &\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} x & y \\ 4y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن (I,J) أسرة حرة (أو مستقلة خطيا) (2) .

من (1) و (2) نستنتج أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي V .

و بما أن عدد عناصر هذه الأسرة هو 2 فإن $dim(V) = 2$

التمرين الأول 2 أ

في البداية لدينا :
$$\begin{aligned} J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4I \end{aligned}$$

إذن : $J^2 = 4I$

لتكن $M(a,b)$ و $M(x,y)$ مصفوفتين من V .

لدينا :
$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(a,b) &= (xI + yJ)(aI + bJ) \\ &= xaI + xbJ + yaJ + ybJ^2 \\ &= xaI + xbJ + yaJ + 4ybI \\ &= (xa + 4yb)I + (xb + ya)J \\ &= M(xa + 4yb\,;xb + ya) \in V \end{aligned}$$

إذن : $\forall\, M(a,b), M(x,y) \in V\ ;\ M(x,y) \times M(a,b) \in V$

يعني أن V جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول 2 ب

من خلال كون V فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

نستنتج أن $(V,+)$ زمرة تبادلية .

و من خلال كون V جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

و كون $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = M(1,0)$.

نستنتج أن الضرب $\times$ تبادلي و تجميعي و توزيعي بالنسبة لـ $+$ في V .

و كذلك المصفوفة $I = M(1,0)$ هي العنصر المحايد لـ $\times$ في V .

و بالتالي $(V,+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = M(1,0)$.

التمرين الأول 3 أ

$$M\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{4}\right) \times M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = M(0,0) = \mathcal{O}$$

التمرين الأول 3 ب

نعلم أن الجسم هو الحلقة الكاملة .

يعني أن الجسم هو الحلقة التي تتحقق فيها الخاصية التالية :

$\forall\, a,b \in Anneau\ ;\ ab = 0 \ \Rightarrow\ a = 0$ أو $b = 0$

من خلال السؤال 3) أ) نستنتج أن الحلقة $(V,+,\times)$ ليست كاملة نظرا لوجود مصفوفتين غير منعدمتين لكن جداؤهما منعدم .

و بالتالي $(V,+,\times)$ ليس جسما .

التمرين الأول 4 أ

سوف نستعمل العلاقة $J^2 = 4I$ أثناء الحساب .

نضع : $X = M(a,b) = aI + bJ$

$$\begin{aligned} &= X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I \\ &= (aI + bJ)^2 - 2a(aI + bJ) + (a^2 - 4b^2)I \\ &= a^2I + b^2J^2 + 2abJ - 2a^2I - 2abJ + (a^2 - 4b^2)I \\ &= (a^2 + 4b^2 - 2a^2 + a^2 - 4b^2)I + (2ab - 2ab)J \\ &= 0I + 0J = \mathcal{O} \end{aligned}$$

التمرين الأول 4 ب

$$\begin{aligned} &X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = \mathcal{O} \\ &\Leftrightarrow\ X^2 - 2aX = (4b^2 - a^2)I \\ &\Leftrightarrow\ X \times (X - 2aI) = (4b^2 - a^2)I \\ &\Leftrightarrow\ X \times \left(\frac{X - 2aI}{4b^2 - a^2}\right) = I \ ;\ (4b^2 - a^2) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\ X \times \left(\frac{aI + bJ - 2aI}{4b^2 - a^2}\right) = I \ ;\ (4b^2 - a^2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow\ X \times \left(\frac{-aI + bJ}{4b^2 - a^2}\right) = I \ ;\ (4b^2 - a^2) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow\ X \times M\left(\frac{-a}{4b^2 - a^2}, \frac{b}{4b^2 - a^2}\right) = I \ ;\ (4b^2 - a^2) \neq 0$$

و بالتالي المصفوفة $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في V .

و هي المصفوفة : $M\left(\frac{-a}{4b^2 - a^2}, \frac{b}{4b^2 - a^2}\right)$

التمرين الثاني 1 أ

$$(iu - 1 - i)^2 = -u^2 + (2 - 2i)u + 2i$$

التمرين الثاني 1 ب

لدينا :
$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-2(u + 1 - i)\right)^2 - 4(2u^2 - 4i) \\ &= 4(-u^2 + 2u + 2i - 2iu) \\ &= 4(iu - 1 - i)^2 \\ &= \left(2(iu - 1 - i)\right)^2 \end{aligned}$$

إذن : $z_1 = (1 - i)u + 2$ و $z_2 = (1 + i)u - 2i$.

التمرين الثاني 2 أ

ليكن z لحق المتجهة $\vec{t}$. و T هي الإزاحة التي متجهتها $\vec{t}$ و التي تحول U إلى I لدينا : $u \longrightarrow T_{\vec{t}}(U) = I$

إذن حسب التعريف العقدي للإزاحة نكتب :

$$\begin{aligned} T_{\vec{t}}(U) = I &\iff \overrightarrow{UI} = \vec{t} \\ &\iff z_{\vec{t}} = z_I - z_U \\ &\iff z_{\vec{t}} = \left(\frac{z_A + z_B}{2}\right) - z_U \\ &\iff z_{\vec{t}} = (u - i + 1) - u \\ &\iff z_{\vec{t}} = (1 - i) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\vec{t}(1-i)$ هي متجهة الإزاحة T .

التمرين الثاني 2 ب

لدينا R دوران معرف بما يلي :

$$R_{\Omega(2-2i)}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \; : \; M(z) \longrightarrow M'(z')$$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\iff z' - (2-2i) = e^{\frac{-i\pi}{2}}\big(z - (2-2i)\big) \\ &\iff z' = -iz + 4 \end{aligned}$$

إذن : $(*) \quad R(M) = M' \iff aff(M') = -i\, aff(M) + 4$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} -iz_A + 4 &= -i\big((1+i)u - 2i\big) + 4 \\ &= -2 - iu(1+i) + 4 \\ &= 2 + u(-i+1) = z_B \end{aligned}$$

إذن : $z_B = -i\, z_A + 4$

و باستعمال التكافؤ $(*)$ نستنتج أن : $R(A) = B$

التمرين الثاني 2 ج

نضع : $\omega = 2 - 2i = aff(\Omega)$

$$\begin{aligned} R(A) = B &\iff (z_B - \omega) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_A - \omega) \\ &\iff \left(\frac{z_B - \omega}{z_A - \omega}\right) = e^{\frac{-i\pi}{2}} \\ &\iff \begin{cases} \left|\dfrac{z_B - \omega}{z_A - \omega}\right| = \left|e^{\frac{-i\pi}{2}}\right| \\ \arg\left(\dfrac{z_B - \omega}{z_A - \omega}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{|z_B - \omega|}{|z_A - \omega|} = 1 \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |z_A - \omega| = |z_B - \omega| \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \Omega A = \Omega B \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

$\iff$ ΩAB مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω

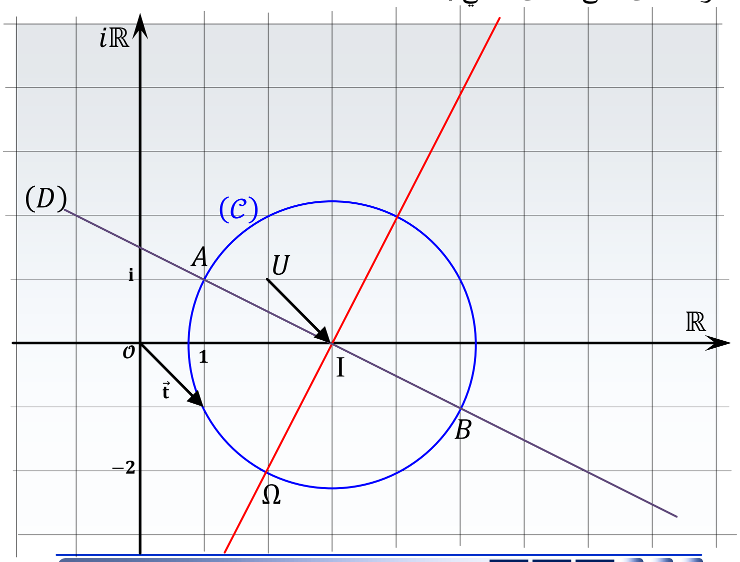
و بما أن I هي منتصف القطعة $[AB]$ فإنه حسب الخاصية المميزة لواسط قطعة نستنتج أن (ΩI) هو واسط القطعة $[AB]$ و بالتالي : $(\Omega I) \perp (AB)$

التمرين الثاني 2 د

ننطلق من ورقة بيضاء و نرسم عليها المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ و النقطتان U و Ω و المتجهة $\vec{t}(1-i)$.

- لدينا $T_{\vec{t}}(U) = I$ إذن نرسم النقطة I باستعمال العلاقة المتجهية $\vec{t} = \overrightarrow{UI}$
- نرسم المستقيم (D) المار من I و العمودي على (ΩI) و سوف نحدد فيما بعد A و B على هذا المستقيم لأن $(\Omega I) \perp (AB)$.
- لدينا ΩAB مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين رأسه Ω و I منتصف $[AB]$. إذن $IA = IB = I\Omega$ يعني أن A و B و Ω نقط من الدائرة التي مركزها I و شعاعها ΩI .
- و بالتالي للحصول على A و B نرسم الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها I و شعاعها ΩI و نلاحظ أن (D) يقطع $(\mathcal{C})$ في نقطتين هما A و B

يتعلق الرسم بأكمله بمعرفة العدد العقدي u . و نأخذ كمثال $u = (2+i)$ و نحصل على الشكل التالي .



التمرين الثاني 3 أ

لدينا :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= z_B - z_A \\ &= \big((1-i)u + 2\big) - \big((1+i)u - 2i\big) \\ &= -2iu + 2 + 2i \\ &= -4 - 2ia(1+i) + 2 + 2i \\ &= 2\big(i - 1 - ia(1+i)\big) \\ &= 2(i - 1 - ia + a) \\ &= 2(i-1)(1-a) \end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AU}} &= z_U - z_A \\ &= a(1+i) - 2i - (1+i)u + 2i \\ &= (1+i)(a-u) \\ &= (1+i)(2i - ai) \\ &= i(1+i)(2-a) \\ &= (i-1)(2-a) \end{aligned}$$

التمرين الثاني 3 ب

لدينا :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= 2(i-1)(1-a) \\ &= \frac{2(1-a)}{(2-a)}(i-1)(2-a) \\ &= \frac{2(1-a)}{(2-a)} \cdot z_{\overrightarrow{AU}} \\ &= k \cdot z_{\overrightarrow{AU}} \; ; \; k = \frac{2(1-a)}{(2-a)} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

إذن : $z_{\overrightarrow{AB}} = k\, z_{\overrightarrow{AU}}$ و منه : $\overrightarrow{AB} = k\, \overrightarrow{AU}$

يعني أن المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AU}$ مستقيميتان .

و منه فإن النقط A و B و U نقط مستقيمية .

التمرين الثالث 1

عندما نسحب كرتين من أحد الصناديق فإنه يُحتمل أن نسحب :

- كرتين حمراوين .
- أو كرة حمراء و الأخرى سوداء .
- أو كرتين سوداوين .

إذن قيم المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2 .

و بتعبير آخر نكتب : $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية

التمرين الثالث 2 أ

عندما نسحب كرتين من أحد الصناديق فإنه توجد :

- C_3^1 إمكانية لاختيار الصندوق
- و C_n^2 إمكانية لسحب كرتين في آن واحد من بين n كرة .

إذن : $$card(\Omega) = C_3^1 \cdot C_n^2 = \frac{3n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{3n(n-1)}{2}$$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين .

و من أجل ذلك توجد :

- 0 إمكانية لسحب الكرتين من الصندوق U_1
- إمكانية واحدة لسحب الكرتين من الصندوق U_2
- C_3^2 إمكانية لسحب الكرتين من الصندوق U_3

إذن : $$p[X=2] = \frac{card[X=2]}{card(\Omega)} = \frac{0+1+C_3^2}{\frac{3n(n-1)}{2}} = \frac{8}{3n(n-1)}$$

التمرين الثالث 2 ب

الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة حمراء واحدة و الأخرى بطبيعة الحال ستكون سوداء . و من أجل ذلك توجد :

- $C_1^1 \times C_{n-1}^1$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_1
- $C_2^1 \times C_{n-2}^1$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_2
- $C_3^1 \times C_{n-3}^1$ إمكانية لسحب كرة حمراء و الأخرى سوداء من U_3

إذن عدد الإمكانيات التي نحصل فيها على كرة حمراء و الأخرى سوداء هو

$$card[X=1] = (C_1^1 \times C_{n-1}^1) + (C_2^1 \times C_2^1) + (C_3^1 \times C_{n-3}^1) = (6n-14)$$

و بالتالي : $$p[X=1] = \frac{card[X=1]}{card(\Omega)} = \frac{6n-14}{\frac{3n(n-1)}{2}} = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

التمرين الثالث 2 ج

في البداية وجب علينا حساب احتمال الحدث $[X=0]$.

نعلم أن : $p[X=0]+p[X=1]+p[X=2]=1$

إذن : $$p[X=0] = 1 - p[X=1] - p[X=2] = 1 - \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)} - \frac{8}{3n(n-1)} = \frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$$

نضع : $\boxed{x_0 = \frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}}$ و $\boxed{x_1 = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}}$

و : $\boxed{x_2 = \frac{8}{3n(n-1)}}$

إذن قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{llll} P_X : & \{0,1,2\} & \longrightarrow & [0,1] \\ & k & \longrightarrow & P_X(k) = x_k \end{array}$$

التمرين الثالث 3

$E_3 =$ " نسحب الكرتين من الصندوق U_3 "

احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 مع العلم أننا حصلنا على كرتين حمراوين هو الاحتمال الشرطي التالي :

$$P_{[X=2]}(E_3) = \frac{p(E_3 \cap [X=2])}{p[X=2]} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_n^2}}{\frac{8}{3n(n-1)}} = \frac{\frac{2}{n(n-1)}}{\frac{8}{3n(n-1)}} = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

التمرين الرابع I 1

لدينا : $g'(x) = 2e^{-x} - 1$

إذا كان $x = \ln 2$ فإن $g'(x) = 0$.

إذا كان $x > \ln 2$ فإن $g'(x) < 0$.

إذا كان $x < \ln 2$ فإن $g'(x) > 0$.

و لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} 2(1-e^{-x}) - x \\ &= \lim_{x\to-\infty} x\left(2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x}\right) - 1\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty} x\left(2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{xe^x}\right) - 1\right) = -\infty \\ " &= "(-\infty)(2(0^- - -\infty) - 1) \end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} 2(1-e^{-x}) - x = -\infty \\ &= 2(1-0) - \infty \end{aligned}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$-\infty$ ↗	$1-\ln 2$	↘ $-\infty$

التمرين الرابع I 2 أ

لدينا g دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\ln 2 ; +\infty[$.

إذن g دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]\ln 4, \ln 6[$

إذن g تقابل من $]\ln 4, \ln 6[$ نحو $g(]\ln 4, \ln 6[)$.

و لدينا : $g(]\ln 4, \ln 6[) = \left]\frac{5}{3} - \ln 6 ; \frac{3}{2} - \ln 4\right[\approx \left]\frac{-1}{10} ; \frac{1}{10}\right[$

نلاحظ أن : $0 \,\epsilon\, \left]\frac{-1}{10} ; \frac{1}{10}\right[$.

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا في المجال $]\ln 4, \ln 6[$.

أو بتعبير آخر نكتب : $(\exists!\ \alpha \,\epsilon\,]\ln 4, \ln 6[) \ ; \ g(\alpha) = 0$

التمرين الرابع I 2 ب

لدينا g دالة تناقصية على المجال $]\ln 2 ; +\infty[$.

إذن g تناقصية على كل من المجالين $[\ln 2 ; \alpha]$ و $[\alpha, +\infty[$.

و ذلك لأن $\ln 2 < \ln 4 < \alpha < \ln 6$

إذا كان $x >$ فإن : $g(x) < g(\alpha) = 0$

أي : $\forall\, x > \alpha \ ; \ g(x) < 0$

إذا كان $\ln 2 < x < \alpha$ فإن : $g(\ln 2) > g(x) > g(\alpha) = 0$

أي : $\forall \, x \in \,]\ln 2 \, ; \alpha[\;\; ; \;\; g(x) > 0$

و لدينا g دالة تزايدية على المجال $]0; \ln 2[$.

إذا كان $0 < x < \ln 2$ فإن : $0 = g(0) < g(x) < g(\ln 2)$

يعني : $\forall \, x \in \,]0; \ln 2[\; ; \; g(x) > 0$

نستنتج إذن جدول إشارة الدالة g كما يلي :

x	0		$\ln 2$		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	$0{,}3$	$+$	0	$-$	

التمرين الرابع I 3 أ

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; (P_n) : 1 \leq u_n < \alpha$

من أجل $n = 0$ لدينا $1 \leq u_0 = 1 < \alpha$

و هذا يعني أن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$\begin{aligned}
(P_n) \; est \; vraie \; &\Rightarrow \; 1 \leq u_n < \alpha \\
&\Rightarrow \; -\alpha < -u_n \leq -1 \\
&\Rightarrow \; e^{-\alpha} < e^{-u_n} \leq e^{-1} \\
&\Rightarrow \; \frac{-1}{e} \leq -e^{-u_n} < e^{-1} \\
&\Rightarrow \; 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq 2(1 - e^{-u_n}) < 2(1 - e^{-\alpha})
\end{aligned}$$

لدينا :
$$\begin{aligned}
g(\alpha) = 0 \; &\Rightarrow \; 2(1 - e^{-\alpha}) - \alpha = 0 \\
&\Rightarrow \; 2(1 - e^{-\alpha}) = \alpha
\end{aligned}$$

و لدينا :
$$\begin{aligned}
e > 2 \; &\Rightarrow \; \frac{1}{e} < \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \; \frac{-1}{e} > \frac{-1}{2} \\
&\Rightarrow \; \left(1 - \frac{1}{e}\right) > \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \; 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) > 1 \\
&\Rightarrow \; 1 \leq 2(1 - e^{-u_n}) < \alpha \\
&\Rightarrow \; 1 \leq u_{n+1} < \alpha \\
&\Rightarrow \; (P_{n+1}) \; est \; vraie
\end{aligned}$$

لقد حصلنا لحد الآن على الوضعية التالية :
$$\begin{cases} (P_{n+1}) \; est \; vraie \\ (P_n) \; \Rightarrow \; (P_{n+1}) \; ; \; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; (P_n) \; est \; vraie$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 1 \leq u_n < \alpha$

التمرين الرابع I 3 ب

$$u_{n+1} - u_n = 2(1 - e^{-u_n}) - u_n = g(u_n)$$

التمرين الرابع I 3 ج

نعلم أن g دالة موجبة على المجال $[\ln 2 \, ; \alpha[$.

إذن g دالة موجبة قطعا على $[1, \alpha[$. لأن : $[1, \alpha[\, \subset [\ln 2, \alpha[$

و نعلم كذلك أن $[1, \alpha[\;\; u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; g(u_n) > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} - u_n > 0$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} > u_n$

إذن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية قطعا .

التمرين الرابع I 3 د

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = 2(1 - e^{-x})$

لدينا h دالة متصلة و تزايدية قطعا على $[1, \alpha[$.

لأن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; h'(x) = 2e^{-x} > 0$

و لدينا : $h([1, \alpha[) \subset [1, \alpha]$ و $u_0 = 1 \in [1, \alpha]$

لدينا $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}) = h(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية و مكبورة بالعدد α

(لأن $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 1 \leq u_n < \alpha$)

فإن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و نهايتها l تحقق $h(l) = l$

أو بتعبير آخر النهاية l تحقق : $g(l) = 0$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]\ln 4 \, ; \ln 6[$.

و بالتالي : $l = \lim(u_n) = \alpha$

التمرين الرابع II 1

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - e^x}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) \\
&= \lim_{\substack{u \to +\infty \\ u = \frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{4u^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{e^u}{u} \right)^2 \right) \\
&= (0 - \infty) = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1 - e^x}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-1}{x} \right) \left(\frac{e^x - e^0}{x - 0} \right) \\
&= (-\infty)(1) = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1 - e^x}{x^3} \right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{27} \left(\frac{e^{\frac{x}{3}}}{\frac{x}{3}} \right)^3 \right) \\
&= \lim_{\substack{u \to +\infty \\ u = \frac{x}{3}}} \left(\frac{1}{27u^3} - \frac{1}{27} \left(\frac{e^u}{u} \right)^3 \right) = -\infty
\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 2 أ

$$\begin{aligned}
g(\alpha) = 0 \; &\Leftrightarrow \; 2(1 - e^{-\alpha}) = \alpha \\
&\Leftrightarrow \; e^{\alpha} = \frac{2}{2 - \alpha} \\
&\Leftrightarrow \; \frac{1 - e^{\alpha}}{\alpha^2} = \frac{1 - \left(\frac{2}{2 - \alpha} \right)}{\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha^2(2 - \alpha)} = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)} \\
&\Leftrightarrow \; f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 2 ب

$$f'(x)=\left(\frac{1-e^x}{x^2}\right)'=\frac{-x^2e^x-2x(1-e^x)}{x^4}$$
$$=\frac{-x^2e^x-2x\,e^x(e^{-x}-1)}{x^4}$$
$$=\frac{xe^x(2(1-e^{-x})-x)}{x^4}$$
$$=\frac{e^x\,g(x)}{x^3}$$

نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $g(x)$.

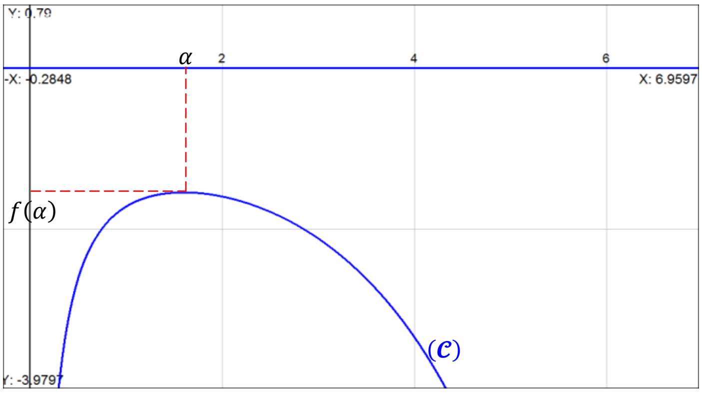
لأن : $\frac{e^x}{x^3}>0\ ;\ (\forall x>0)$

لدينا $g(x)$ تنعدم في α إذن $f'(x)$ تنعدم كذلك في α .

نستنتج جدول إشارة f انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$	$\searrow$	$-\infty$

التمرين الرابع II 3



التمرين الرابع III 1 أ

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . لدينا :

$$F(x)=\int_x^{2x}\left(\frac{1-e^t}{t^2}\right)dt=\int_x^{2x}\underbrace{\left(\frac{-1}{t^2}\right)}_{v'}\cdot\underbrace{(e^t-1)}_{u}$$
$$=[uv]-\int vu'$$
$$=\left[\frac{e^t-1}{t}\right]_x^{2x}-\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}\right)e^t\,dt$$
$$=\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)-\left(\frac{e^x-1}{x}\right)-\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt$$

التمرين الرابع III 1 ب

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . $x\le t\le 2x \iff e^x\le e^t\le e^{2x}$

$$\iff \frac{e^x}{t}\le\frac{e^t}{t}\le\frac{e^{2x}}{t}\ ;\ avec\ t>0$$
$$\Rightarrow \int_x^{2x}\left(\frac{e^x}{t}\right)dt\le\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt\le\int_x^{2x}\left(\frac{e^{2x}}{t}\right)dt$$

car ces fonctions sont continues
et aussi $x<2x$

$$\Rightarrow e^x[\ln t]_x^{2x}\le\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt\le e^{2x}[\ln t]_x^{2x}$$
$$\Rightarrow \boxed{e^x\ln 2\le\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt\le e^{2x}\ln 2}\quad(*)$$

التمرين الرابع III 1 ج

لدينا : $\lim_{x\to0^+}e^x\ln 2=\lim_{x\to0^+}e^{2x}\ln 2=\ln 2$

إذن التأطير (*) يصبح :

$$\underset{\ln 2}{\underbrace{(e^x\ln 2)}_{x\to0^+}}\le\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt\le\underset{\ln 2}{\underbrace{(e^{2x}\ln 2)}_{x\to0^+}}$$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن :

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt=\ln 2$$

و لدينا : $F(x)=\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)-\left(\frac{e^x-1}{x}\right)-\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt$

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)-\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)-\lim_{x\to0^+}\int_x^{2x}\left(\frac{e^t}{t}\right)dt$$
$$=\lim_{\substack{u\to0^+\\u=2x}}\left(\frac{e^u-e^0}{u-0}\right)-\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)-\ln 2$$
$$=e^0-e^0-\ln 2$$
$$=-\ln 2=F(0)$$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to0^+}F(x)=F(0)}$

أي F دالة متصلة على اليمين في الصفر .

التمرين الرابع III 2 أ

$$x\le t\le 2x\iff(1-e^{2x})\le(1-e^t)\le(1-e^x)$$

سوف نهتم فقط بالشق الأيمن : $(1-e^t)\le(1-e^x)$

$$\iff\left(\frac{1-e^t}{t^2}\right)\le\left(\frac{1-e^x}{t^2}\right)\ ;\ t\ge x>0$$
$$\Rightarrow\int_x^{2x}\left(\frac{1-e^t}{t^2}\right)dt\le(1-e^x)\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t^2}\right)dt$$

car la continuité est vérifiée
et aussi $x<2x$

$$\Rightarrow F(x)\le(1-e^x)\left[\frac{-1}{t}\right]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \; F(x) \leq (1-e^{x})\left(\frac{-1}{2x}+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \; F(x) \leq \left(\frac{1-e^{x}}{2x}\right) \quad (***)$$

التمرين الرابع III 2 ب

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-e^{x}}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2x}\right)}_{\to 0} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{e^{x}}{x}\right)}_{\to +\infty} = -\infty$

إذن التأطير $(***)$ يصبح : $F(x) \leq \underbrace{\left(\frac{1-e^{x}}{2x}\right)}_{x\to+\infty} \to -\infty$

و منه حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$

التمرين الرابع III 3

ليكن a عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $F(x) = \int_{x}^{2x}\left(\frac{1-e^{t}}{t^{2}}\right)dt$

$$= \int_{a}^{2x}\left(\frac{1-e^{t}}{t^{2}}\right)dt - \int_{a}^{x}\left(\frac{1-e^{t}}{t^{2}}\right)dt$$

لدينا الدالة $t \longrightarrow \left(\frac{1-e^{t}}{t^{2}}\right)$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$ لأنها عبارة عن خارج دالتين متصلتين على المجال $]0;+\infty[$. مع $t^{2}\neq 0$.

إذن $t \longrightarrow \left(\frac{1-e^{t}}{t^{2}}\right)$ تقبل عدة دوال أصلية على المجال $]0;+\infty[$.

و بالخصوص تقبل دالة أصلية وحيدة نرمز لها بالرمز h و هي معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} h(a)=0 \\ h(x) = \int_{a}^{x}\left(\frac{1-e^{t}}{t^{2}}\right)dt \; ; \; (\forall x>0) \\ h'(x) = \left(\frac{1-e^{x}}{x^{2}}\right) \; ; \; (\forall x>0) \end{cases}$$

إذن : $F(x) = \int_{a}^{2x}\left(\frac{1-e^{t}}{t^{2}}\right)dt - \int_{a}^{x}\left(\frac{1-e^{t}}{t^{2}}\right)dt$

$$= h(2x) - h(x)$$

و بما أن الدالتين h و $x \longrightarrow 2x$ قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ فإن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ حيث $h(]0;+\infty[) \subset]0;+\infty[$.

إذن : $F'(x) = \big(h(2x)-h(x)\big)'$

$$= 2\,h'(2x) - h'(x)$$

$$= 2\left(\frac{1-e^{2x}}{(2x)^{2}}\right) - \left(\frac{1-e^{x}}{x^{2}}\right)$$

$$= \frac{2-e^{2x}-4(1-e^{x})}{(2x)^{2}} = \frac{-2(e^{2x}-2e^{x}+1)}{4x^{2}}$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)^{2}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x>0) \; ; \; F'(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)^{2}}$

التمرين الرابع III 4 أ

لدينا F متصلة و قابلة للاشتقاق على كل مجال على شكل $]0,x[$ حيث $x>0$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية (TAF) نستنتج أن :

$$\exists\, \omega \in]0,x[\; ; \; \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(\omega)$$

يعني : $\exists\, \omega \in]0,x[\; ; \; \big(F(x)-F(0)\big) = \left(\frac{-x}{2}\right)\left(\frac{e^{\omega}-1}{\omega}\right)^{2}$

و لدينا كذلك الدالة Exp متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله .

نستطيع تطبيق (TAF) على أي مجال يوجد ضمن $\mathbb{R}$.

نختار بالضبط المجال $[0,\omega]$ نحصل على :

$$\boxed{\exists\, c \in]0,\omega[\; ; \; \left(\frac{e^{\omega}-1}{\omega}\right) = e^{c} \quad (**)}$$

من النتيجتين $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن :

$$\boxed{\exists\, c \in]0,\omega[\subset]0,x[\; ; \; F(x)-F(0) = \frac{-x}{2}e^{2c}}$$

التمرين الرابع III 4 ب

$$0<c<x \Leftrightarrow e^{0} < e^{2c} < e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-x}{2}\right)e^{2x} < \left(\frac{-x}{2}\right)e^{2c} < \left(\frac{-x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-e^{2x}}{2}\right) < \frac{F(x)-F(0)}{x-0} < \left(\frac{-1}{2}\right) \quad (\blacksquare)$$

التمرين الرابع III 4 ج

لدينا : $\lim\limits_{x\to0^{+}} \frac{-e^{2x}}{2} = \frac{-1}{2}$ إذن التأطير $\blacksquare$ يصبح :

$$\underbrace{\left(\frac{-e^{2x}}{2}\right)}_{x\to0^{+}} < \left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) < \underbrace{\left(\frac{-1}{2}\right)}_{x\to0^{+}}$$

$$\frac{-1}{2} \qquad\qquad\qquad \frac{-1}{2}$$

نستنتج إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات أن :

$$\lim_{x\to0^{+}}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = \frac{-1}{2} \in \mathbb{R}$$

و بالتالي F دالة قابلة للاشتقاق على يمين الصفر و العدد المشتق على اليمين هو $\frac{-1}{2}$. أو بتعبير أجمل نكتب : $F'_{d}(0) = \frac{-1}{2}$.

أجوبة امتحان الدورة العادية 2010

التمرين الأول I 1

لنبين أن $*$ قانون تبادلي في المجموعة I .
ليكن a و b عنصرين من I .
لدينا : $a*b = e^{(\ln a)(\ln b)} = e^{(\ln b)(\ln a)} = b*a$
إذن : $\forall\,(a,b)\,\epsilon\,I^2 \;;\; a*b = b*a$
أي أن القانون $*$ تبادلي في المجموعة I .
لنبين أن $*$ قانون تجميعي في المجموعة I .
لتكن a و b و c ثلاثة عناصر من المجموعة I .
لدينا :

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= e^{(\ln a)(\ln(b*c))} = e^{(\ln a)(\ln b)(\ln c)} \\ &= e^{(\ln(a*b))(\ln c)} = (a*b)*c \end{aligned}$$

إذن : $\forall\,(a,b,c)\,\epsilon\,I^3 \;;\; a*(b*c) = (a*b)*c$
أي أن القانون $*$ تجميعي في المجموعة I .

التمرين الأول I 2

ليكن ε العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I .
إذن : $(\forall a \epsilon I) \;;\; a*\varepsilon = \varepsilon*a = a$
لتحديد القيمة العددية لـ ε ننطلق من إحدى المتساويتين .
لدينا :

$$\begin{aligned} a*\varepsilon = a &\Leftrightarrow e^{(\ln a)(\ln \varepsilon)} = a \\ &\Leftrightarrow (\ln a)(\ln \varepsilon) = (\ln a) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon = e \;\epsilon\;]0,+\infty[= I \end{aligned}$$

إذن e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I .

التمرين الأول I 3 أ

$$\begin{aligned} a,b \,\epsilon\, I\backslash\{1\} &\Leftrightarrow a \neq 1 \;\; et \;\; b \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \ln a \neq 0 \;\; et \;\; \ln b \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (\ln a)(\ln b) \neq \\ &\Leftrightarrow e^{(\ln a)(\ln b)} \neq 1 \;\; et \;\; e^{(\ln a)(\ln b)} > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{(\ln a)(\ln b)} \,\epsilon\, I\backslash\{1\} \\ &\Leftrightarrow a*b \;\epsilon\; I\backslash\{1\} \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن : $\forall\,(a,b)\,\epsilon\, I\backslash(1) \;;\; a*b \,\epsilon\, I\backslash\{1\}$
تركيب داخلي في المجموعة $I\backslash\{1\}$.
تبادلية و تجميعية القانون $*$ في المجموعة $I\backslash\{1\}$ نستنتجها من خلال المجموعة I لأن $I\backslash\{1\}$ جزء من I .
بما أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I فإن تبادلي و تجميعي كذلك في المجموعة $I\backslash\{1\}$. و ذلك لأن $I\backslash\{1\} \subset I$.
لدينا e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I .
إذن حسب وحدانية العنصر المحايد نستنتج أن e هو نفسه العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة $I\backslash\{1\}$. و ذلك لسببين و هما وحدانية العنصر المحايد و $e \neq 1$ أي $e \,\epsilon\, I\backslash\{1\}$.
لندرس الآن التماثل في المجموعة $I\backslash\{1\}$.
ليكن a عنصرا من $I\backslash\{1\}$ و x مماثله بالنسبة لـ $*$ في $I\backslash\{1\}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a*x = e \\ &\Rightarrow e^{(\ln a)(\ln x)} = e \\ &\Rightarrow (\ln a)(\ln x) = 1 \\ &\Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{\ln a} \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} a \,\epsilon\, I\backslash\{1\} &\Rightarrow a \neq 1 \\ &\Rightarrow \ln a \neq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\ln a} \neq 0 \\ &\Rightarrow e^{\left(\frac{1}{\ln a}\right)} \neq 1 \;\; et \;\; e^{\left(\frac{1}{\ln a}\right)} > 0 \\ &\Rightarrow x \;\epsilon\; I\backslash\{1\} \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن كل عنصر a من $I\backslash\{1\}$ يقبل مماثلا من $I\backslash\{1\}$ و هو العنصر $e^{\left(\frac{1}{\ln a}\right)}$.

الخلاصة : لقد تمكنا من أن نبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة $I\backslash\{1\}$ و يمتلك عنصرا محايدا و هو e و كل عنصر a يقبل مماثلا و هو $e^{\left(\frac{1}{\ln a}\right)}$
إذن $(I\backslash\{1\},*)$ **زمرة تبادلية** .

- $*$ قانون تركيب داخلي
- $*$ تجميعي
- $*$يقبل عنصرا محايدا
- كل عنصر يقبل مماثلا

- $*$ تبادلي

التمرين الأول I 3 ب

في البداية نلاحظ أن $]1,+\infty[\subset I\backslash\{1\}$.
و ذلك لأن : $I\backslash\{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
و لدينا كذلك : $]1,+\infty[\neq \emptyset$
إذن $]1,+\infty[$ جزء غير فارغ من المجموعة $I\backslash\{1\}$.
يكفي الآن أن نبرهن على أنه إذا كان a و b عنصرين من المجال $]1,+\infty[$ فإن $a*b' \,\epsilon\,]1,+\infty[$.
بحيث b' هو مقلوب b في المجموعة $I\backslash\{1\}$.
ننطلق من الكتابة :

$$\begin{aligned} a*b' &= a*e^{\left(\frac{1}{\ln b}\right)} = e^{\ln a \cdot \ln\left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right)} \\ &= e^{(\ln a)\cdot\left(\frac{1}{\ln b}\right)} = e^{\frac{\ln a}{\ln b}} \end{aligned}$$

من جهة أخرى . لدينا :

$$\begin{aligned} a,b \,\epsilon\,]1,+\infty[&\Leftrightarrow a > 1 \;\; et \;\; b > 1 \\ &\Leftrightarrow \ln a > 0 \;\; et \;\; \ln b > 0 \\ &\Rightarrow \frac{\ln a}{\ln b} > 0 \;\Rightarrow\; e^{\left(\frac{\ln a}{\ln b}\right)} > 1 \\ &\Rightarrow e^{\left(\frac{\ln a}{\ln b}\right)} \,\epsilon\,]1,+\infty[\\ &\Rightarrow a*b' \;\epsilon\;]1,+\infty[\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\forall\, a,b \,\epsilon\,]1,+\infty[\;;\; a*b' \,\epsilon\,]1,+\infty[}$

نحن الآن أمام الوضعية التالية :

- $(I\backslash\{1\},*)$ زمرة تبادلية
- $]1,+\infty[$ جزء غير فارغ من $I\backslash\{1\}$
- $\forall\,(a,b)\,\epsilon\,]1,+\infty[\;;\; a*b' \,\epsilon\,]1,+\infty[$

نستنتج إذن حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية أن $(]1,+\infty[;*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I\backslash\{1\};*)$.

التمرين الأول I 4 أ

لتكن a و b و c ثلاثة عناصر من المجموعة I .
يكون $*$ توزيعيا بالنسبة للقانون $\times$ إذا كان :

$$\begin{cases} a*(b\times c) = (a*b)\times(a*c) \\ (a\times b)*c = (a*c)\times(b*c) \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} a*(b\times c) &= e^{(\ln a)(\ln bc)} = e^{(\ln a)(\ln b + \ln c)} \\ &= e^{(\ln a)(\ln b)+(\ln a)(\ln c)} \\ &= e^{(\ln a)(\ln b)} \times e^{(\ln a)(\ln c)} \\ &= e^{(\ln a)(\ln b)} \times e^{(\ln a)(\ln c)} \\ &= (a*b)\times(a*c) \end{aligned}$$

و نستنتج المتساوية الثانية من خلال تبادلية القانونين $\times$ و $*$ و أو باستعمال نفس الطريقة المبينة أعلاه .
و بالتالي $*$ قانون توزيعي بالنسبة للقانون $\times$.

I | 4 | ب — التمرين الأول

لدينا I جزء غير فارغ من المجموعة $\mathbb{R}^*$.

ليكن x و y عنصرين من المجال I .

$$\begin{aligned}(x,y)\,\epsilon\, I^2 &\Leftrightarrow\ x>0\ \ et\ \ y>0\\ &\Rightarrow\ \frac{x}{y}>0\\ &\Rightarrow\ x\times y^{-1}>0\\ &\Rightarrow\ x\times y^{-1}\,\epsilon\, I\\ &\Rightarrow\ (\mathbb{R}^*,\times)\ \text{زمرة جزئية للزمرة}\ (I,\times)\end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

- $(I,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1
- $(I\backslash\{1\},*)$ زمرة .
- $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$.

إذن من خلال هذه الوضعية نستنتج أن : $(I,\times,*)$ جسم تبادلي .

II | 1 — التمرين الأول

$$A^2=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad et\quad A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

II | 2 — التمرين الأول

نفترض أن A تقبل مقلوبا A^{-1} في المجموعة $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

إذن : $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=I$

بحيث $\times$ هو ضرب المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

و I هي المصفوفة الوحدة : $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ننطلق من الكتابة : $A\times A^{-1}=I$ و نضرب طرفيها في A^2

نحصل على : $A^3\times A^{-1}=A^2$

يعني : $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times A^{-1}=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

أي : $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و هذا تناقض واضح .

و بالتالي المصفوفة A لا تقبل مقلوبا في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1 | أ — التمرين الثاني

ليكن العدد العقدي $x+iy$ جذرا مربعا للعدد العقدي $3+4i$.

$$\Leftrightarrow\ (x+iy)^2=3+4i$$
$$\Leftrightarrow\ x^2-y^2+i(2xy)=3+4i$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-y^2=3\\ xy=2\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-y^2=3\\ x^2y^2=4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x^2-y^2=3\\ x^2=\dfrac{4}{y^2}\ ;\ y\neq 0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{4}{y^2}-y^2=3\\ x^2=\dfrac{4}{y^2}\ ;\ y\neq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}y^4+3y^2-4=0\\ x^2=\dfrac{4}{y^2}\ ;\ y\neq 0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}t^2+3t-4=0\ ;\ t=y^2\\ x^2=\dfrac{4}{t}\ ;\ t\neq 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}t_2=1\ et\ t_2=-4\\ t_1=y_1^2\ et\ t_2=y_2^2\\ x_1^2=\dfrac{4}{t_1}\ et\ x_2^2=\dfrac{4}{t_2}\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}y=1\ \Rightarrow\ x=2\\ y=-1\ \Rightarrow\ x=-2\\ y=2i\ \Rightarrow\ x=-i\\ y=-2i\ \Rightarrow\ x=i\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}x+iy=2+i\\ x+iy=-2-i\\ x+iy=-2-i\\ x+iy=2+i\end{cases}$$

و بالتالي $(3+4i)$ يقبل جذرين مربعين و هما $(2+i)$ و $(-2-i)$

1 | ب — التمرين الثاني

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ \ 4z^2-10iz-7-i=0$

بعد حساب المميز Δ نجد : $\Delta=4(3+4i)$

لدينا حسب السؤال 1) أ) : $(3+4i)$ يقبل جذرين مربعين و هما : $(2+i)$ و $(-2-i)$.

نختار $(2+i)$ فنحصل على $\Delta=[2(2+i)]^2$.

إذن المعادلة (E) تقبل الحلين a و b المعرفين بما يلي : $b=\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}$ و $a=i-\frac{1}{2}$

عندما نختار الجذر المربع الثاني للعدد العقدي $(3+4i)$ نحصل على نفس النتيجة .

2 | أ — التمرين الثاني

لدينا :
$$\begin{aligned}a(1-i)&=\left(i-\tfrac{1}{2}\right)(1-i)\\ &=i+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i=b\end{aligned}$$

إذن : $\dfrac{b}{a}=(1-i)$

2 | ب — التمرين الثاني

لدينا : $\dfrac{b-a}{0-a}=\dfrac{-b}{a}+1=-(1-i)+1=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$

إذن :
$$\frac{b-a}{0-a}=e^{\frac{i\pi}{2}}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\left|\dfrac{b-a}{0-a}\right|=\left|e^{\frac{i\pi}{2}}\right|\\ \arg\left(\dfrac{b-a}{0-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{AB}{AO}=1\\ \left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}AB=AO\\ \left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$$

و بالتالي : المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة O .

3 | أ — التمرين الثالث

لدينا R دوران معرف بما يلي : $R_C\left(\frac{\pi}{2}\right)\ :\ B\ \longrightarrow\ D$

$$\begin{aligned}R(B)=D\ &\Leftrightarrow\ (d-c)=e^{\frac{i\pi}{2}}(b-c)\\ &\Leftrightarrow\ d=c+i(b-c)\\ &\Leftrightarrow\ d=c+ib-ic\\ &\Leftrightarrow\ c(1-i)=d-ib\\ &\Leftrightarrow\ c(1-i)=d-i\left(\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow\ c(1-i)=d+\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\\ &\Leftrightarrow\ c=\left(\frac{1}{1-i}\right)d+\left(\frac{\frac{3}{2}-\frac{i}{2}}{1-i}\right)\\ &\Leftrightarrow\ c=\frac{1}{2}(1+i)d+\left(1+\frac{i}{2}\right)\end{aligned}$$

التمرين الثاني 3 ب

لدينا الإزاحة معرفة بما يلي : $T_{\overrightarrow{AO}} \;:\; D \;\longrightarrow\; L$

$$\begin{aligned} T_{\overrightarrow{AO}}(D) = L &\Leftrightarrow \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AO} \\ &\Leftrightarrow (l-d) = (0-a) \\ &\Leftrightarrow \left(l + (i-1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -a \\ &\Leftrightarrow l + (i-1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2} - i \\ &\Leftrightarrow l = (1-i)c - \frac{i}{2} - 1 \end{aligned}$$

التمرين الثاني 3 ج

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{l-c}{a-c} &= \frac{(1-i)c - 1 - \frac{i}{2} - c}{i - \frac{1}{2} - c} \\ &= \frac{-ic - 1 - \frac{i}{2}}{i - \frac{1}{2} - c} = \frac{i\left(-c + i - \frac{1}{2}\right)}{\left(i - \frac{1}{2} - c\right)} \\ &= i = e^{\frac{i\pi}{2}} \end{aligned}$$

من جهة أخرى :

$$\begin{aligned} \frac{l-c}{a-c} = e^{\frac{i\pi}{2}} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{l-c}{a-c}\right| = \left|e^{\frac{i\pi}{2}}\right| \\ \arg\left(\frac{l-c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{CL}{CA} = 1 \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CL}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} CL = CA \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CL}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

و بالتالي ALC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة C .

التمرين الثالث 1

الإجابة على هذا السؤال سوف نستعمل الخاصيتين التاليتين :

الخاصية الأولى : إذا كان العدد a قاسما مشتركا للعددين b و c
فإنه يقسم كل تأليفة لهما.

أو بتعبير آخر : $\begin{cases} a/b \\ a/c \end{cases} \Longrightarrow \ (\forall\, u, v \in \mathbb{Z})\ ;\ a/(ub+vc)$

الخاصية الثانية : $(un\ premier\ qui\ divise\ un\ produit)$

إذا كان p عددا أوليا و يقسم الجداء ab فإن p يقسم أحد طرفي هذا الجداء .

أو بتعبير آخر : $\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ p/ab \end{cases} \Longrightarrow \ (p/a)\ \ ou\ bien\ \ (p/b)$

ننطلق من الكتابة : $m^2 + 1 \equiv 0\ [5]$ إذن : $5/(m^2+1)$

و نعلم أن $5/(-5)$ إذن حسب الخاصية الأولى $5/(m^2+1-5)$.

يعني : $5/(m^2-4)$ أي : $5/(m-2)(m+2)$.

بما أن 5 عدد أولي فإنه حسب الخاصية الثانية نستنتج أن : $5/(m+2)$

أو $5/(m-2)$.

و باستعمال الخاصية الأولى نجد : $5/(m+2-5)$ أو $5/(m-2)$

يعني : $5/(m-3)$ أو $5/(m-2)$.

يعني : $m \equiv 3\ [5]$ أو $m \equiv 2\ [5]$.

في المجموعة $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ نكتب $m \in \{\bar{2}; \bar{3}\}$.

التمرين الثالث 2 أ

ليكن p عددا أوليا و k و n عددين صحيحين طبيعيين .

$$\begin{aligned} n^2 + 1 \equiv 0\ [p] &\Leftrightarrow n^2 \equiv -1\ [p] \\ &\Leftrightarrow (n^2)^{(\text{عدد فردي})} \equiv (-1)^{(\text{عدد فردي})}\ [p] \\ &\Leftrightarrow (n^2)^{(2k+1)} \equiv -1\ [p] \end{aligned}$$

التمرين الثالث 2 ب

$$\begin{aligned} (n^2)^{(2k+1)} \equiv -1\ [p] &\Leftrightarrow (\exists u \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ (n^2)^{2k+1} + 1 = pu \\ &\Leftrightarrow pu + n\underbrace{\left(-n^{4k}\right)}_{v} = 1 \\ &\Leftrightarrow (\exists\, u, v \,\epsilon\, \mathbb{Z})\ ;\ pu + nv = 1 \\ &\Leftrightarrow n \wedge p = 1\ ;\ d'après\ \ Bezout \end{aligned}$$

التمرين الثالث 2 ج

لدينا p عدد أولي . و $n \wedge p = 1$.

إذن حسب $Fermat$ نكتب : $n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

و نعلم أن : $p = 4k+3$. إذن : $(n^2)^{2k+1} \equiv 1\ [p]$.

التمرين الثالث 2 د

باستعمال البرهان بالخلف نفترض وجود n حيث $n^2 + 1 \equiv 0\ [\,p\,]$.

لدينا : $\begin{cases} (n^2)^{2k+1} \equiv -1\ [p] \\ (n^2)^{2k+1} \equiv 1\ [p] \end{cases}$

إذن : $1 \equiv -1\ [p]$ أي أن p قاسم للعدد 2 .

و بما أن p أولي و يقسم العدد الأولي 2 فإن $p = 2$ أي $4k+3 = 2$.

و هذا بطبيعة الحال مستحيل و تناقض في وضح النهار .

إذن ما افترضناه كان خاطئا .

يعني لا وجود لعدد صحيح طبيعي n يحقق $n^2 + 1 \equiv 0\ [p]$.

التمرين الرابع I 1

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(4x\, e^{-x^2}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{x}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)}\right) \\ &= \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=x^2}} \left(\frac{4}{\sqrt{u}}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{e^{u}}{u}\right)}\right) \\ &= 0 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

التمرين الرابع I 2

ليكن x عنصرا من المجموعة $\mathbb{R}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\, e^{-x^2} + (4x)\left(-2x\, e^{-x^2}\right) \\ &= (1-2x^2)\left(4\, e^{-x^2}\right) \end{aligned}$$

و بما أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ 4\, e^{-x^2} > 0$

فإن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(1-2x^2)$.

إذا كان : $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن : $f'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن : $f'(x) < 0$

إذا كان : $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن : $f'(x) > 0$

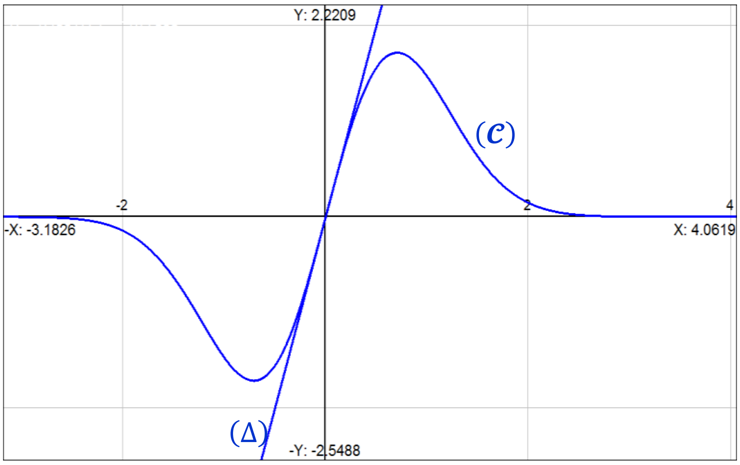
و نلخص النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
f	0 ↗	$2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	↘ 0

التمرين الرابع | I | 3 |

معادلة المماس لـ $(\mathcal{C})$ في O هي : $(\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

أي : $(\Delta) : y = 4x \; ; \; x \geq 0$



التمرين الرابع | I | 4 |

لاحظ أن : $\left(e^{-x^2}\right)' = -2x\, e^{-x^2}$ يعني : $-2\left(e^{-x^2}\right)' = 4x\, e^{-x^2}$

إذن :

$$a = \int_0^1 \left(4x\, e^{-x^2}\right) dx = -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$
$$= -2(e^{-1} - 1) = 2(1 - e^{-1})$$

مساحة الحيز (S) تقاس باستعمال التكامل التالي :

$$S = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$
$$= \int_0^1 f(x)\, dx \; ; \; car \;\; f(x) \geq 0$$
$$= 2(1 - e^{-1})\,(unité)^2 = 2(1 - e^{-1})\,(2\; cm)^2$$
$$= 8(1 - e^{-1})\; cm^2$$

التمرين الرابع | II | 1 | أ

ليكن x عددا حقيقيا أكبر قطعا من 1 :

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow -x^2 < -x \Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$$

إذن : $(\forall x > 1) \; ; \; e^{-x^2} < e^{-x}$

التمرين الرابع | II | 1 | ب

لدينا : $(\forall x > 1) \; ; \; 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$.

إذن : $(\forall x > 1) \; ; \; 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} (x^n\, e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} x^n\, e^{\frac{-nx}{n}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x\, e^{\frac{-x}{n}}\right)^n$$
$$= \lim_{\substack{u\to-\infty \\ u=\frac{-x}{n}}} \left(-n\, \underbrace{ue^u}_{0^-}\right)^n = 0$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 1) \; ; \; \boxed{\underbrace{0}_{0} < 4x^n\, e^{-x^2} < \underbrace{4x^n\, e^{-x}}_{0}}$$

و منه حسب خاصيات النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(4x^n\, e^{-x^2}\right) = 0}$$

أي : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0}$

التمرين الرابع | II | 2 | ب

لدينا : $f_n'(x) = 4e^{-x^2}\, x^{n-1}(n - 2x^2)$

بما أن : $(\forall n > 1) \; ; \; (\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; : \; 4\, e^{-x^2}\, x^{n-1} \geq 0$

فإن إشارة $f_n'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(n - 2x^2)$.

إذا كان $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن : $f_n'(x) = 0$

إذا كان $x > \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن : $f_n'(x) < 0$

إذا كان $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$ فإن : $f_n'(x) > 0$

و لدينا :

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0}\left(4x^n\, e^{-x^2}\right) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \end{cases}$$

نجمع إذن النتائج في الجدول التالي :

x	0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	$\searrow$	0

التمرين الرابع | II | 3 |

لنبين في البداية أن : $[0,1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

$$x \,\epsilon\, [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq 2x^2 \leq n \; , car \;\; 0 \leq 2 \leq n$$
$$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq \frac{n}{2}$$
$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \Rightarrow x \,\epsilon \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$$

إذن : $\boxed{x \,\epsilon\, [0,1] \Rightarrow x \,\epsilon \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]}$

يعني : $[0,1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$

نعلم أن f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

إذن f_n متصلة و تزايدية قطعا على $[0,1]$ لأن $[0,1] \subset \left[0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

و بالتالي f_n تقابل من المجال $[0,1]$ نحو صورته $\left[0, \frac{4}{e}\right]$.

نضع : $g_n(x) = f_n(x) - 1$

إذن g_n تقابل من المجال $[0,1]$ نحو صورته $g_n(\,[0,1]\,)$.

$$g_n(\,[0,1]\,) = [g_n(0)\,;\, g_n(1)] = \left[0 - 1\,;\, \frac{4}{e} - 1\right]$$
$$= \left[-1\,;\, \frac{4-e}{e}\right] \approx [-1\,;0{,}4]$$

يعني أن g_n تقابل من المجال $[0,1]$ نحو المجال $[-1\,;0{,}4]$.

و بما أن : $0 \,\epsilon\, [-1\,;0{,}4]$. فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا u_n من المجال $[0;1]$ بالتقابل g_n حيث $g_n(u_n) = 0$.

لدينا : $g_n(0) = -1 \neq 0$ و $g_n(1) = \frac{4-e}{e} \neq 0$

إذن $u_n \neq 0$ و $u_n \neq 1$

و بالتالي 0 يمتلك سابقا وحيدا u_n من $]0;1[$ حيث $g_n(u_n) = 0$.

أي : $\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0;1[\; ; \; g_n(u_n) = 0$

أي : $\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0;1[\; ; \; f_n(u_n) = 1$

التمرين الرابع II 4 أ

$$f_n(x) = 4x^n\, e^{-x^2} \Rightarrow f_{n+1}(x) = 4x^{n+1}\, e^{-x^2} \Rightarrow f_{n+1}(x) = x\left(4x^n\, e^{-x^2}\right) \Rightarrow f_{n+1}(x) = x\, f_n(x)$$

إذن من أجل $x = u_n$ نحصل على : $f_{n+1}(u_n) = u_n\, f_n(u_n)$

و نعلم أن : $f_n(u_n) = 1$. إذن : $f_{n+1}(u_n) = u_n \cdot 1 = u_n$.

التمرين الرابع II 4 ب

لدينا : $u_n \in \,]0,1[\;\Rightarrow\; u_n < 1$

$$\Rightarrow f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$$

$$\Rightarrow f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(u_n)\right) < f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(u_{n+1})\right) \text{ ,avec } f_{n+1}^{-1} \nearrow$$

$$\Rightarrow u_n < u_{n+1} \;;\; (\forall n \geq 2)$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n\geq 2} \; est \; croissante$$

$$\Rightarrow (u_n)_{n\geq 2} \; est \; convergente \; car \; u_n < 1$$

التمرين الرابع II 5 أ

لدينا : $(\forall n \geq 2) \;;\; 0 < u_n < 1$

إذن : $0 < \lim_\infty (u_n) \leq 1$. يعني : $0 < l \leq 1$.

المتتالية $(u_n)_{n>2}$ تزايدية و مكبورة إذن يستحيل أن تكون نهايتها الصفر

و هذا ما يبرر الكتابة $0 < l \leq 1$. و هذه النهاية يمكن أن تساوي 1

الذي ليس قيمة من قيمها لأنها تزايدية .

و في هذه الحالة نقول بأن العدد 1 محد علوي للمجموعة $\{u_n \;;\; n \geq 2\}$

التمرين الرابع II 5 ب

لدينا : $f_n(u_n) = 1 \Rightarrow 4(u_n)^n\, e^{-(u_n)^2} = 1 \Rightarrow e^{(u_n)^2} = 4(u_n)^n$

من جهة أخرى لدينا : $0 < u_n < 1 \Rightarrow 0 < (u_n)^2 < 1$

$$\Rightarrow 1 < e^{(u_n)^2} < e$$

$$\Rightarrow 1 < 4(u_n)^2 < e$$

$$\Rightarrow \ln 1 < \ln(4(u_n)^2) < \ln e$$

$$\Rightarrow 0 < \ln 4 + n\ln(u_n) < 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1 - \ln 4}{n}$$

التمرين الرابع II 5 ج

لدينا : $\underbrace{\left(\frac{-\ln 4}{n}\right)}_{n\infty \to 0} < \ln(u_n) < \underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}\right)}_{n\infty \to 0}$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim_{n\infty}(\ln(u_n)) = 0$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{\ln(u_n)} = e^0 = 1$

و بالتالي : $\lim_{n\infty}(u_n) = 1$

التمرين الخامس 1

لدينا : $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\, dt$

نضع : $y = -t$ إذن : $dt = -dy$

إذا كان $t = -x$ فإن : $y = x$.

إذا كان $t = -2x$ فإن : $y = 2x$.

إذن :

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\, dt = \int_{x}^{2x} \frac{-1}{\ln(1+y^2)}\, dy = -\int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+y^2)}\, dy = -F(x)$$

إذن F دالة فردية .

التمرين الخامس 2 أ

$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\, dt \quad : \quad x > 0$$

$$= \int_{x}^{1} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\, dt + \int_{1}^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\, dt$$

$$= -\int_{1}^{x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\, dt + \int_{1}^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\, dt$$

$$= -\varphi(x) + \varphi(2x)$$

إذن : $\boxed{F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)}$

التمرين الخامس 2 ب

لدينا : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

نلاحظ أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

و ذلك لأن الدالة $x \longrightarrow \frac{1}{\ln(1+x^2)}$ متصلة. و φ دالة من دوالها الأصلية

على هذا المجال . و لدينا : $\varphi'(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا كذلك $x \longrightarrow \varphi(2x)$ دالة قابلة للاشتقاق لأنها عبارة عن مُركب

دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و بالتالي : F قابلة للاشتقاق لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق .

و لدينا : $F'(x) = \left(\varphi(2x) - \varphi(x)\right)' = 2\varphi'(x) - \varphi'(x)$

$$= \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}$$

$$= \frac{\ln((1+x^2)^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x}\right)}{\ln(1+4x^2)\cdot\ln(1+x^2)}$$

التمرين الخامس 2 ج

لدينا : $x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 > 1 \\ 1+4x^2 > 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln(1+x^2) > 0 \\ \ln(1+4x^2) > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln(1+4x^2)\cdot\ln(1+x^2) > 0$$

إذن إشارة $F'(x)$ تتعلق فقط بإشارة الكمية $\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)$.

لنحل المعادلة : $\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^2+1 = 1+4x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2}$$

ندرس تغيرات الدالة F على إذن نهتم بالحالة $x=\sqrt{2}$.

إذا كان : $x=\sqrt{2}$ فإن : $F'(x)=0$

إذا كان : $x>\sqrt{2}$ فإن : $F'(x)>0$

إذا كان : $x<\sqrt{2}$ فإن : $F'(x)<0$

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
F	$\lim\limits_{x\to0^+}F(x) \searrow$	$F(\sqrt{2})$	$\nearrow \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

التمرين الخامس 3 أ

ليكن $x>0$ إذن $2x>0$. و منه $[x,2x]\subset\,]0,+\infty[$.

نعلم أن φ متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

إذن : φ متصلة على المجال $[x,2x]$.

و كذلك φ قابلة للاشتقاق على المجال $]x,2x[$.

و منه حسب مبرهنة التزايدات النتهية :

$$\exists\, c \in\,]x,2x[\;;\;\left(\frac{\varphi(2x)-\varphi(x)}{2x-x}\right)=\varphi'(c)$$

يعني : $\exists\, c\in\,]x,2x[\;;\;\varphi(2x)-\varphi(x)=x\,\varphi'(c)$

أي : $\exists\, c\in\,]x,2x[\;;\;F(x)=\dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$

التمرين الخامس 3 ب

$$0<x<c<2x \;\Rightarrow\; 0<x^2<c^2<4x^2$$
$$\Rightarrow\; 0<\ln(1+x^2)<\ln(1+c^2)<\ln(1+4x^2)$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{\ln(1+4x^2)}<\frac{1}{\ln(1+c^2)}<\frac{1}{\ln(1+x^2)}$$
$$\Rightarrow\; \frac{x}{\ln(1+4x^2)}<F(x)<\frac{x}{\ln(1+x^2)}\;;\;x>0$$

التمرين الخامس 3 ج

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\left(\frac{\ln x}{x}\right)+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)=+\infty$$
$$"="\frac{1}{2(0^+)+(0^+)(0)}$$

و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+4x^2)}=\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=2x}}\frac{\frac{t}{2}}{\ln(1+t^2)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{\ln(1+t^2)}\right)=+\infty$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)}\right)}_{\substack{x\to+\infty\\ \to\,+\infty}}<F(x)<\underbrace{\left(\frac{x}{\ln(1+x^2)}\right)}_{\substack{x\to+\infty\\ \to\,+\infty}}$$

و في الواقع نحتاج إلى المتفاوتة اليسرى فقط .

$$\underbrace{\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)}\right)}_{\substack{x\to+\infty\\ \to\,+\infty}}<F(x)$$

و نستنتج حسب خاصيات النهايات و الترتيب ما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\ln(1+x^2)}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+0^2)}{x-0}\right)}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\dfrac{k(x)-k(0)}{x-0}\right)}\;;\;k(x)=\ln(1+x^2)$$
$$=\lim_{t\to k'(0)}\left(\frac{1}{t}\right)\;;\;avec\;\;t=\left(\frac{k(x)-k(0)}{x-0}\right)$$
$$=\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t}\right)\;;\;avec\;\;k'(0)=\frac{2\times0^+}{1+(0^+)^2}=0^+$$
$$=+\infty$$

و لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{t}{2}}{\ln(1+t^2)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{t}{\ln(1+t^2)}\right)=+\infty$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)}\right)}_{\substack{x\to0^+\\ \to\,+\infty}}<F(x)<\underbrace{\left(\frac{x}{\ln(1+x^2)}\right)}_{\substack{x\to0^+\\ \to\,+\infty}}$$

و في الواقع نحتاج فقط إلى المتفاوتة اليسرى .

$$\underbrace{\left(\frac{x}{\ln(1+4x^2)}\right)}_{\substack{x\to0^+\\ \to\,+\infty}}<F(x)$$

و منه حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=+\infty$

و من جهة ثانية لدينا من أجل $x>0$.

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\ln(1+4x^2)}\right)}_{\substack{x\to+\infty\\ \to\,0}}<\frac{F(x)}{x}<\underbrace{\left(\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right)}_{\substack{x\to+\infty\\ \to\,0}}$$

إذن حسب خاصيات النهايات و التأطير نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$

3 د التمرين الخامس

لدينا : $(\forall x > 0)\ ;\ F(x) < \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$

و لدينا : $\sqrt{e-1} \approx 1{,}31 > 0$

إذن : $F(\sqrt{e-1}) < \dfrac{\sqrt{e-1}}{\ln\big(1+(e-1)\big)}$

يعني : $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1} \quad (1)$

و لدينا كذلك : $(\forall x > 0)\ ;\ F(x) > \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$

و لدينا كذلك : $\frac{\sqrt{e-1}}{2} \approx 0{,}65 > 0$

إذن : $$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{4(e-1)}{4}\right)}$$

إذن : $$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) \quad (2)$$

نضع : $G(x) = F(x) - x$

من (1) و (2) نستنتج أن : $G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)\cdot G(\sqrt{e-1}) < 0$

و لدينا F دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$.

إذن G دالة متصلة على أي مجال يوجد ضمن $]0,+\infty[$.

و بالخصوص على المجال $\left]\frac{\sqrt{e-1}}{2}, \sqrt{e-1}\right[$.

نستنتج إذن حسب مبرهنة القيم الوسطية (TVI) وجود حل وحيد للمعادلة

في المجال $\left]\frac{\sqrt{e-1}}{2}, \sqrt{e-1}\right[$.

يعني أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]\frac{\sqrt{e-1}}{2}, \sqrt{e-1}\right[$.

و باستعمال رتابة الدالة F نستنتج أن هذا الحل وحيد في $]0,+\infty[$ بأكمله

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول 1

لتكن $M(x)$ و $M(y)$ مصفوفتين من E .

$$M(x)\times M(y) = \begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\y&1&0\\y^2&2y&1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\(x+y)&1&0\\(x+y)^2&2(x+y)&1\end{pmatrix}$$
$$= M(x+y)\in E$$

إذن : $\forall\ M(x),M(y)\in E\ ;\ M(x)\times M(y)\in E$

و بالتالي E جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول 2 أ

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$.

$$\varphi(x)\times\varphi(y) = M(x)\times M(y) = M(x+y) = \varphi(x+y)$$

إذن : $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}\ ;\ \varphi(x+y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

ليكن $M(y)$ عنصرا من E . و لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $\varphi(x)=M(y)$

$$\varphi(x)=M(y) \Leftrightarrow M(x)=M(y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\y&1&0\\y^2&2y&1\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow x=y$$

إذن المعادلة $\varphi(x)=M(y)$ تقبل حلا وحيدا و هو العدد الحقيقي y .

و بتعبير آخر : $(\forall M(y)\epsilon E),(\exists!\,x=y\,\epsilon\,E)\ ;\ \varphi(x)=M(y)$

يعني أن φ تقابل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

التمرين الأول 2 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يحولها إلى مجموعة الوصول . إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(E,\times)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{R},+)$ و ذلك عبر التشاكل التقابلي φ .

لدينا $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $+$ هو 0

و كل عنصر x من $\mathbb{R}$ يقبل $(-x)$ كمماثل

إذن $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو $\varphi(0)$

و كل عنصر $\varphi(x)$ من E يقبل $\varphi(-x)$ كمماثل

و لدينا : $\varphi(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$

و لدينا : $\varphi(-x)=M(-x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-x&1&0\\x^2&-2x&1\end{pmatrix}$

التمرين الأول 2 ج

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$Sym(x)=-x \Leftrightarrow \varphi(Sym(x))=\varphi(-x)$$
$$\Leftrightarrow Sym(\varphi(x))=\varphi(-x)$$
$$\Leftrightarrow Sym(M(x))=M(-x)$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-x&1&0\\x^2&-2x&1\end{pmatrix}$$

التمرين الأول 2 د

$$M(x+y)=M(x)\times M(y)$$
$$\Leftrightarrow M\Big(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n\ fois}\Big)=\underbrace{M(x)\times M(x)\times\cdots\times M(x)}_{n\ fois}$$
$$\Leftrightarrow M(nx)=\big(M(x)\big)^n$$
$$\Leftrightarrow A^5=\big(M(2)\big)^5=M(10)$$
$$\Leftrightarrow A^5X=M(10)X=B=M(12)$$
$$\Leftrightarrow M(10)X=M(12)$$
$$\Leftrightarrow \big(M(10)\big)^{-1}\times M(10)\times X=\big(M(10)\big)^{-1}\times M(12)$$
$$\Leftrightarrow X=\big(M(10)\big)^{-1}\times M(12)$$
$$\Leftrightarrow X=M(-10)\times M(12)$$
$$\Leftrightarrow X=M(2)\,\epsilon\,E$$

و بالتالي المعادلة $A^5X=B$ تقبل حلا وحيدا في E و هو المصفوفة $M(2)$.

التمرين الأول 3

نلاحظ في البداية أن F مجموعة غير فارغة لأنه بإمكاننا تحديد أحد عناصرها و هو $M(1)=M(\ln e)\,\epsilon\,F$

و لدينا كذلك $F\subset E$ لأن $\ln x\,\epsilon\,\mathbb{R}\ ;\ (\forall x>0)$.

ليكن $M(\ln x)$ و $M(\ln y)$ عنصرين من F .

$$M(\ln x)\times\big(M(\ln y)\big)^{-1}=M(\ln x)\times M(-\ln y)$$
$$=M(\ln x-\ln y)$$
$$=M\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}\Rightarrow \frac{x}{y}>0 \Rightarrow M\left(\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)\epsilon\,F$$
$$\Rightarrow M(\ln x)\times\big(M(\ln y)\big)^{-1}\ \epsilon\ F$$

إذن : $\forall\ M(\ln x),M(\ln y)\,\epsilon\,F\ ;\ M(\ln y)\times\big(M(\ln y)\big)^{-1}\,\epsilon\,F$

و بالتالي حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.

التمرين الثاني 1 أ

$$(E)\ :\ z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$$
$$\big(1+i(2-\sqrt{3})\big)^2-4i\big(1+i(2-\sqrt{3})\big)-2+2i\sqrt{3}$$
$$=1-(2-\sqrt{3})^2+2i(2-\sqrt{3})-4i+4(2-\sqrt{3})-2+2i\sqrt{3}$$
$$=(2-\sqrt{3})(-2+\sqrt{3}+2i+4)+1-4i-2+2i\sqrt{3}$$
$$=(2-\sqrt{3})\big((2+\sqrt{3})+2i\big)-1-2i(2-\sqrt{3})$$
$$=(2-\sqrt{3})\big((2+\sqrt{3})+2i-2i\big)-1$$
$$=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})-1$$
$$=\big(2^2-(\sqrt{3})^2\big)-1$$
$$=1-1=0$$

إذن $a=1+i(2-\sqrt{3})$ حل للمعادلة (E) .

التمرين الثاني 1 ب

نستعمل العلاقة بين مجموع جذري ثلاثية الحدود نحصل على :

$$a+b=\frac{4i}{1} \iff b=4i-1-i(2-\sqrt{3})$$
$$\iff b=-1+i(2+\sqrt{3})$$

التمرين الثاني 2 أ

$$a=1+i(2-\sqrt{3}) \Rightarrow a^2=1-(2-\sqrt{3})^2+2(2-\sqrt{3})$$
$$\Rightarrow a^2=-6+4\sqrt{3}+4i-2i\sqrt{3} \quad (*)$$

$$4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}=4(2-\sqrt{3})\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$=4(2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$
$$=-6+4\sqrt{3}+4i-2i\sqrt{3} \quad (**)$$

$$(*)\ et\ (**) \Rightarrow \boxed{a^2=4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}}$$

التمرين الثاني 2 ب

$$a=r\,e^{i\theta} \Rightarrow a^2=r^2e^{2i\theta}=4(2-\sqrt{3})e^{\frac{i\pi}{6}}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r^2=4(2-\sqrt{3}) \\ 2\theta\equiv\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} r=2\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \theta\equiv\frac{\pi}{12}\ [\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)e^{\frac{i\pi}{12}} \\ a=2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)e^{\frac{13i\pi}{12}} \end{cases}$$

بما أن : $2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)e^{\frac{i\pi}{12}}=1+i(2-\sqrt{3})$

و : $2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)e^{\frac{13i\pi}{12}}=-1-i(2-\sqrt{3})$

فإنه في النهاية نحصل على : $a=2\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)e^{\frac{i\pi}{12}}$

التمرين الثاني 3 أ

(Γ) قطر في $[AB]$ $\iff$ Ω منتصف $[AB]$

$$\iff z_\Omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{a+b}{2}=2i$$

التمرين الثاني 3 ب

نحسب أولا شعاع الدائرة (Γ) .

$$\frac{AB}{2}=\left|\frac{b-a}{2}\right|=\left|\frac{-1+i(2+\sqrt{3})-1-i(2-\sqrt{3})}{2}\right|$$
$$=\left|-1+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

و لدينا : $\Omega O=|z_O-z_\Omega|=|0-2i|=2$

و كذلك : $\Omega C=|z_c-z_\Omega|=\left|2i+2e^{\frac{i\pi}{7}}-2i\right|=\left|2e^{\frac{i\pi}{7}}\right|=2$

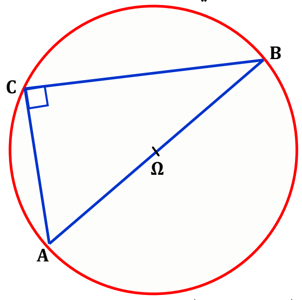
إذن : $O\Omega=\Omega C=\frac{AB}{2}=2$

و بالتالي O و C نقطتان من الدائرة (Γ) التي قطرها $[AB]$.

التمرين الثاني 3 ج

لدينا C نقطة من الدائرة (Γ) التي قطرها $[AB]$.

إذن المثلث ABC قائم الزاوية في C .

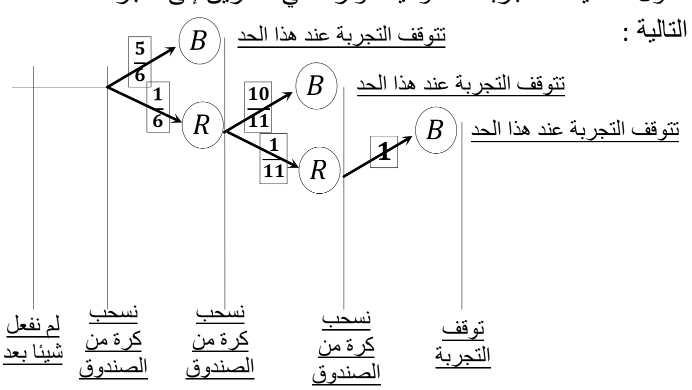


و منه : $\overline{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})}\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\iff \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$
$$\iff \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$
$$\iff \left(\frac{c-a}{c-b}\right)\in i\mathbb{R}$$

التمرين الثالث

نُحول معطيات التجربة العشوائية الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :



من خلال الشجرة نستنتج ما يلي :

السؤال أ) : $X(\Omega)=\{1;2;3\}$

السؤال ب) : $p[X=1]=\frac{5}{6}$

السؤال ج) : $p[X=2]=\frac{1}{6}\times\frac{10}{11}=\frac{5}{33}$

السؤال د) : $p[X=3]=1-p[X=1]-p[X=2]=\frac{1}{66}$

التمرين الثالث 2 أ

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3}k\times p[X=k]$$
$$=1\times p[X=1]+2\times p[X=2]+3\times p[X=3]$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{10}{33}+\frac{3}{66}=\frac{13}{11}$$

التمرين الثالث 2 ب

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{3}k^2\times p[X=k]$$
$$=1^2\times p[X=1]+2^2\times p[X=2]+3^2\times p[X=3]$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{20}{33}+\frac{9}{66}=\frac{52}{33}$$

إذن :
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{52}{33} - \left(\frac{13}{11}\right)^2 = \frac{65}{363}$$

التمرين الرابع I 1

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \left(\frac{1}{1-\ln(1-x)}\right) = \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=1-x}} \left(\frac{1}{1-\ln t}\right) = \lim_{\substack{r\to-\infty\\ r=\ln t}} \left(\frac{1}{1-r}\right) = \lim_{\substack{y\to+\infty\\ y=1-r}} \left(\frac{1}{y}\right) = 0 = f(1)$$

إذن f دالة متصلة على يسار العدد 1 .

التمرين الرابع I 2

$$\lim_{x\to1^-} \left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to1^-} \left(\frac{1}{(x-1)(1-\ln(1-x))}\right) = \lim_{x\to1^-} \left(\frac{1}{(x-1)\ln(1-x)-(1-x)}\right) = \lim_{\substack{u\to0^+\\ u=1-x}} \left(\frac{1}{u\ln u - u}\right) = \left(\frac{1}{0-0^+}\right) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 .

التمرين الرابع I 3

لدينا f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0,1[$ لأنها تشكيلة معرفة من دوال معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0,1[$.

ليكن x عنصرا من المجال $[0,1[$.

لدينا :
$$f'(x) = \frac{-(1-\ln(1-x))'}{(1-\ln(1-x))^2} = \frac{-1}{(1-x)(1-\ln(1-x))^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-x)$.

إذا كان $x<1$ فإن $f'(x)<0$

إذن f دالة تناقصية قطعا على المجال $[0,1[$.

نستنتج جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$ 1
$f'(x)$	$-$ ||
f	$1 \searrow 0$

التمرين الرابع I 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال $[0,1[$.

لدينا :
$$f''(x) = \frac{-\left((1-x)(1-\ln(1-x))^2\right)'}{\left((1-x)(1-\ln(1-x))^2\right)^2} = \frac{-(1-\ln(1-x))(1+\ln(1-x))}{\left((1-x)(1-\ln(1-x))^2\right)^2} = \frac{-(1-\ln(1-x))}{(1-x)^2(1-\ln(1-x))^3}$$

$$x \in [0,1[\implies x>1>1-e \implies x>1-e \implies e>1-x \implies 1>\ln(1-x) \implies 1-\ln(1-x)>0$$

إذن إشارة $f''(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(1+\ln(1-x))$.

لنحل المعادلة $1+\ln(1-x)$
$$\Leftrightarrow \ln(1-x)=-1 \Leftrightarrow (1-x)=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{e-1}{e}$$

إذن : $x=\left(\frac{e-1}{e}\right) \implies f''(x)=0$

و كذلك :
$$x>\left(\frac{e-1}{e}\right) \implies 1-x<e^{-1} \implies 1+\ln(1-x)<0 \implies f''(x)>0$$

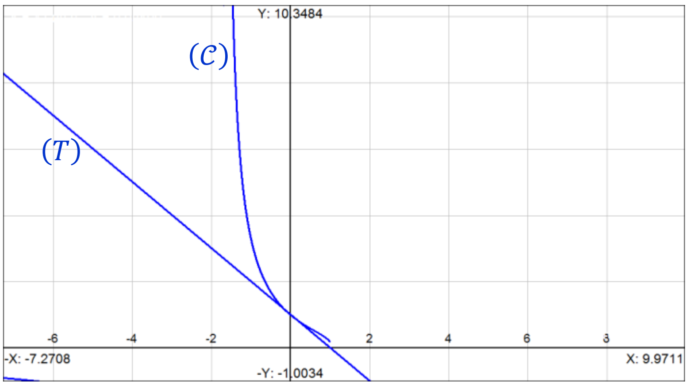
و كذلك :
$$x<\left(\frac{e-1}{e}\right) \implies 1-x>e^{-1} \implies 1+\ln(1-x)>0 \implies f''(x)<0$$

نستنتج إذن أن f'' تنعدم في النقطة ذات الأفصول $\left(\frac{e-1}{e}\right)$ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن النقطة ذات الأفصول $\left(\frac{e-1}{e}\right)$ هي نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى $(\mathcal{C})$.

التمرين الرابع I 4 ب

لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة ذات الأفصول 0 هي :
$$(T):\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$\Leftrightarrow (T):\ y=-x+1$$



التمرين الرابع I 5

لدينا f متصلة و تناقصية قطعا على I . نضع : $h(x)=f(x)-x$

لدينا : $h'(x)=f'(x)-1$

و نعلم أن : $\forall x \in [0,1[\ ;\ f'(x)<0$

إذن : $\forall x \in [0,1[\ ;\ f'(x)<1$

يعني : $\forall x \in [0,1[\ ;\ h'(x)<0$

إذن h متصلة و تناقصية قطعا على المجال I .

و منه h تقابل من المجال I نحو صورته $h(I)$.

$$h(I)=h(\,[0,1]\,)=[h(1),h(0)]=[-1,1]$$

إذن h تقابل من المجال $[0,1]$ نحو المجال $[-1;1]$.

و بما أن : $0 \in [-1;1]$. فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا α من المجال I بالتقابل h .

يعني : $(\exists!\ \alpha \in I)\ ;\ h(\alpha)=0$.

أي : $(\exists!\ \alpha \in I)\ ;\ f(\alpha)=\alpha$

التمرين الرابع I 6 أ

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال I .

إذن f تقابل من المجال I نحو صورته $f(I)$.

و لدينا : $f(I)=f([0,1])=[f(1),f(0)]=[0,1]=I$

إذن f تقابل من المجال $[0,1]$ نحو المجال $[0,1]$.

ليكن x و y عنصرين من المجال I حيث $y=f(x)$.

$$\begin{aligned}
y=f(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln(1-x)}=y\\
&\Leftrightarrow 1-\ln(1-x)=\frac{1}{y}\\
&\Leftrightarrow \ln(1-x)=\left(1-\frac{1}{y}\right)\\
&\Leftrightarrow (1-x)=e^{\left(\frac{y-1}{y}\right)}\\
&\Leftrightarrow x=1-e^{\left(\frac{y-1}{y}\right)}\\
&\Leftrightarrow f^{-1}(y)=1-e^{\left(\frac{y-1}{y}\right)}
\end{aligned}$$

إذن f تقابل من المجال $[0,1]$ نحو المجال $[0,1]$. و تقابله العكسي

f^{-1} معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}\ :\ &[0,1]\longrightarrow[0,1]\\ &y\longrightarrow 1-e^{\left(\frac{y-1}{y}\right)}\end{aligned}}$$

التمرين الرابع II 1

$$\begin{aligned}
t\in[0,1] &\Rightarrow t\le 1\\
&\Rightarrow t^n\times t\le t^n\times 1\ ;\ t^n>0\\
&\Rightarrow t^{n+1}\le t^n\\
&\Rightarrow f(t)\times t^{n+1}\le f(t)\times t^n\ ;\ f(t)>0\\
&\Rightarrow \int_0^1 (f(t)\times t^{n+1})\,dt\le\int_0^1(f(t)\times t^n)\,dt
\end{aligned}$$

$car\ t\longrightarrow t^n f(t)\ est\ continue\ et\ 0<1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow I_{n+1}\le I_n\ ;\ (\forall n\ge 0)\\
&\Rightarrow (I_n)_{n\ge 0}\ est\ une\ suite\ décroissante
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t\ge 0 &\Rightarrow t^n f(t)\ge 0\ ;\ avec\ \ f(t)>0\\
&\Rightarrow \int_0^1 (t^n f(t))\,dt\ge 0
\end{aligned}$$

$car\ t\longrightarrow t^n f(t)\ est\ continue\ et\ 0<1$

$\Rightarrow (\forall n\ge 0)\ ;\ I_n\ge 0\quad (*)$

$\Rightarrow$ $(I_n)_{n\ge 0}$ متتالية مصغورة بـ 0

بما أن $(I_n)_{n\ge 0}$ متتالية تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة

و نهايتها هي عدد حقيقي l .

التمرين الرابع II 2

$$\begin{aligned}
t\in[0,1] &\Rightarrow -t\le 0\ \Rightarrow\ 1-t\le 1\\
&\Rightarrow 1-\ln(1-t)\ge 1\\
&\Rightarrow \frac{1}{1-\ln(1-t)}\le 1\\
&\Rightarrow \frac{t^n}{1-\ln(1-t)}\le t^n\ ;\ t^n>0\\
&\Rightarrow \int_0^1\left(\frac{t^n}{1-\ln(1-t)}\right)dt\le\int_0^1(t^n)\,dt
\end{aligned}$$

$car\ les\ deux\ fonctions\ sont\ continues$
$et\ que\ \ 0<1$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow I_n\le\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\\
&\Rightarrow I_n\le\frac{1}{n+1}\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N})\\
&\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{1}{n+1}\ ;\ d'après(*)\\
&\Rightarrow \underset{n\infty}{\underset{\searrow}{0}}\le I_n\le\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\underset{n\infty}{\searrow}0}\\
&\Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(I_n)=0}\ ;\ \left(\begin{aligned}&d'après\ le\ critère\\&de\ comparaison\end{aligned}\right)
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 1

القاعدة التي سوف نستعملها في هذا السؤال هي :

$$\boxed{(\forall t\neq 1)\ ;\ \sum_{k=0}^{n}t^k=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}}$$

و تُعبر عن مجموع حدود متتابعة من المتتالية الهندسية $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
F(x)-S_n(x) &= \int_0^x\left(\frac{f(t)}{1-t}\right)dt-\sum_{k=0}^{n}F_k(x)\\
&=\int_0^x\left(\frac{f(t)}{1-t}\right)dt-\sum_{k=0}^{n}\int_0^x t^k f(t)\,dt\\
&=\int_0^x\left(\frac{f(t)}{1-t}\right)dt-\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{n}t^k f(t)\right)dt\\
&=\int_0^x\left(\frac{f(t)}{1-t}\right)dt-\int_0^x\left(f(t)\sum_{k=0}^{n}t^k\right)dt\\
&=\int_0^x\left(\frac{f(t)}{1-t}\right)dt-\int_0^x\left(f(t)\left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right)\right)dt\\
&=\int_0^x\left(\frac{f(t)-(1-t^{n+1})f(t)}{1-t}\right)dt\\
&=\boxed{\int_0^x\left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\right)dt}\quad(\star)
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 2 أ

نضع : $\psi(x) = (1-x)(1-\ln(1-x))$

لدينا : $\psi'(x) = -(1-\ln(1-x)) + \dfrac{1-x}{1-x} = \ln(1-x)$

$$x \in J \Rightarrow x > 0 \Rightarrow -x < 0$$
$$\Rightarrow 1 - x < 1$$
$$\Rightarrow \ln(1-x) < 0$$
$$\Rightarrow \psi'(x) < 0$$
$$\Rightarrow \psi \text{ est décroissante sur } J$$

التمرين الرابع III 2 ب

نضع : $\varphi(t) = \dfrac{f(t)}{1-t}$

نلاحظ في البداية أن : $\dfrac{1}{\psi(t)} = \dfrac{f(t)}{1-t} = \varphi(t)$

ليكن t_1 و t_2 عنصرين من المجال $[0,x]$ مع $x \in J$.

$$t_1 > t_2 \Rightarrow \psi(t_1) < \psi(t_2) \text{ car } \psi \text{ est } \searrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\psi(t_1)} > \frac{1}{\psi(t_2)} \ ; \ \text{passage à l'inverse}$$
$$\Rightarrow \varphi(t_1) > \varphi(t_2)$$

$Donc$: $\boxed{t_1 > t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) > \varphi(t_2)}$

و بالتالي φ دالة تزايدية قطعا على المجال J .

التمرين الرابع III 3 أ

$$t > 0 \Rightarrow 1 - t < 1 \Rightarrow 1 - \ln(1-t) > 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1-\ln(1-t)} < 1$$
$$\Rightarrow f(t) < 1$$
$$\Rightarrow \boxed{t^{n+1} f(t) < t^{n+1}} \quad (1)$$

$$0 \le t \le x \Rightarrow -x \le -t \le 0$$
$$\Rightarrow 1 - x \le 1 - t \le 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} \ge \frac{1}{1-t} \ge 1$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1-t} \le \frac{1}{1-x}} \quad (2)$$

$$(1)\times(2) \Rightarrow \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \le \frac{t^{n+1}}{1-x}$$
$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\right) dt \le \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^x$$
$$\Rightarrow \boxed{\int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\right) dt \le \frac{1}{1-x}\left(\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)} \quad (3)$$

$$x < 1 \Rightarrow \left(\frac{x^{n+2}}{n+2}\right) < \frac{1}{n+2}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{x^{n+2}}{n+2}\right) \le \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{n+2}\right)$$
$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\right) dt \le \left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
$$\overset{(\star)}{\Rightarrow} \boxed{F(x) - S_n(x) \le \left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)} \quad (\blacksquare)$$

$$x > 0 \Rightarrow 1 < \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \ge 0$$
$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\right) dt \ge 0$$
$$\overset{(\star)}{\Rightarrow} F(x) - S_n(x) \ge 0 \quad (\blacksquare\blacksquare)$$

من النتيجتين $(\blacksquare)$ و $(\blacksquare\blacksquare)$ نستنتج التأطير التالي :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall x \in J \end{pmatrix} \ ; \ 0 \le F(x) - S_n(x) \le \left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

التمرين الرابع III 3 ب

من خلال السؤال السابق نستنتج الوضعية التالية .

$$(\forall x \in J) \ ; \ \underset{\underset{0}{\downarrow n\infty}}{0} \le F(x) - S_n(x) \le \underbrace{\left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\underset{0}{\downarrow n\infty}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(\forall x \in J) \ ; \ \lim_{n\infty}\big(F(x) - S_n(x)\big) = 0$$

يعني : $(\forall x \in J) \ ; \ \lim_{n\infty} S_n(x) = F(x)$

التمرين الرابع III 4 أ

$$\begin{cases} x \in J \\ t \in [0,x] \end{cases} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{1-\ln(1-t)}$$
$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-1}{(1-t)(1-\ln(1-t))}$$
$$\Rightarrow \frac{-f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \frac{f(t)}{1-t} = \varphi(t)$$
$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{f(t)}{1-t}\right) dt = -\int_0^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right) dt$$
$$\Rightarrow F(x) = -[\ln|f(t)|]_0^x$$
$$\Rightarrow F(x) = -[\ln(f(t))]_0^x \ ; \ car \ f(t) > 0$$
$$\Rightarrow F(x) = -\big(\ln(f(x)) - \ln(f(0))\big)$$
$$\Rightarrow F(x) = -(-\ln(1-\ln(1-x)) - \ln 1)$$
$$\Rightarrow F(x) = \ln(1-\ln(1-x))$$

التمرين الرابع III 4 ب

$$\lim_{x\to1^-} F(x) = \lim_{x\to1^-} \ln(1-\ln(1-x))$$
$$= \lim_{\substack{t\to0^+ \\ t=1-x}} \ln(1-\ln t)$$
$$= \lim_{\substack{r\to-\infty \\ r=\ln t}} \ln(1-r)$$
$$= \lim_{\substack{y\to+\infty \\ y=1-r}} \ln y = +\infty$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{x\to1^-} F(x) = +\infty}$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2011

التمرين الأول I 1

سوف نستعمل البرهان بالترجع :

من أجل $k=0$ لدينا $A^{2\cdot 0}=A^0=I$.

إذن العبارة صحيحة من أجل $k=0$.

ليكن k عنصرا من $\mathbb{N}$.

و نفترض أن $A^{2k}=I$ لدينا :

$$\begin{aligned} A^{2(k+1)} &= A^{2k}\times A^2 \\ &= I\times A^2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

إذن : $A^{2(k+1)}=I$.

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل $(k+1)$.

و بالتالي حسب مبدأ الترجع نستنتج أن : $A^{2k}=I \;;\; (\forall k\in\mathbb{N})$

التمرين الأول I 2

لتكن A مصفوفة من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

لدينا : $A^{2k}=I \;;\; (\forall k\in\mathbb{N})$

إذن من أجل $k=1$ لدينا : $A^2=A\times A=I$

و هذا يعني أن المصفوفة A قابلة للقلب و مقلوبها هو المصفوفة نفسها

إذن : $A^{-1}=A$.

التمرين الأول II 1 أ

$$\begin{aligned} x,y \in \left]\alpha;+\infty\right[= I &\Rightarrow y>\alpha \;\; et \;\; x>\alpha \\ &\Rightarrow (y-\alpha)>0 \;\; et \;\; (x-\alpha)>0 \\ &\Rightarrow (x-\alpha)(y-\alpha)>0 \\ &\Rightarrow (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha>\alpha \\ &\Rightarrow x*y>\alpha \\ &\Rightarrow x*y \in \left]\alpha;+\infty\right[= I \end{aligned}$$

حصلنا إذن على الإستلزام التالي : $(x,y)\in I^2 \Rightarrow x*y \in I$

و بالتالي $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

التمرين الأول II 1 ب

التبادلية :

$$\begin{aligned} (x,y)\in I^2 \Rightarrow x*y &= (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha \\ &= (y-\alpha)(x-\alpha)+\alpha \\ &= y*x \end{aligned}$$

إذن $*$ تبادلي في المجموعة I .

التجميعية :

$$\begin{aligned} (x,y,z)\in I^3 \Rightarrow x*(y*z) &= x*\big((y-\alpha)(z-\alpha)+\alpha\big) \\ &= (x-\alpha)\big((y-\alpha)(z-\alpha)+\alpha-\alpha\big)+\alpha \\ &= (x-\alpha)(yz-y\alpha-\alpha z+\alpha^2)+\alpha \end{aligned}$$

$$= xyz-xy\alpha-xz\alpha+\alpha^2x-yz\alpha+\alpha^2y+\alpha^2z-\alpha^3+\alpha$$

$$= xyz-\alpha(xy+xz+yz)+\alpha^2(x+y+z)-(\alpha^3-\alpha) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (x,y,z)\in I^3 \Rightarrow (x*y)*z &= \big((x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha\big)*z \\ &= \big((x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha-\alpha\big)(z-\alpha)+\alpha \\ &= (xy-x\alpha-\alpha y+\alpha^2)(z-\alpha)+\alpha \end{aligned}$$

$$= xyz-\alpha(xy+xz+yz)+\alpha^2(x+y+z)-(\alpha^3-\alpha) \quad (2)$$

$(1)=(2) \Rightarrow x*(y*z)=(x*y)*z$

$\Rightarrow$ $*$ قانون تجميعي في I

التمرين الأول II 1 ج

ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x*e=e*x=x \\ &\Rightarrow xe-x\alpha-\alpha e+\alpha^2=x-\alpha \\ &\Rightarrow e(x-\alpha)=x-\alpha^2+\alpha x-\alpha \\ &\Rightarrow e(x-\alpha)=(x-\alpha)(1+\alpha) \\ &\Rightarrow e=(1+\alpha) \;;\; avec \;\; x>\alpha \\ &\Rightarrow e=(1+\alpha)>\alpha \\ &\Rightarrow e=(1+\alpha)\in I \end{aligned}$$

و بالتالي $(1+\alpha)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I .

التمرين الأول II 2

لقد حصلنا من خلال ما سبق على المعلومات التالية :

- $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I .
- $*$ تبادلي و تجميعي في المجموعة I .
- $*$ يقبل عنصرا محايدا في I و هو $(1+\alpha)$

إذن لكي تكون $(I,*)$ زمرة تبادلية يكفي أن يقبل كل عنصر من I مماثلا بالقانون $*$. ليكن x عنصرا من المجموعة I .

نقول بأن y هو مماثل x بالنسبة لـ $*$ في I

إذا وفقط إذا كان $x*y=y*x=(1+\alpha)$

$$\begin{aligned} x*y=(1+\alpha) &\Leftrightarrow (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha=(1+\alpha) \\ &\Leftrightarrow xy-\alpha x-\alpha y+\alpha^2=1 \\ &\Leftrightarrow y(x-\alpha)=1+\alpha(x-\alpha) \\ &\Leftrightarrow y=\frac{1}{(x-\alpha)}+\alpha>\alpha \;;\; car \;\; \frac{1}{x-\alpha}>0 \\ &\Leftrightarrow y=\left(\frac{1}{(x-\alpha)}+\alpha\right)\in I \end{aligned}$$

و بالتالي كل عنصر x يقبل مماثلا في I بالقانون $*$ و هو العنصر $\left(\frac{1}{x-\alpha}+\alpha\right)$.

خلاصة : $\boxed{(I,*) \text{ زمرة تبادلية .}}$

التمرين الأول II 3 أ

التشاكل : ليكن x و y عنصرين من المجموعة I .

$$\varphi(x*y)=\frac{1}{(x*y)-\alpha}=\frac{1}{(x-\alpha)(y-\alpha)}=\varphi(x)\times\varphi(y)$$

حصلنا إذن على ما يلي : $\forall\,(x,y)\in I^2 \;;\; \varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

إذن φ تشاكل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

التقابل : ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \varphi(x)=y &\Leftrightarrow \frac{1}{x-\alpha}=y \\ &\Leftrightarrow x=\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right) \\ &\Leftrightarrow x=\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)>\alpha \;;\; (facile) \end{aligned}$$

نلاحظ أن المعادلة $\varphi(x)=y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا من I و هو $\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)$

أو بتعبير آخر :

$$\boxed{(\forall\, y\in\mathbb{R}_+^*),\left(\exists!\, x=\left(\frac{1+\alpha y}{y}\right)\in I\right) \;;\; \varphi(x)=y}$$

و هذا يعني أن φ تقابل من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

التمرين الأول — II 3 ب

$$x^{(3)} = \alpha^3 + \alpha \iff x * x * x = \alpha^3 + \alpha$$
$$\iff \varphi(x * x * x) = \varphi(\alpha^3 + \alpha)$$
$$\iff \varphi(x) \times \varphi(x) \times \varphi(x) = \varphi(\alpha^3 + \alpha)$$
$$\iff \left(\frac{1}{x-\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{x-\alpha}\right) \times \left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^3}$$
$$\iff \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^3 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3$$
$$\iff \left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^3 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = 0$$
$$\iff \left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)\left(\underbrace{\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^2}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}_{>0}\right) = 0$$
$$\iff \left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) = 0$$
$$\iff \frac{\alpha - x + \alpha}{\alpha(x-\alpha)} = 0$$
$$\iff 2\alpha - x = 0$$
$$\iff x = 2\alpha$$
$$\iff x = 2\alpha > \alpha \; ; \; car \;\; \alpha > 0$$
$$\iff x = 2\alpha \,\epsilon\,]\alpha, +\infty[= I$$

و بالتالي : المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجموعة I و هو 2α .

التمرين الثاني — 1

لدينا :
$$\begin{cases} 1 \equiv 1\,[11] \\ 10^1 \equiv -1\,[11] \\ 10^2 \equiv 1\,[11] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 10^{2k} \equiv 1\,[11] \\ 10^{2k+1} \equiv 1\,[11] \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 10^{2009} \equiv 1\,[11] \end{cases}$$

عند المرور إلى المجموع بين أطراف هذه المتوافقات نحصل على :
$$1 + 10 + \cdots + 10^{2009} \equiv \left(\sum_{k=0}^{2009} (-1)^k\right) [11]$$

و لدينا :
$$\left(\sum_{k=0}^{2009} (-1)^k\right) = \left(\underset{k \text{ زوجي}}{\sum_{k=0}^{2009}} (-1)^k\right) + \left(\underset{k \text{ فردي}}{\sum_{k=0}^{2009}} (-1)^k\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{1004} (-1)^{2m} + \sum_{m=0}^{1004} (-1)^{2m+1}$$
$$= 1004 - 1004 = 0$$

إذن : $1 + 10 + \cdots + 10^{2009} \equiv 0\,[11]$

يعني : $N = \underset{2010\; fois}{\underbrace{111\cdots1}} \equiv 0\,[11]$

و بالتالي العدد 11 يقسم العدد N .

التمرين الثاني — 2 أ

يكفي أن نتحقق من أن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 لا تقسم العدد 2011 ، إذن 2011 عدد أولي .

و لدينا :
$$N = 1 + 10 + 10^1 + \cdots + 10^{2009}$$
$$= 10^0 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{2009}$$

إذن N هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 10 .

إذن : $N = \dfrac{10^{2010} - 1}{10 - 1}$ و بالتالي : $9N = 10^{2010} - 1$

التمرين الثاني — 2 ب

لدينا 2011 عدد أولي . و $10 \wedge 2011 = 1$.

إذن حسب $Fermat$: $10^{2011-1} \equiv 1\,[2011]$

يعني : $2011/(10^{2010} - 1)$. إذن : $2011/9N$

التمرين الثاني — 2 ج

بما أن $2011/9$ و $2011 \wedge 9 = 1$

فإنه حسب مبرهنة $Gauss$: $2011/N$

التمرين الثاني — 3

لدينا : $22121 = 11 \times 2011$

و لدينا كذلك حسب ما سبق : $2011/N$ و $11/N$.

إذن : $11 \times 2011/N$ لأن : $2011 \wedge 11 = 1$

و بالتالي : $22121/N$

التمرين الثالث — I 1

بتعويض z بالعدد $(2-m)$ في المعادلة (E_m) نحصل على الصفر .

إذن $(2-m)$ حل للمعادلة (E_m) .

التمرين الثالث — I 2 أ

نستعمل خاصية جداء حلي ثلاثية الحدود .

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \implies x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

$$z_1 z_2 = 1 \iff \frac{4 - im^2 - 2(1-i)m}{1} = 1$$
$$\iff 4 - im^2 - 2m + 2im = 1$$
$$\iff im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

التمرين الثالث — I 2 ب

لنحل المعادلة : $im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$

لدينا : $\Delta = 4(1-i)^2 + 12i = \left(\sqrt{2}(1+i)\right)^2$

$$\implies \begin{cases} m_1 = \dfrac{2(i-1) - \sqrt{2}(1+i)}{2i} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ m_2 = \dfrac{2(i-1) + \sqrt{2}(1+i)}{2i} = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

التمرين الثالث — II 1 أ

لتكن E صورة العدد العقدي 1 .

$$S(M) = M' \iff z' - 1 = -(z-1)$$
$$\iff z_{M'} - z_E = -(z_M - z_E)$$
$$\iff \overrightarrow{EM'} = -\overrightarrow{EM}$$
$$\iff E \text{ هي منتصف القطعة } [MM']$$

و بالتالي S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة E .

التمرين الثالث — II 1 ب

$$M'' = R(M) \Leftrightarrow (z_{M''} - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_M - z_\Omega)$$
$$\Leftrightarrow z'' - (1+i) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z-(1+i))$$
$$\Leftrightarrow z'' - (1+i) = i(z-1-i)$$
$$\Leftrightarrow z'' = iz - i + 1 + i + 1$$
$$\Leftrightarrow z'' = iz + 2$$

التمرين الثالث — II 2 أ

$$\begin{cases} z'' = iz+2 \\ z' - 1 = -(z-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{z''-2}{z'-2} = \frac{iz}{z} = i$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{z''-2}{z'-2} = i} \quad (*)$$
$$\Rightarrow \frac{z''-2}{z'-2} \in i\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \boxed{AM''M' \text{ قائم الزاوية في } A} \quad (1)$$

$$(*) \Rightarrow \left|\frac{z''-2}{z'-2}\right| = |i| = 1$$
$$\Rightarrow |z''-2| = |z'-2|$$
$$\Rightarrow AM'' = AM'$$
$$\Rightarrow \boxed{AM'M'' \text{ متساوي الساقين رأسه } A} \quad (2)$$

التمرين الثالث — II 2 ب

A و Ω و M' و M'' نقط متداورة $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{M''}-z_A}{z_{M'}-z_A}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{M''}-z_\Omega}{z_{M'}-z_\Omega}\right)$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z''-2}{z'-2}\right) \equiv \arg\left(\frac{z''-1-i}{z'-1-i}\right) [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{iz}{-z}\right) \equiv \arg\left(\frac{iz+1-i}{-z+1-i}\right) [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv \arg\left(-i\left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right)\right) [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv \arg(-i) + \arg\left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right) [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} \equiv \frac{3\pi}{2} + \arg\left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right) [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right) \equiv 0 \ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right)} = \left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{-\bar{z}+1-i}{-\bar{z}+1+i}\right) = \left(\frac{-z+1+i}{-z+1-i}\right)$$
$$\Leftrightarrow (-z+1-i)(-\bar{z}+1-i) = (-\bar{z}+1+i)(-z+1+i)$$
$$\Leftrightarrow 4i - 2zi - 2\bar{z}i = 0$$
$$\Leftrightarrow 4i - 2i(x+iy) - 2i(x-iy) = 0 \ ; \ z = x+iy$$
$$\Leftrightarrow 4i - 4ix = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

و بالتالي مجموعة النقط التي من أجلها A و Ω و M' و M'' متداورة هي المستقيم $(\Delta): x = 1$.

التمرين الرابع — I 1

ليكن x عنصرا من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

$$n = f(x) \Leftrightarrow n = \frac{x}{\ln x}$$
$$\Leftrightarrow n\ln x = x$$
$$\Leftrightarrow e^{n\ln x} = e^x$$
$$\Leftrightarrow x^n = e^x$$

التمرين الرابع — I 2

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{x}{\ln x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to -\infty \\ t=\ln x}}\left(\frac{1}{t}\right) = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . و لدينا : $f_d'(0) = 0$

التمرين الرابع — I 3

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty$$

لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \end{cases}$

إذن نستنتج أن المستقيم $(\Delta): x = 1$ مقارب عمودي لـ $(\mathcal{C}_f)$.

و لدينا كذلك : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$

إذن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع — I 4

لدينا f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ لأنها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق .

ليكن x عنصرا من $[0,1[\cup]1,+\infty[$.

لدينا : $f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(\ln(x)-1)$ فقط .

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين الرابع I 5

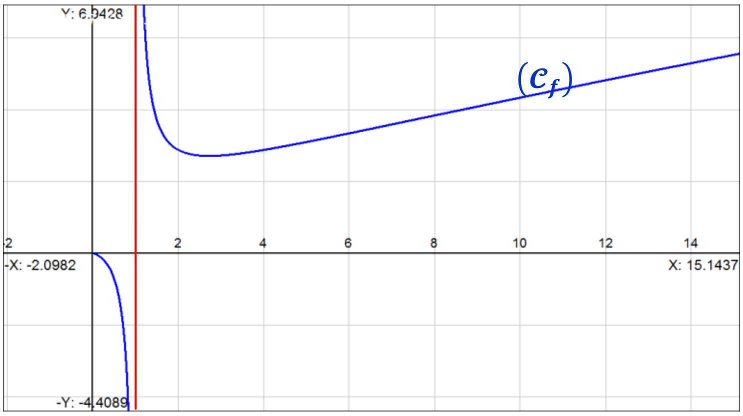
$$f''(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}\right)' = \frac{\frac{(\ln x)^2}{x} - (\ln x - 1)\left(\frac{2\ln x}{x}\right)}{(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)(2-\ln x)}{x(\ln x)^4} = \boxed{\frac{(2-\ln x)}{x(\ln x)^3}}$$

$$\begin{cases} x = e^2 \implies f''(x) = 0 \\ x > e^2 \implies f''(x) < 0 \\ x < e^2 \implies f''(x) > 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة f'' تنعدم في النقطة ذات الأفصول e^2 و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة . نستنتج إذن أن $(e^2, f(e^2))$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ مع : $f(e^2) = \frac{e^2}{\ln(e^2)} = \frac{e^2}{2}$

و بالتالي $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

التمرين الرابع I 6



التمرين الرابع I 7

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]1,e[$.

إذن f تقابل من المجال $]1,e[$ نحو المجال $f(]1,e[)$.

و لدينا : $f(]1,e[) =]e,+\infty[$.

و بما أن $\in]e,+\infty[$ لأن $n \geq 3 > e$.

فإن n يمتلك سابقا واحدا α_n بالتقابل f من المجال $]1,e[$.

أو بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha_n \in]1,e[\ ;\ f(\alpha_n) = n$

و باستعمال نتيجة السؤال 1) نكتب : $\exists!\ \alpha_n \in]1,e[\ ;\ e^{\alpha_n} = (\alpha_n)^n$

و لدينا كذلك f دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]e,+\infty[$.

إذن f تقابل من المجال $]e,+\infty[$ نحو المجال $f(]e,+\infty[)$.

بحيث : $f(]e,+\infty[) =]e,+\infty[$

و بما أن $\in]e,+\infty[$ لأن $n \geq 3 > e$.

فإن n يمتلك سابقا واحدا b_n بالتقابل f من المجال $]e,+\infty[$.

أو بتعبير آخر : $\exists!\ b_n \in]e,+\infty[\ ;\ f(b_n) = n$

و باستعمال نتيجة السؤال 1) نكتب : $\exists!\ b_n > e\ ;\ e^{b_n} = (b_n)^n \quad (\star)$

التمرين الرابع II 1

$$\begin{aligned} b_n > e &\implies (b_n)^n > e^n \\ &\implies e^{b_n} > e^n\ ;\ d'après\ (\star) \\ &\implies b_n > n \implies \underbrace{b_n > n}_{\xrightarrow[n\infty]{} +\infty} \\ &\implies \boxed{\lim_{n\infty}(b_n) = +\infty} \end{aligned}$$

التمرين الرابع II 2 أ

في هذا السؤال سوف نستعمل النتائج التالية :

$$\begin{cases} f\ est\ \searrow\ sur\ ]1,e[\\ f(\alpha_n) = n \\ f(\alpha_{n+1}) = (n+1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (n+1) > n &\implies f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n) \\ &\implies f^{-1}\left(f(\alpha_{n+1})\right) < f^{-1}\left(f(\alpha_n)\right) \\ &\implies \alpha_{n+1} < \alpha_n \end{aligned}$$

$\implies$ $(\alpha_n)_{n\geq3}$ متتالية تناقصية

بما أن $(\alpha_n)_{n\geq3}$ مصغورة بالعدد 1 . لأن : $\alpha_n > 1$ حسب 7) :

فإن $(\alpha_n)_{n\geq3}$ متتالية متقاربة .

التمرين الرابع II 2 ب

$$\begin{aligned} 1 < \alpha_n < e &\implies 1 < \ln(e^{\alpha_n}) < e \\ &\implies 1 < \alpha_n < e \\ &\implies 1 < \ln((\alpha_n)^n) < e \\ &\implies 1 < n\ln(\alpha_n) < e \\ &\implies \frac{1}{n} < \ln(\alpha_n) < \frac{e}{n} \\ &\implies \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} < \ln(\alpha_n) < \underbrace{\left(\frac{e}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \\ &\implies \lim_{n\infty} \ln(\alpha_n) = 0 \\ &\implies e^{\left(\lim\limits_{n\infty} \ln(\alpha_n)\right)} = e^0 \\ &\implies e^{\left(\ln\left(\lim\limits_{n\infty} \alpha_n\right)\right)} = 1 \\ &\implies \lim_{n\infty}(\alpha_n) = 1 \end{aligned}$$

التمرين الرابع II 2 ج

$$\begin{aligned} (\alpha_n)^n = e^{(\alpha_n)} &\implies \lim_{n\infty}(\alpha_n)^n = \lim_{n\infty} e^{(\alpha_n)} \\ &\implies \lim_{n\infty}(\alpha_n)^n = e^1 = e \\ &\implies \lim_{n\infty}(\alpha_n)^n = e \end{aligned}$$

التمرين الخامس 1 أ

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq x &\implies -x^2 \leq -t^2 \leq 0 \\ &\implies e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq 1 \\ &\implies \int_0^x e^{-x^2}\,dt \leq \int_0^x e^{-t^2}\,dt \leq \int_0^x 1\,dt \end{aligned}$$

$$\implies e^{-x^2}\int_0^x e^{-x^2}\,dt \leq e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \leq e^{-x^2}\int_0^x 1\,dt$$

$$\begin{aligned} &\implies e^{-2x^2}[t]_0^x \leq F(x) \leq e^{-x^2}[t]_0^x \\ &\implies xe^{-2x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \\ &\implies 0 \leq xe^{-2x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \\ &\implies 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \end{aligned}$$

التمرين الخامس 1 ب

$$\begin{aligned} x \geq 1 &\implies x^2 \geq x \implies -x^2 \leq -x \\ &\implies e^{-x^2} \leq e^{-x} \\ &\implies xe^{-x^2} \leq xe^{-x} \quad (\blacksquare) \end{aligned}$$

$$0 \le F(x) \le xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \ 0 \le F(x) \le x\, e^{-x^2} \le x\, e^{-x} \ ; \ d'après ■$$

$$\Rightarrow \ 0 \le F(x) \le x\, e^{-x}$$

$$\Rightarrow \ 0 \le F(x) \le \underbrace{\left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}\right)}_{x \to +\infty}$$

$$\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \ \boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

التمرين الخامس 2

لدينا $t \to e^{-t^2}$ دالة متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز φ و تحقق :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt \\ \varphi'(x) = e^{-x^2} \ ; \ \forall\, x \in [0;+\infty[\end{cases}$$

و لدينا : $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = e^{-x^2} \varphi(x)$

بما أن $x \longrightarrow \varphi(x)$ و $x \longrightarrow e^{-x^2}$ قابلتين للاشتقاق على $[0,+\infty[$

فإن F قابلة للاشتقاق كذلك على المجال $[0,+\infty[$.

و لدينا :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(e^{-x^2}\varphi(x)\right)' \\ &= \left(e^{-x^2}\right)'\varphi(x) + e^{-x^2}\varphi'(x) \\ &= (-2x)\left(e^{-x^2}\right)\varphi(x) + \left(e^{-x^2}\right)\left(e^{-x^2}\right) \\ &= -2x\, F(x) + e^{-2x^2} \end{aligned}$$

التمرين الخامس 3 أ

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) &= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} F(\tan x) \\ &= \lim_{\substack{u \to +\infty \\ u = \tan x}} F(u) = 0 = G\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} G(x) = G\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

و هذا يعني أن الدالة G متصلة على يسار $\frac{\pi}{2}$.

التمرين الخامس 3 ب

لدينا :

- G دالة متصلة على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
- G قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.
- $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = G(0)$

إذن حسب مبرهنة $Rolle$ نستنتج أن :

$$\boxed{\exists\, \alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ ; \ G'(\alpha) = 0} \quad (\star)$$

و منه : $\exists\, \alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ ; \ (1+\tan^2\alpha)\, F'(\tan\alpha) = 0$

يعني : $\exists\, \alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ ; \ F'(\tan\alpha) = 0$

يعني : $\exists\, c = \tan\alpha \in]0,+\infty[\ ; \ F'(c) = 0$

يعني : $\exists\, c \in]0,+\infty[\ ; \ -2c\, F(c) + e^{-2c^2} = 0$

إذن : $\exists\, c \in]0,+\infty[\ ; \ F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$

التمرين الخامس 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2x\, F(x)$

إذن : $F''(x) = -4x\, e^{-2x^2} - 2\, F(x) - 2x\, e^{-2x^2} + 4x^2\, F(x)$

إذن :

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(\frac{F'(x)\, e^{x^2}}{2x}\right)' \\ &= \frac{2x\left(F''(x)\, e^{x^2} + 2x\, F'(x)\, e^{x^2}\right) - 2F'(x)\, e^{x^2}}{4x^2} \\ &= \frac{2x\, F''(x)\, e^{x^2} + 4x^2\, F'(x)\, e^{x^2} - 2F'(x)\, e^{x^2}}{4x^2} \end{aligned}$$

نعوض في هذا التعبير الأخير $F'(x)$ و $F''(x)$ بقيمتيهما ثم ننشر ثم نبسط لنحصل في الأخير على ما يلي :

$$H'(x) = \frac{-8x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2}}{4x^2} = \frac{-2e^{-x^2}(4x^2+1)}{4x^2} < 0$$

إذن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

التمرين الخامس 4 ب

لدينا : $(\exists\, c > 0) \ ; \ F'(c) = 0$ إذن : $H(c) = \frac{F'(c)\, e^{-c^2}}{2c} = 0$

يعني : $(\exists\, c > 0) \ ; \ H(c) = 0$

بما أن الدالة H متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

فإن H تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو $H(]0,+\infty[)$.

إذن : $\exists!\, c \in]0,+\infty[\ ; \ H(c) = 0$

يعني : $(\exists!\, c > 0) \ ; \ F'(c) = 0 \ \ et \ \ F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$

و لدينا : $H(x) = \frac{F'(x)\, e^{x^2}}{2x}$. إذن : $F'(x) = \frac{2x\, H(x)}{e^{x^2}}$

الدالة F' تنعدم في العدد c .

$$\begin{aligned} x \ge c \ &\Rightarrow \ H(x) \le H(c) \ ; \ car \ H \ est \searrow sur \ ]0,+\infty[\\ &\Rightarrow \ H(x) \le H(c) = 0 \\ &\Rightarrow \ \frac{2x\, H(x)}{e^{x^2}} \le 0 \\ &\Rightarrow \ F'(x) \le 0 \\ &\Rightarrow \ F \ \text{تناقصية على المجال} \ [c,+\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \le c \ &\Rightarrow \ H(x) \ge H(c) \ ; \ car \ H \ est \searrow sur \ ]0,+\infty[\\ &\Rightarrow \ H(x) \ge H(c) = 0 \\ &\Rightarrow \ \frac{2x\, H(x)}{e^{x^2}} \ge 0 \\ &\Rightarrow \ F'(x) \ge 0 \\ &\Rightarrow \ F \ \text{تزايدية على المجال} \ [0,c] \end{aligned}$$

نلخص إذن النتائج المحصل عليها في الجدول التالي :

x	0		c		$+\infty$
$F'(x)$	0	$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-2c^2}}{2c}$	$\searrow$	0

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2011

التمرين الأول 1 أ

$$x,y\,\epsilon\,]0,1[\; \Rightarrow\; 0<y<1 \;\; et \;\; 0<x<1$$
$$\Rightarrow\; -1<-y<0 \;\; et \;\; -1<-x<0$$
$$\Rightarrow\; 0<1-y<1 \;\; et \;\; 0<1-x<1$$
$$\Rightarrow\; 0<(1-y)(1-x)<1$$
$$\Rightarrow\; (1-y)(1-x)+xy>xy$$
$$\Rightarrow\; \boxed{\frac{xy}{(1-y)(1-x)+xy}<1} \qquad (1)$$

$$xy>0 \;\; et \;\; (1-x)(1-y)>0$$
$$\Rightarrow\; xy+(1-x)(1-y)>0$$
$$\Rightarrow\; \boxed{\frac{xy}{(1-x)(1-y)+xy}>0} \qquad (2)$$

$$(1)\; et \;(2) \;\Rightarrow\; 0<\frac{xy}{(1-x)(1-y)+xy}<1$$
$$\Rightarrow\; 0<x*y<1$$
$$\Rightarrow\; x*y\;\epsilon\; I$$

لقد حصلنا على الإستلزام التالي : $(x,y)\,\epsilon\, I^2 \;\Rightarrow\; x*y\;\epsilon\; I$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

التمرين الأول 1 ب

$$(x,y)\,\epsilon\, I^2 \;\Rightarrow\; x*y = \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$$
$$= \frac{yx}{yx+(1-y)(1-x)}$$
$$= y*x$$

إذن : $\boxed{(x,y)\,\epsilon\, I^2 \;\Rightarrow\; x*y=y*x}$

و هذا يعني أن القانون $*$ تبادلي في المجموعة I .

$$(x,y,z)\,\epsilon\, I^3 \;\Rightarrow\; x*(y*z) = \frac{x(y*z)}{x(y*z)+(1-x)(1-y*z)}$$
$$= \frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$$

$$(x,y,z)\,\epsilon\, I^3 \;\Rightarrow\; (x*y)*z = \frac{(x*y)z}{(x*y)z+(1-x*y)(1-z)}$$
$$= \frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$$

نحصل إذن على الإستلزام التالي :

$$\boxed{(x,y,z)\,\epsilon\, I^3 \;\Rightarrow\; x*(y*z)=(x*y)*z}$$

و هذا يعني أن $*$ قانون تجميعي في المجموعة I .

التمرين الأول 1 ج

ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة I .

$$\Rightarrow\; (\forall x\epsilon I)\;;\; x*e=e*x=x$$
$$\Rightarrow\; (\forall x\epsilon I)\;;\; \frac{xe}{xe+(1-x)(1-e)}=x$$
$$\Rightarrow\; (\forall x\epsilon I)\;;\; \frac{e}{xe+(1-x)(1-e)}=1$$
$$\Rightarrow\; (\forall x\epsilon I)\;;\; xe+(1-x)(1-e)=e$$
$$\Rightarrow\; (\forall x\epsilon I)\;;\; e=\frac{1}{2}\;\epsilon\;]0,1[=I$$

نحصل إذن على عنصر محايد وحيد للقانون $*$ في المجموعة I و هو $\frac{1}{2}$.

التمرين الأول 2

حصلنا من خلال ما سبق على ما يلي :

- $I=]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- $*$ قانون تركيب داخلي في I
- $*$ يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I
- $*$ تبادلي و تجميعي في I .

إذن لكي تكون $(I,*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن كل عنصر x من I يقبل مماثل بالقانون $*$ في I .

ليكن x عنصرا من I و x' مماثله بالنسبة لـ $*$

$$\Rightarrow\; x*x'=x'*x=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\; \frac{xx'}{xx'+(1-x)(1-x')}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\; x'=(1-x)$$
$$\Rightarrow\; 0<x'=(1-x)<1 \quad ,car\;\; 0<x<1$$
$$\Rightarrow\; x'=(1-x)\;\epsilon\; I$$

إذن كل عنصر x من I يقبل مماثلا من I و هو $(1-x)$.

و بالتالي نستنتج أن $(I,*)$ زمرة تبادلية .

التمرين الأول 3 أ

لدينا : $H=\{\,2^n\;;\;n\,\epsilon\,\mathbb{Z}\}$

نلاحظ أن H جزء غير فارغ من $\mathbb{R}_+^*$. لأن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\;;\;2^n\,\epsilon\,\mathbb{R}_+^*$.

ليكن 2^n و 2^m عنصرين من H .

لدينا : $2^n\times(2^n)^{-1}=2^{n-m}\,\epsilon\, H$

إذن $(H,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$. و ذلك حسب الخاصية المميزة لزمرة جزئية .

التمرين الأول 3 ب

$$(x,y)\,\epsilon\, H^2 \;\Rightarrow\; \varphi(x)*\varphi(y)=\left(\frac{1}{1+x}\right)*\left(\frac{1}{1+y}\right)$$
$$=\frac{\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}}{\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}+\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+y}\right)}$$
$$=\frac{1}{(1+x)(1+y)}\times\frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}$$
$$=\frac{1}{1+xy}=\varphi(xy)$$

نحصل إذن على الإستلزام التالي :

$$\boxed{(x,y)\,\epsilon\, H^2 \;\Rightarrow\; \varphi(x)*\varphi(y)=\varphi(xy)}$$

إذن φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

التمرين الأول 3 ج

لدينا φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

إذن صورة الزمرة $(H,\times)$ هي الزمرة $(\varphi(H),*)$.

لنبين الآن أن : $\varphi(H)=k$

$$\boxed{2^n\,\epsilon\, H \;\Leftrightarrow\; \varphi(2^n)\,\epsilon\,\frac{1}{1+2^n}\,\epsilon\, k}$$

إذن : $\varphi(H)=k$

بما أن $(H,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

فإن $(k,*)=(\varphi(H),*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

و بالتالي $(k,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني 1 أ

نتطلق من المتوافقة التالية : $10^x \equiv 2\ [19]$

و نضرب طرفيها في العدد 10 نجد : $10^{x+1} \equiv 20\ [19]$

من جهة أخرى لدينا : $20 \equiv 1\ [19]$

إذن : $10^{x+1} \equiv 1\ [19]$

التمرين الثاني 1 ب

لدينا 19 عدد أولي . إذن حسب $Fermat$:

$$(\forall\, a \wedge 19 = 1)\ ;\ a^{19-1} \equiv 1\ [19]$$

من أجل $a = 10$ نحصل على : $10^{19-1} \equiv 1\ [19]$

أي : $10^{18} \equiv 1\ [19]$

التمرين الثاني 2 أ

نضع $d = (x+1) \wedge 18$.

إذن يوجد u و v من $\mathbb{Z}$ بحيث : $d = 18u + (x+1)v$.

و نفصل هنا بين أربع حالات للعددين u و v .

الحالة الأولى : u و v عددان سالبان معا .

هذه الحالة مستحيلة لأن 18 و $(x+1)$ و d كلها أعداد صحيحة طبيعية

و لا يوجد u و v بحيث $d = 18u + (x+1)v$.

الحالة الثانية : u عدد سالب و v عدد موجب .

إذن : $d + 18u' = (x+1)v$

بحيث $-u = u'$ عدد موجب و v عدد موجب .

لدينا : $\begin{cases} 10^{18} \equiv 1\ [19] \\ 10^{(x+1)} \equiv 1\ [19] \end{cases}$. إذن : $\begin{cases} 10^{18u'} \equiv 1\ [19] \\ 10^{(x+1)v} \equiv 1\ [19] \end{cases}$ $(*)$

و منه : $\begin{cases} 10^{d+18u'} \equiv 10^d\ [19] \\ 10^{(x+1)v} \equiv 1\ [19] \end{cases}$

و بما أن : $d + 18u' = (x+1)v$

فإن : $10^{d+18u'} = 10^{(x+1)v}$

و منه حسب $(*)$ نكتب : $10^d \equiv 1\ [19]$

الحالة الثالثة : v عدد سالب و u عدد موجب .

إذن : $d + (x+1)v' = 18u$

بحيث $v' = -v$ عدد موجب و u عدد موجب .

لدينا : $\begin{cases} 10^{18} \equiv 1\ [19] \\ 10^{(x+1)} \equiv 1\ [19] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 10^{18u} \equiv 1\ [19] \\ 10^{d+(x+1)v'} \equiv 1\ [19] \end{cases}$ $(\blacksquare)$

و بما أن : $d = (x+1)v' = 18u$ فإن : $10^{d+(x+1)v'} = 10^{18u}$

و منه حسب $(\blacksquare)$ نكتب : $10^d \equiv 1\ [19]$

الحالة الرابعة : u عدد موجب و v عدد موجب .

لدينا : $d = 18u + (x+1)v$.

و لدينا : $\begin{cases} 10^{18} \equiv 1\ [19] \\ 10^{(x+1)} \equiv 1\ [19] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 10^{18u} \equiv 1\ [19] \\ 10^{(x+1)v} \equiv 1\ [19] \end{cases}$

نضرب هاتين المتوافقتين طرفا لطرفا نجد : $10^{18u+(x+1)v} \equiv 1\ [19]$

يعني : $10^d \equiv 1\ [19]$

و بالتالي نستنتج أنه في جميع الحالات تحصل على : $10^d \equiv 1\ [19]$

التمرين الثاني 2 ب

$$d = 18 \wedge (x+1) \Rightarrow d/18$$
$$\Rightarrow d \in \{1,2,3,6,9,18\}$$
$$\Rightarrow d = 18\ ;\ car \begin{cases} 10 \equiv 10\ [19] \\ 10^2 \equiv 5\ [19] \\ 10^3 \equiv 12\ [19] \\ 10^6 \equiv 11\ [19] \\ 10^9 \equiv 18\ [19] \\ 10^{18} \equiv 1\ [19] \end{cases}$$

التمرين الثاني 2 ج

$$18 = 18 \wedge (x+1) \Rightarrow 18/(x+1)$$
$$\Rightarrow 18/(x+1) - 18\ ;\ 18/(-18)$$
$$\Rightarrow 18/(x-17)$$
$$\Rightarrow x \equiv 17\ [18]$$

التمرين الثالث I 1

$$(-2i)^3 - (1+2i)(-2i)^2 + 3(1+i)(-2i) - 10(1+i)$$
$$= 8i + 4(1+2i) - 6i(1+i) - 10(1+i)$$
$$= 8i + 4 + 8i - 6i + 6 - 10 - 10i$$
$$= 16i - 16i + 10 - 10 = 0$$

التمرين الثالث I 2

ننشر التعبير $(z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$ نحصل على :

$$z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة نجد:

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1+i) \\ \alpha + 2i = -(1+2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(1+4i) \\ \beta = 5i - 5 \end{cases}$$

التمرين الثالث I 3 أ

ليكن $(x+iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5-12i)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = 5 - 12i \\ |x+iy| = \sqrt{5^2 + 12^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) + 2ixy = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2) = 5 \\ xy = -6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ أو } x = 3 \\ y = 2 \text{ أو } y = -2 \end{cases}$$

و بالتالي الجذران المربعان للعدد العقدي $(5 - 12i)$ هما : $(3-2i)$ و $(-3+2i)$

التمرين الثالث I 3 ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z+2i)(z^2 - (1+4i)z - 5 + 5i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z = -2i \ \ ou\ \ z^2 - (1+4i)z - 5 + 5i = 0$$

لدينا : $\Delta = (1+4i)^2 - 4(-5+5i) = 5 - 12i = (3-2i)^2$

إذن $z_1 = -1 + 3i$ و $z_2 = 2 + i$.

و بالتالي المعادلة تقبل ثلاثة حلول و هي : $-2i$ و $2+i$ و $-1+3i$

التمرين الثالث II 1

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{-1+3i-2-i}{-2i-2-i} = \frac{3-2i}{2+3i} = -i = e^{\frac{-i\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) \equiv \arg\left(e^{\frac{-i\pi}{2}}\right)\ [2\pi] \\ \left|\frac{a-c}{b-c}\right| = \left|e^{\frac{-i\pi}{2}}\right| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ \dfrac{|a-c|}{|b-c|} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ CA = CB \end{cases}$$

نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في C و متساوي الساقين رأسه C .

التمرين الثالث II 2 أ

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$.

$$R_1(M) = M_1 \Leftrightarrow (z_1 - b) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z-b)$$
$$\Leftrightarrow (z_1 + 2i) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+2i)$$
$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$$

التمرين الثالث II 2 ب

$$R_2(M) = M_2 \Leftrightarrow (z_2 - a) = e^{\frac{-2i\pi}{3}}(z-a)$$
$$\Leftrightarrow (z_2 + 1 - 3i) = \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+1-3i)$$
$$\Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - (1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$[M_1M_2]$ منتصف I $\Leftrightarrow aff(I) = \dfrac{z_1+z_2}{2}$

$$\Leftrightarrow aff(I) = -\sqrt{3} - i - \frac{(1-3i)(3+i\sqrt{3})}{2}$$
$$\Leftrightarrow aff(I) = constante\ complexe$$

$\Leftrightarrow$ I نقطة ثابتة في المستوى

التمرين الرابع 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+\ln x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(x+\ln x) = 0 + -\infty = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x+\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}(x+\ln x - x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$$

التمرين الرابع 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

التمرين الرابع 2 ب

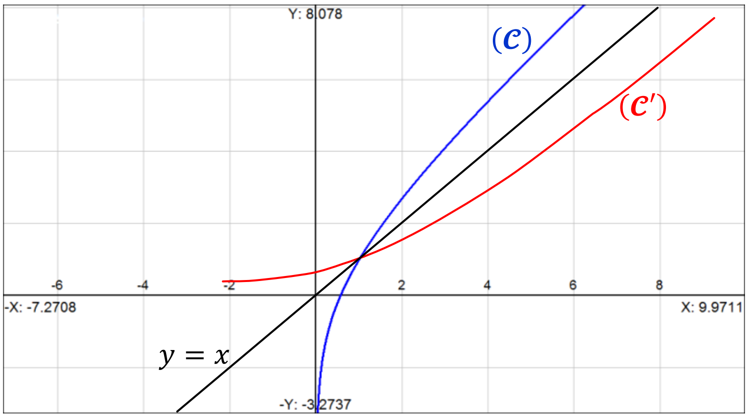
لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

إذن f تقابل من $]0;+\infty[$ نحو صورته $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$.

و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f^{-1}	0 $\nearrow$ $+\infty$

التمرين الرابع 3



التمرين الرابع 4 أ

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx = \int_1^{e+1} \underbrace{f^{-1}(x)}_{t}\ \underbrace{dx}_{f'(t)dt}$$
$$= \int_1^{e} t\,f'(t)\,dt$$
$$= [t\,f(t)]_1^e - \int_1^e f(t)\,dt$$
$$= [t\,f(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t\ln t - t\right]_1^e$$
$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{e^2+2e-3}{2} \approx 4{,}9$$

التمرين الرابع 4 ب

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المذكور في السؤال .

$$\mathcal{A} = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)|\,dx$$
$$= \int_1^{e+1}\left(x - f^{-1}(x)\right)dx\ ;\ car\ \left|\begin{array}{l} x \geq f^{-1}(x) \\ \forall\, x \geq 1 \end{array}\right.$$
$$= \int_1^{e+1} x\,dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2+2e-3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

التمرين الرابع 5 أ

نضع : $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا h دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

و لدينا كذلك : $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن h تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

و منه تقابل من $]0;+\infty[$ نحو صورته $]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

و بما أن : $0 \in \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل h من المجال $]-\infty;+\infty[$.

يعني : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ h(x_n) = 0$.

أو بتعبير آخر : $\exists!\ x_n > 0\ ;\ x_n + \ln(x_n) = 0$

التمرين الرابع 5 ب

x_1 هو حل المعادلة : $x + \ln x = 1$

و لدينا : $1 + \ln 1 = 1$ إذن : $x_1 = 1$

و لدينا : $f(x_n) = n$ إذن : $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن f^{-1} تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن:

$$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n$$

إذن من النتيجة $x_{n+1} > x_n$ نستنتج أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .

لنبين الآن أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير مكبورة .

بالخلف، نفترض أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مكبورة بعدد A .

$\Rightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ x_n \le A$

$\Rightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ f(x_n) \le f(A) = B$

$\Rightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ f(x_n) \le B$

$\Rightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ n \le B$

$\Rightarrow$ المجموعة $\mathbb{N}$ مكبورة بالعدد B

$\Rightarrow$ مستحيل

$\Rightarrow$ Absurde

إذن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية غير مكبورة .

لقد حصلنا على أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تزايدية قطعا و ليست مكبورة

إذن فهي متباعدة . يعني : $\lim\limits_{n\infty}(x_n) = +\infty$

التمرين الرابع 6 أ

$(n \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow\ n \ge 1$

$\Rightarrow\ \ln n \ge 0$

$\Rightarrow\ n + \ln n \ge n$

$\Rightarrow\ f(n) \ge f(x_n)$

$\Rightarrow\ f^{-1}(f(n)) \ge f^{-1}(f(x_n))\ ;\ (f^{-1} est \nearrow)$

$\Rightarrow\ n \ge x_n$

و بالتالي: $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \ge x_n}$

التمرين الرابع 6 ب

$(n \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow\ n \ge x_n$

$\Rightarrow\ \frac{x_n}{n} \le 1$

$\Rightarrow\ \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \le 0$

$\Rightarrow\ \ln(x_n) - \ln(n) \le 0$

$\Rightarrow\ \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_{=n} - \ln(n) \le x_n$

$\Rightarrow\ n - \ln(n) \le x_n$

و بالتالي: $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n - \ln n \le x_n}$

ملاحظة :

$$\lim_{n\infty}(n - \ln n) = \lim_{n\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1-0) = (+\infty)$$

$$\Rightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \underbrace{(n - \ln n)}_{n\infty \to \boxed{+\infty}} \le x_n$$

و هذا دليل آخر على أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة .

يعني : $\lim\ (x_n) = +\infty$

التمرين الرابع 6 ج

$n - \ln n \le x_n$

$\Rightarrow\ \frac{n - x_n}{n} \le \frac{\ln n}{n}$

$\Rightarrow\ \left|\frac{n - x_n}{n}\right| \le \frac{\ln n}{n}$

$\Rightarrow\ \left|\frac{n - x_n}{n}\right| \le \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{n\infty \to 0}$

$\Rightarrow\ \underbrace{\frac{-\ln n}{n}}_{n\infty \to 0} \le \left(\frac{n - x_n}{n}\right) \le \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{n\infty \to 0}$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{n - x_n}{n}\right) = 0$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{x_n - n}{n}\right) = 0$

$n - \ln n \le x_n \le n$

$\Rightarrow\ \frac{n - \ln n}{n - \ln n} \le \frac{x_n}{n - \ln n} \le \frac{n}{n - \ln n}$

$\Rightarrow\ 1 \le \frac{x_n}{n - \ln n} \le \frac{n}{n - \ln n}$

$\Rightarrow\ \underbrace{1}_{n\infty \to 1} \le \frac{x_n}{n - \ln n} \le \underbrace{\frac{n}{n - \ln n}}_{n\infty \to 1}$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right) = 1$

التمرين الخامس 1

لدينا f_n دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,1[$.

و لدينا : $\forall\ x \in]0,1[\ ;\ f_n'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,1[$.

و منه f_n تقابل من المجال $]0,1[$ نحو المجال $]f_n(0)\,,f_n(1)[$.

و لدينا $f_n(0) = -1 < 0$.

و لدينا كذلك : $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 0$

إذن : $f_n(0)\cdot f_n(1) < 0$ أي : $0 \in]f_n(0)\,;\,f_n(1)[$

و منه 0 يمتلك سابقا واحدا α_n من المجال $]0,1[$ بالتقابل f_n .

أو بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha_n \in]0;1[\ ;\ f_n(\alpha_n) = 0$

التمرين الخامس 2

$$f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\Rightarrow\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} > 0\ ,\quad \forall\, x \in\,]0,1[$$
$$\Rightarrow\ \forall\, x \in\,]0,1[\ ;\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \in\,]0,1[\ \Rightarrow\ f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

$$\Rightarrow\ f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})\ ;\ d'après \star\ suivante :$$
$$(\star)\quad (\forall n \geq 2)\ ;\ f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$$
$$\Rightarrow\ f_n^{-1}(f_n(\alpha_n)) > f_n^{-1}(f_n(\alpha_{n+1}))\ ;\ car\ f_n^{-1} \nearrow$$
$$\Rightarrow\ \alpha_n > \alpha_{n+1}\ ;\ (\forall n \geq 2)$$

$\Rightarrow$ $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا

من جهة أخرى لدينا : $(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 < \alpha_n < 1$.

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ مصغورة بالعدد 0 .

الخلاصة : $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية تناقصية و مصغورة إذن فهي متقاربة .

التمرين الخامس 3 أ

لدينا $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف للعدد 1 .

إذن : $1 + t + \cdots + t^{n-1} = \dfrac{1-t^n}{1-t} = \dfrac{1}{1-t} - \dfrac{t^n}{1-t}$

التمرين الخامس 3 ب

$$(t \neq 1)\ \Rightarrow\ 1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$
$$\Rightarrow\ \int_0^{\alpha_n} (1 + t + \cdots + t^{n-1})\, dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\right) dt$$
$$\Rightarrow\ \left(\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n}\right) = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

التمرين الخامس 4 أ

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

إذن : $-1 + \alpha_n + \dfrac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n^n}{n} = 0$

إذن : $1 = -\ln(1-\alpha_n) - \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$

و منه : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$

التمرين الخامس 4 ب

$$0 \leq t \leq \alpha_n\ \Rightarrow\ 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{1-\alpha_n} \geq \frac{1}{1-t} \geq 0$$
$$\Rightarrow\ 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$
$$\Rightarrow\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right) \int_0^{\alpha_n} t^n\, dt$$
$$\Rightarrow\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}\right)$$

و بما أن : $(\alpha_n)^{n+1} < 1$

فإن : $\left(\dfrac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\dfrac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}\right) \leq \left(\dfrac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$

$$(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

التمرين الخامس 4 ج

لدينا : $0 \leq \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)$

و لدينا : $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = 0^- \times 0^+ = 0$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\underset{n\infty \searrow \mathbf{0}}{0} \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{n\infty \searrow \mathbf{0}}$$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty} \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt = 0$

و نعلم أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\displaystyle\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}(1 + \ln(1-\alpha_n)) = 0$

$$\Rightarrow\ 1 + \ln(1-l) = 0\ ;\ avec\ l = \lim_{n\infty}(\alpha_n)$$
$$\Rightarrow\ \ln(1-l) = -1\ \Rightarrow\ \ln\left(\frac{1}{1-l}\right) = 1$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{1-l} = e\ \Rightarrow\ e(1-l) = 1$$
$$\Rightarrow\ e - el = 1\ \Rightarrow\ l = \frac{e-1}{e} = \boxed{1 - e^{-1}}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n) = \dfrac{e-1}{e}}$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2012

التمرين الأول I 1

$$I-A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{\sqrt5-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt5}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt5-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\frac{\sqrt5-1}{2}&0&0\\0&-2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{3-\sqrt5}{2}&0&0\\0&3&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

التمرين الأول I 2

من خلال السؤال السابق نلاحظ أن : $A^2 = I - A$

إذن : $A(A+I) = A^2 + A = I$

و كذلك : $(A+I)A = A^2 + A = I$

و منه نستنتج أن المصفوفة A قابلة للقلب $(inversible)$.

و مقلوبها هو المصفوفة $(A+I)$. أو بتعبير آخر : $A^{-1} = A + I$

التمرين الأول II 1

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}$.

$$(x^2-1)(y^2-1)+1 = (xy)^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1$$
$$= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2$$

التمرين الأول II 2

ليكن a و b عنصرين من $I =]1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}(a,b)\in I^2 &\Rightarrow a>1 \;\; et \;\; b>1\\ &\Rightarrow a^2>1 \;\; et \;\; b^2>1\\ &\Rightarrow a^2-1>0 \;\; et \;\; b^2-1>0\\ &\Rightarrow (b^2-1)(a^2-1)>0\\ &\Rightarrow (b^2-1)(a^2-1)+1>1\\ &\Rightarrow a^2b^2-a^2-b^2+2>1\\ &\Rightarrow \sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}>1\\ &\Rightarrow a*b>1\\ &\Rightarrow a*b\in I\end{aligned}$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

التمرين الأول II 3 أ

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi(a)*\varphi(b) = \sqrt{a+1}*\sqrt{b+1}$$
$$= \sqrt{(a+1)(b+1)-(a+1)-(b+1)+2}$$
$$= \sqrt{ab+1} = \varphi(a\times b)$$

إذن : $\forall\,(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2 \;;\; \varphi(a)*\varphi(b) = \varphi(a\times b)$.

و هذا يعني أن φ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$.

لنبين الآن أن φ تقابل .

ليكن y عنصرا من I و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $\varphi(x)=y$ ذات المجهول x .

بما أن $y>1$ فإن $y^2-1>0$ و منه $x\in\mathbb{R}_+^*$

و بما أن y^2-1 عدد وحيد من أجل $y>1$.

فإن : $(\forall y\in I)\,,(\exists!\,x=y^2-1)\;;\;\varphi(x)=y$

و هذا يعني أن φ تقابل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$.

و تقابله العكسي φ^{-1} معرف بما يلي : $\varphi^{-1} : (I,*) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*,\times)$
$$y \longrightarrow y^2-1$$

و بالتالي φ تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(I,*)$.

التمرين الأول II 3 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية للزمرة و يحولها من مجموعة الانطلاق إلى مجموعة الوصول .

نستنتج إذن البنية الجبرية لـ $(I,*)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ و ذلك عبر التشاكل التقابلي .

لدينا $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو العدد 1 و كل عنصر x يقبل مماثل و هو مقلوبه $\frac{1}{x}$.

إذن $(I,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $*$ هو العدد $\varphi(1)$ و كل عنصر y يقبل مماثل نرمز له بالرمز $Sym(y)$.

و لدينا : $\varphi(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt2$

و لدينا كذلك $y\in I$ إذن يوجد x من $\mathbb{R}^*$.

بحيث : $y=\varphi(x) \;\Leftrightarrow\; x=\varphi^{-1}(y)=y^2-1$

و منه : $Sym(y) = Sym(\varphi(x)) = \varphi(Sym(x)) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$
$$= \varphi\left(\frac{1}{y^2-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{y^2-1}+1} = \sqrt{\frac{y^2}{y^2-1}}$$

التمرين الأول II 3 ج

ليكن $m\in\mathbb{Z}$ إذن $2^m+1>1$

و منه : $\sqrt{2^m+1}>1$. يعني : $\sqrt{2^m+1}\in I$

و هذا يعني أن (Γ) جزء غير فارغ من I .

ليكن $\sqrt{1+2^m}$ و $\sqrt{1+2^n}$ عنصرين من (Γ) .

$$\left(\sqrt{1+2^m}\right)*\left(\sqrt{1+2^n}\right)' = \left(\sqrt{1+2^m}\right)*\left(\sqrt{\frac{1+2^n}{2^n}}\right)$$
$$= \sqrt{(1+2^m)\left(\frac{1+2^n}{2^n}\right)-(1+2^m)-\left(\frac{1+2^n}{2^n}\right)+2}$$
$$= \sqrt{2^{m-n}+1}\in(\Gamma)$$

إذن حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن $(\Gamma,*)$ زمرة جزئية من الزمرة $(I,*)$.

التمرين الثاني I 1

$$(E) : \; i\,z^2 + (2-i)\,a\,z - (1+i)a^2 = 0$$
$$\Delta = (2-i)^2a^2 + 4i(1+i)\,a^2 = (ai)^2$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 .

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{(i-2)a+ai}{2i} = a(1+i)\\[2mm] z_2 = \dfrac{(i-2)a-ai}{2i} = ai\end{cases}$$

التمرين الثاني I 2 أ

$$z_1z_2 = ai(a)(1+i) = a^2i - a^2 = a^2(i-1)$$

I 2 ب التمرين الثاني

في البداية يجب كتابة z_1z_2 في شكله المثلثي :

$$z_1z_2 = a^2(i-1) = a^2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= a^2\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= a^2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$= a^2\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}}$$
$$= \left[a^2\sqrt{2}\,;\, \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$z_1z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z_1z_2) \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(a^2\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg(a^2) + \arg(\sqrt{2}) + \arg\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow 2\arg(a) + 0 + \frac{3\pi}{4} \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow 2\arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{4}\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg(a) \equiv \frac{-3\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

II 1 أ التمرين الثاني

لدينا $A(1)$ و $B(i+1)$ و $C(c)$ و $M(z)$.

A و D و M مستقيمية $\Leftrightarrow (AD) \parallel (AM)$

$$\Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}\right)} = \frac{z_M - z_A}{z_D - z_A}$$
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z-1}{ic-1}\right)} = \frac{z-1}{ic-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{-ic-1} = \frac{z-1}{ic-1}$$
$$\Leftrightarrow (ic-1)(\bar{z}-1) + (z-1)(ic+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \bar{z}ic - ic - \bar{z} + 1 + zic + z - ic - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \bar{z}(ic-1) + z(ic+1) = 2ic$$

II 1 ب التمرين الثاني

$$(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow \frac{z_M - z_O}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_M - z_O}{z_D - z_A}\right)} = -\left(\frac{z-0}{ic-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\bar{z}}{-ic-1} = \frac{-z}{ic-1}$$
$$\Leftrightarrow \bar{z}(ic-1) = z(ic+1)$$
$$\Leftrightarrow z(ic+1) - \bar{z}(ic-1)$$

II 2 أ التمرين الثاني

H هي المسقط العمودي لـ O على المستقيم (AD) :

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(AD) \perp (OH)\\ (AD) \parallel (AH)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right) \in i\mathbb{R}\\ \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right) \in \mathbb{R}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\left(\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right)} = -\left(\frac{z_H - z_O}{z_D - z_A}\right)\\ \overline{\left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right)} = \left(\frac{z_H - z_A}{z_D - z_A}\right)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\left(\frac{h-0}{ic-1}\right)} = -\left(\frac{h-0}{ic-1}\right)\\ \overline{\left(\frac{h-1}{ic-1}\right)} = \left(\frac{h-1}{ic-1}\right)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{\bar{h}}{-ic-1}\right) = -\left(\frac{h}{ic-1}\right)\\ \left(\frac{\bar{h}-1}{-ic-1}\right) = \left(\frac{h-1}{ic-1}\right)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\bar{h}(ic-1) = h(ic+1)\\ (\bar{h}-1)(ic+1) = -(h-1)(ic+1)\end{cases}$$

من المعادلة الثانية من هذه النظمة نستنتج ما يلي :

$$\bar{h}(ic-1) = (ic-1) - (h-1)(ic+1)$$

نعوض في المعادلة الأولى نحصل على :

$$(ic-1) - (h-1)(ic+1) = h(ic+1)$$

بعد النشر و التبسيط نحصل على : $2ic - 2h - 2hic = 0$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم $\frac{i}{2c}$ نحصل على :

$$-1 - \frac{hi}{c} + h = 0$$

أي : $h - 1 = \frac{hi}{c}$

نُضيف إلى كل الطرفين العدد $-i$ نجد : $\boxed{h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)}$

II 2 ب التمرين الثاني

لدينا : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$: إذن $\frac{h-(1+i)}{h-c} = \frac{i}{c}$

لدينا :
$$\overline{\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_c}\right)} = -\overline{\left(\frac{h-(1+i)}{h-c}\right)}$$
$$= \frac{-i}{c} = -\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_c}\right)$$

إذن : $\boxed{\overline{\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_c}\right)} = -\left(\frac{z_H - z_B}{z_A - z_c}\right)}$

و هذا يعني أن : $(CH) \perp (BH)$

التمرين الثالث 1 أ

باستعمال خوارزمية أقليدس نُحدد $143 \wedge 195$ بالطريقة التالية :

المرحلة الأولى $\begin{array}{c|c} 195 & 143 \\ \hline 52 & 1 \end{array}$ لدينا $52 \neq 0$ إذن نواصل

المرحلة الثانية $\begin{array}{c|c} 143 & 52 \\ \hline 39 & 2 \end{array}$ لدينا $39 \neq 0$ إذن نواصل

المرحلة الثالثة $\begin{array}{c|c} 52 & 39 \\ \hline 13 & 1 \end{array}$ لدينا $13 \neq 0$ إذن نواصل

المرحلة الرابعة $\begin{array}{c|c} 39 & 13 \\ \hline 10 & 3 \end{array}$ لدينا $0 = 0$ إذن Stop

القاسم المشترك الأكبر لـ 143 و 195 هو آخر باقي غير منعدم أي 13 .

و بالتالي : $143 \wedge 195 = 13 \quad (1)$.

من النتيجة (1) نستنتج وجود عددين نسبيين k و u بحيث :

$$143u + 195k = 13$$

نضع $v = -k$ إذن $143u - 195v = 13$.

و بما أن العدد 13 قاسم للعدد 52 .

فإن $(143u - 195v)$ قاسم للعدد 52 .

و منه : $(\exists w \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; 52 = (143u - 195v)w$

أي : $\exists \, x, y \, \epsilon \, \mathbb{Z} \; ; \; 52 = 143 \underbrace{uw}_{x} - 195 \underbrace{vw}_{y}$

و بالتالي : $\exists \, x, y \, \epsilon \, \mathbb{Z} \; ; \; 52 = 143\, x - 195\, y$

أي أن المعادلة السابقة تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

و يمكن كذلك استعمال الخاصية التالية مباشرة :

تقبل المعادلة $ax + by = c$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذا كان $a \wedge b$ يقسم c حيث $a \wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b . حصلنا على $143 \wedge 195 = 13$. و نلاحظ أن 13 يقسم العدد 52. إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن المعادلة قابلة للحل .

التمرين الثالث 1 ب

لدينا $(-1;-1)$ حل خاص للمعادلة (E) .

يعني : $143(-1) - 195(-1) = 52 \quad (*)$

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

يعني : $143x - 195y = 52 \quad (**)$

ننجز عملية الطرح بين المتساويتين $(*)$ و $(**)$ طرفا طرفا نحصل على :

$$143(-1-x) - 195(-1-y) = 0$$

يعني : $143(x+1) = 195(y+1)$

لدينا : $195 = 15 \times 13$ و $143 = 11 \times 13$.

نحصل إذن على : $11(x+1) = 15(y+1) \quad (\blacksquare)$.

و منه 11 قاسم للعدد $15(y+1)$.

و بما أن $15 \wedge 11 = 1$ فإنه حسب $Gauss$ نستنتج أن 11 قاسم لـ $(y+1)$

إذن : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; y + 1 = 11k$.

أي : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; y = 11k - 1$.

نعوض y في المتساوية $(\blacksquare)$ نحصل على $x = 15k - 1$.

عكسيا لدينا : $(\forall k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; 143(15k-1) - 195(11k-1) = 52$

و بالتالي : $k \epsilon \mathbb{Z} \; ; \; \begin{cases} x = 15k - 1 \\ y = 11k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)$ حل لـ (E)

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تُكتب على الشكل التالي :

$$S = \{\, (15k - 1;\; 11k - 1) \; ; \; k \, \epsilon \, \mathbb{Z} \,\}$$

التمرين الثالث 2

لدينا 5 عدد أولي و لا يقسم n لأن $n \wedge 5 = 1$.

إذن حسب مبرهنة $Fermat$: $n^{5-1} \equiv 1 \, [5]$

يعني : $n^4 \equiv 1 \, [5]$ يعني : $(\forall k \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; (n^4)^k \equiv 1^k \, [5]$

يعني : $(\forall k \epsilon \mathbb{N}) \; ; \; n^{4k} \equiv 1 \, [5]$

التمرين الثالث 3 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. و نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان 5 قاسما لـ n .

فإن 5 قاسم للجداء $n(n^{x-1} - n^{y-1})$.

و لدينا العدد $(n^{x-1} - n^{y-1})$ عدد صحيح طبيعي لأن x و y عددين صحيحيين طبيعيين غير منعدمين .

إذن 5 يقسم العدد $(n^x - n^y)$. أي : $n^x \equiv n^y \, [5]$

الحالة الثانية : إذا كان 5 لا يقسم n .

لدينا $x \equiv y \, [4]$.

إذن يوجد عدد نسبي k بحيث : $x - y = 4k$.

إذا كان $k = 0$ فإن $x = y$ و منه $n^x \equiv n^y \, [5]$

إذا كان $k > 0$ فإنه حسب ما سبق $n^{4k} \equiv 1 \, [5]$

أي : $n^{x-y} \equiv 1 \, [5]$

و نضرب طرفي هذه المتوافقة في n^y نجد : $n^x \equiv n^y \, [5]$

إذا كان $k < 0$ فإن $-k > 0$. و منه : $y - x = 4(-k)$

أي : $y - x = 4k'$ مع $k' = -k > 0$

إذن حسب ما سبق : $n^{4k'} \equiv 1 \, [5]$

أي : $n^{y-x} \equiv 1 \, [5]$

و نضرب طرفي المتوافقة في العدد n^x نجد : $n^y \equiv n^x \, [5] \quad (\otimes)$

التمرين الثالث 3 ب

أقترح طريقتين في الجواب :

الطريقة الأولى : $x \equiv y \, [4] \Leftrightarrow (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \; ; \; (x-y) = 4k$

$\Rightarrow (\, \exists k' = 2k \, \epsilon \, \mathbb{Z}\,) \; ; \; (x - y) = 2k'$

$\Rightarrow$ $(x-y)$ عدد زوجي

$\Rightarrow$ x و y زوجيان أو x و y فرديان

نقوم بدمج هاتين الحالتين مع حالتي زوجية العدد n لنحصل على أربع حالات و كلها تُعبّر عن زوجية التعبير $(n^x - n^y)$.

$$\begin{cases} \text{عدد زوجي} = (\text{عدد زوجي})^{\text{عدد زوجي}} - (\text{عدد زوجي})^{\text{عدد زوجي}} \\ \text{عدد فردي} = (\text{عدد زوجي})^{\text{عدد فردي}} - (\text{عدد} \quad)^{\text{عدد فردي}} \\ \text{عدد زوجي} = (\text{عدد فردي})^{\text{عدد زوجي}} - (\text{عدد} \quad)^{\text{عدد زوجي}} \\ \text{عدد زوجي} = (\text{عدد فردي})^{\text{عدد فردي}} - (\text{عدد} \quad)^{\text{عدد فردي}} \end{cases}$$

نستنتج من هذه الحالات الأربع أن العدد $(n^x - n^y)$ عدد زوجي دائما و ذلك كانت زوجية الأعداد x و y و n .

و منه : $\exists \, u \, \epsilon \, \mathbb{Z} \; ; \; n^x - n^y = 2u \quad (\circledcirc)$

من النتيجتين $\otimes$ و $\circledcirc$ نستنتج أن : $\begin{cases} 2/(n^x - n^y) \\ 5/(n^x - n^y) \end{cases}$

إذن الجداء 2×5 قاسم للعدد $(n^x - n^y)$. و ذلك لأن $5 \wedge 2 = 1$.

و بالتالي : $n^x \equiv n^y \, [10]$

الطريقة الثانية :

x و y عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

إذن n عدد فردي أو n عدد زوجي .

يعني : $n \equiv 1 \, [2]$ أو $n \equiv 0 \, [2]$.

يعني : $\begin{cases} n^x \equiv 1 \, [2] \\ n^y \equiv 1 \, [2] \end{cases}$ أو $\begin{cases} n^x \equiv 0 \, [2] \\ n^y \equiv 0 \, [2] \end{cases}$.

يعني : $(n^x - n^y) \equiv 0 \, [2]$ أو $(n^x - n^y) \equiv 0 \, [2]$.

و بالتالي 2 يقسم العدد $(n^x - n^y)$.

و لقد علمنا من قبل أن العدد 5 يقسم العدد $(n^x - n^y)$.

و لدينا كذلك : $2 \wedge 5 = 1$.

نستنتج إذن أن : 2×5 يقسم $(n^x - n^y)$

أي : $10/(n^x - n^y)$. و منه : $n^x \equiv n^y\ [10]$

ملاحظة : لقد استعملنا الخاصية التالية :

$$\begin{cases} a/b \\ c/b \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow ac/b$$

التمرين الثالث 4

ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E) .

إذن : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ x = 15k - 1 \quad et \quad y = 11k - 1$

نلاحظ أن : $(15k - 1) \equiv (11k - 1)\ [4]$

و ذلك لأن : $(15k - 1) - (11k - 1) = 4k = 0\ [4]$

إذن : $x \equiv y\ [4]$

و منه حسب نتيجة السؤال 3) ب) : $n^x \equiv n^y\ [10]$.

هذا يعني أن : n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري .

أو بتعبير أوضح نضع : $n^x = \overline{\alpha\beta}_{(10)}$ و $n^y = \overline{ms}_{(10)}$

رقم وحدات n^x عو الرقم β و رقم وحدات العدد n^y هو الرقم s .

$$\begin{aligned} n^x \equiv n^y\ [10] &\Rightarrow \overline{\alpha\beta}_{(10)} \equiv \overline{ms}_{(10)}\ [10] \\ &\Rightarrow (10\alpha + \beta) \equiv (10m + s)\ [10] \\ &\Rightarrow \beta \equiv s\ [10] \\ &\Rightarrow \beta = s\ ;\ car\ s > 10\ et\ \beta < 10 \end{aligned}$$

التمرين الرابع 1

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) = (+\infty) + \frac{1}{n} e^{-\infty} \\ &= (+\infty) + \frac{1}{n}(0) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f_n(x) &= \lim_{x\to-\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(x\,e^x + \frac{1}{n}\right) \\ &= (+\infty)\left(0^- + \frac{1}{n}\right) = +\infty \end{aligned}$$

التمرين الرابع 2 أ

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ إذن يجب علينا حساب : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{xe^x}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{0^-}\right) = -\infty \end{aligned}$$

إذن من النهايتين $\lim_{-\infty} f_n(x) = +\infty$ و $\lim_{-\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$ نستنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

التمرين الرابع 2 ب

لنحسب النهاية التالية : $\lim_{+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{xe^x}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{xe^x}\right) = 1 \end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (f_n(x) - 1x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{e^{-x}}{n} - x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{n}\right) = \frac{0}{n} = 0 \end{aligned}$$

إذن نحن أمام الوضعية التالية :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - 1x) = 0 \end{cases}$$

إذن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 1x + 0$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$ بجوار $+\infty$.

تحديد الوضع النسبي للمستقيم (D) و المنحنى $(\mathcal{C}_n)$.

لدينا : $f_n(x) = \left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right)$ و $(D) : y = x$

و لدينا : $f_n(x) - y = \left(x + \frac{e^{-x}}{n}\right) - x = \frac{e^{-x}}{n} > 0\ ;\ \forall x \epsilon \mathbb{R}$

إذن $(\mathcal{C}_n)$ يوجد فوق المستقيم (D) على $\mathbb{R}$ بأكمله .

التمرين الرابع 3

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. $f_n'(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n} = \frac{n - e^{-x}}{n}$

إذا كان : $x = -\ln n$ فإن : $f_n'(x) = 0$

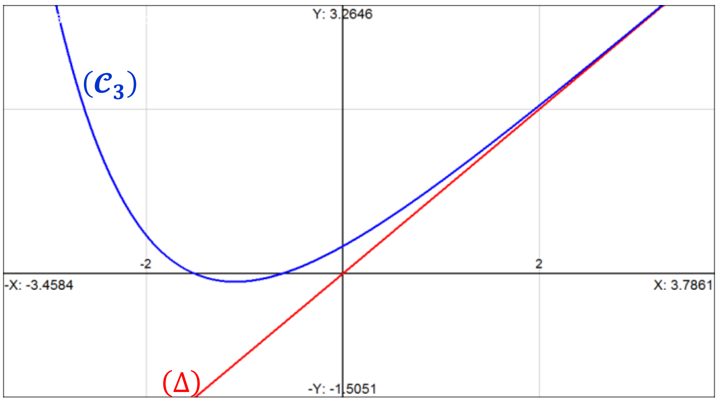
إذا كان : $x > -\ln n$ فإن : $f_n'(x) > 0$

إذا كان : $x < -\ln n$ فإن : $f_n'(x) < 0$

و لدينا : $f_n(-\ln n) = -\ln n + \frac{1}{n} e^{\ln n} = \ln\left(\frac{e}{n}\right)$

x	$-\infty$	$-\ln n$	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	0	$+$
f_n	$+\infty$ ↘	$\ln\left(\frac{e}{n}\right)$	↗ $+\infty$

التمرين الرابع 4



التمرين الرابع 5 أ

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\varphi(x)=\ln x-\frac{e}{x}$$

φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنها عبارة عن فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. و لدينا : $\varphi'(x)=\frac{x+e}{x^2}>0$

إذن φ دالة تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{e}{x}\right)=+\infty$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{e}{x}\right)=-\infty$

و لدينا : $\varphi(3)\approx 0{,}2>0$

نحصل إذن على جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	0	3	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$
φ	$-\infty$	$0{,}2$	$+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن : $(\forall x\geq 3)\ ;\ \varphi(x)>0$

إذن : $(\forall\, n\geq 3)\ ;\ \varphi(n)>0$

يعني : $(\forall\, n\geq 3)\ ;\ \ln n>\frac{e}{n}$

التمرين الرابع 5 ب

المرحلة الأولى :

لدينا f_n دالة تزايدية قطعا على المجال $[-\ln n\,;+\infty[$

من أجل $n\geq 3$ وجدنا أن $\ln n>\frac{e}{n}$. إذن : $-\ln n<\frac{-e}{n}$

و منه : $\left[\frac{-e}{n};+\infty\right[\subset[-\ln n;\,+\infty[$

أي أن f_n دالة تزايدية قطعا على $\left[\frac{-e}{n};+\infty\right[$

و بالأخص f_n دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\left[\frac{-e}{n},0\right]$,

لأن : $\left[\frac{-e}{n};0\right]\subset\left[\frac{-e}{n};+\infty\right[$

و بالتالي f_n تقابل من المجال $\left[\frac{-e}{n},0\right]$ نحو المجال $f_n\left(\left[\frac{-e}{n},0\right]\right)$.

من جهة ثانية لدينا : $f_n(0)=\frac{1}{n}>0$ (2) .

و لدينا كذلك $\boxed{f_n\left(\frac{-e}{n}\right)=\frac{-e}{n}+\frac{1}{n}e^{\frac{e}{n}}}$

$$\begin{aligned} n\geq 3 &\Rightarrow \frac{e}{n}\leq\frac{e}{3}<1\Rightarrow\frac{e}{n}<1\\ &\Rightarrow e^{\frac{e}{n}}<e\\ &\Rightarrow \frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}<\frac{e}{n}\\ &\Rightarrow \frac{e^{\frac{e}{n}}}{n}-\frac{e}{n}<0\\ &\Rightarrow \boxed{f_n\left(\frac{-e}{n}\right)<0}\quad(3)\end{aligned}$$

من النتيجتين (2) و (3) نستنتج أن : $f_n(0)-f_n\left(\frac{-e}{n}\right)<0$ (4)

و من النتيجتين (1) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسطية أن :

$$\boxed{\exists!\ y_n\in\left]\frac{-e}{n};0\right[\ ;\ f_n(y_n)=0}$$

المرحلة الثانية :

لدينا f_n دالة متصلة قطعا على $]-\infty;-\ln n]$.

إذن f_n تقابل من $]-\infty;-\ln n]$ نحو صورته $f_n(]-\infty;-\ln n])$

و لدينا $f_n(\,]-\infty;-\ln n]\,)=\left[\ln\left(\frac{e}{n}\right);+\infty\right[$

إذن f_n تقابل من المجال $]-\infty;-\ln n]$ نحو المجال $\left[\ln\left(\frac{e}{n}\right);+\infty\right[$

$$\begin{aligned} n\geq 3 &\Rightarrow \ln n\geq\ln 3\approx 1{,}09>1\\ &\Rightarrow \ln n>1\\ &\Rightarrow 1-\ln n<0\\ &\Rightarrow \ln e-\ln n<0\\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{e}{n}\right)<0\\ &\Rightarrow 0\in\left]\ln\left(\frac{e}{n}\right);+\infty\right[\end{aligned}$$

إذن 0 يمتلك سابقا واحدا x_n من المجال $]-\infty;-\ln n]$ بالتقابل f_n .

أو بتعبير آخر : $\exists!\ x_n\in]-\infty;-\ln n]\ ;\ f_n(x_n)=0$

أي : $\exists!\ x_n\leq-\ln n\ ;\ f_n(x_n)=0$

التمرين الرابع 5 ج

$$\begin{aligned} x_n\leq-\ln n &\Rightarrow x_n\leq\ln\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow x_n\leq\underbrace{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{\substack{n\infty\\ \boxed{-\infty}}}\\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(x_n)=-\infty}\end{aligned}$$

$$\frac{-e}{n}\leq y_n\leq 0\Rightarrow\underbrace{\frac{-e}{n}}_{\substack{n\infty\\ \mathbf{0}}}\leq y_n\leq\underbrace{0}_{\substack{n\infty\\ \mathbf{0}}}\Rightarrow\boxed{\lim_{n\infty}(y_n)=0}$$

التمرين الرابع 6 أ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}g(x)&=\lim_{x\to0^+}(-1-x\ln x)=-1-0^+\ln(0^+)\\ &=-1-0^+(-\infty)=Forme\ indéterminée\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}g(x)&=\lim_{x\to0^+}(-1-x\ln x)\\ &=-1-\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=-1-0=-1=g(0)\end{aligned}$$

إذن g دالة متصلة على يمين الصفر .

التمرين الرابع 6 ب

$$\begin{aligned} f_n(x_n)=0 &\Rightarrow x_n+\frac{e^{-x_n}}{n}=0\Rightarrow x_n=\frac{-e^{-x_n}}{n}\\ &\Rightarrow \boxed{\frac{-1}{x_n}=ne^{-x_n}}\quad(*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ g\left(\frac{-1}{x_n}\right)&=g(ne^{-x_n})\\ &=-1-\boxed{ne^{x_n}}\ln(n\,e^{x_n})\\ &=-1-\boxed{\frac{-1}{x_n}}\ln(n\,e^{x_n})\end{aligned}$$

$$= -1 + \frac{1}{x_n}(\ln n + x_n)$$
$$= -1 + \frac{\ln n}{x_n} + 1$$
$$= \frac{\ln n}{x_n}$$

و بالتالي : $\boxed{g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}}$

التمرين الرابع 6 ج

$$g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n} \Rightarrow \lim_{n\infty} g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \lim_{n\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$
$$\Rightarrow g\left(\frac{-1}{\lim\limits_{n\infty}(x_n)}\right) = \lim_{n\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$
$$\Rightarrow g(0) = \lim_{n\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{-1 = \lim_{n\infty}\left(\frac{\ln n}{x_n}\right)}$$

التمرين الخامس 1

$$0 \le t \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le 2t+1 \le 2x+1$$
$$\Rightarrow 1 \le 2t+1 \le 2x+1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2t+1} \le 1$$

التمرين الخامس 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0,1]$.

$$\frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)dt = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right)dt$$
$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t+1-1}{1+2t}\right)dt$$
$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{2t+1}{1+2t} - \frac{1}{1+2t}\right)dt$$
$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x 1\,dt - \frac{1}{2x^2}\int_0^x \left(\frac{2}{2+2t}\right)dt$$
$$= \left(\frac{1}{x^2}\right)[t]_0^x - \left(\frac{1}{2x^2}\right)[\ln|2t+1|]_0^x$$
$$= \left(\frac{1}{x^2}\right)x - \left(\frac{1}{2x^2}\right)(\ln(2x+1) - \ln 1)$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x+1)}{2x^2} = F(x)$$

التمرين الخامس 2 ب

$$\frac{1}{2x+1} \le \frac{1}{2t+1} \le 1 \Rightarrow \frac{t}{2x+1} \le \frac{t}{2t+1} \le t \; ; \; t \ge 0$$
$$\Rightarrow \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)dt \le \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)dt \le \frac{2}{x^2}\int_0^x t\,dt$$

car toutes ces fonctions sont continues sur $[0,+\infty[$ *et* $0 < x$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^2(2x+1)}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \le F(x) \le \frac{2}{x^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x$$
$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2x^2(2x+1)} \le F(x) \le \frac{2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2x+1} \le F(x) \le 1$$
$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{2x+1}\right)}_{x \to 0^+ \;\to\; 1} \le F(x) \le \underbrace{1}_{x \to 0^+ \;\to\; 1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} F(x) = 1 = F(0)$$
$$\Rightarrow F \text{ est continue à droite en } 0$$

التمرين الخامس 3

$$\int_0^x \left(\frac{2t}{2t+1}\right)dt = \int_0^x \underbrace{(2t)}_{u'(t)}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2t+1}\right)}_{v(t)}dt$$
$$= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)\,v'(t)\,dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2t+1}\right]_0^x - \int_0^x \frac{-2t^2}{(2t+1)^2}dt$$
$$= \frac{x^2}{2x+1} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt$$

التمرين الخامس 4 أ

في البداية نلاحظ أن الدالة $h : x \to \frac{x}{1+2x}$ متصلة على $\mathbb{R}/\left\{\frac{-1}{2}\right\}$

إذن فهي متصلة على كل مجال $]0;x]$ حيث $0 \le x \le 1$.

إذن h تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز H و تحقق :

$$\begin{cases} H'(x) = h(x) \\ H(x) = \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)dt \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)dt = \frac{2}{x^2}H(x)$$
$$\Rightarrow F'(x) = \left(\left(\frac{2}{x^2}\right)H(x)\right)'$$
$$= \left(\frac{2}{x^2}\right)' H(x) + \left(\frac{2}{x^2}\right)H'(x)$$
$$= \frac{-4x}{x^4}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)dt + \frac{2}{x^2}\left(\frac{x}{1+2x}\right)$$
$$= \frac{-2}{x^3}\int_0^x \left(\frac{2t}{1+2t}\right)dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$
$$= \frac{-2}{x^3}\left(\frac{x^2}{2x+1} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2\right)dt + \frac{2}{x(1+2x)}$$
$$= \frac{-2}{x(1+2x)} - \frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 + \frac{2}{x(1+2x)}$$
$$= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2$$

التمرين الخامس 4 ب

$$\frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{2t+1} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{t}{2x+1}\right) \leq \left(\frac{t}{2t+1}\right) \leq t \; ; \; t \geq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 \leq \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 \leq t^2 \; ; \; \begin{cases} t \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{2t+1}\right)^2 dt \leq \int_0^x t^2\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{x^3}\int_0^x \left(\frac{t}{2x+1}\right)^2 dt \geq F'(x) \geq \frac{-4}{x^3}\int_0^x t^2\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{x^3(2x+1)^2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x \geq F'(x) \geq \frac{-4}{x^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{-4}{3(2x+1)^2} \geq F'(x) \geq \frac{-4}{3}}$$

التمرين الخامس 4 ج

لدينا : $F(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right) dt = \frac{2}{x^2} H(x)$

نلاحظ أن F دالة متصلة على المجال $[0,x]$ و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,x[$ لأنها عبارة عن جداء دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$. إذن : حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists\, c \in\,]0,x[\; ; \; \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(c)$$

بما أن : $\forall\, x \in\,]0,1] \; ; \; \dfrac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

فإن : $\dfrac{-4}{3} \leq F'(c) \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

و ذلك لأن : $0 < c < x < 1$

و منه : $\dfrac{-4}{3} \leq \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0} \leq \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$

لدينا : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-4}{3(1+2x)^2}\right) = \frac{-4}{3}$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\frac{-4}{3}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{-4}{3}} \leq \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \leq \underbrace{\frac{-4}{3(1+2x)^2}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{-4}{3}}}$$

إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right) = \frac{-4}{3}}$$

و بالتالي F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر . و العدد المشتق على يمين الصفر هو $F'_d(0) = \frac{-4}{3}$.

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول I 1

$$x,y \in [1;+\infty[\;\Rightarrow\; x \geq 1 \;\; et \;\; y \geq 1$$
$$\Rightarrow\; \sqrt{x} \geq 1 \;\; et \;\; \sqrt{y} \geq 1$$
$$\Rightarrow\; \sqrt{x}+\sqrt{y}-1 \geq 1$$
$$\Rightarrow\; \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2 \geq 1$$
$$\Rightarrow\; (x \perp y) \in [1;+\infty[$$

إذن $\perp$ قانون تركيب داخلي في المجموعة I .

التمرين الأول I 2

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $I=[1;+\infty[$.

$$x \perp y = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2 = \left(\sqrt{y}+\sqrt{x}-1\right)^2 = y \perp x$$

إذن : $\forall\, x,y \in [1;+\infty[\;;\; x \perp y = y \perp x$

و بالتالي $\perp$ قانون تبادلي في المجموعة I .

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال $I=[1;+\infty[$

$$(x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x \perp y}+\sqrt{z}-1\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1+\sqrt{z}-1\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{x}+\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}-1\right)-1\right)^2$$
$$= \left(\sqrt{x}+\sqrt{y \perp z}-1\right)^2$$
$$= x \perp (y \perp z)$$

إذن $\perp$ قانون تجميعي في $I=[1;+\infty[$.

التمرين الأول I 3

ليكن ε العنصر المحايد للقانون $\perp$ في المجموعة $I=[1;+\infty[$.

$$\Rightarrow\; (\forall x \epsilon I) \;;\; x \perp \varepsilon = \varepsilon \perp x = x$$
$$\Rightarrow\; (\forall x \epsilon I) \;;\; \left(\sqrt{x}+\sqrt{\varepsilon}-1\right)^2 = x$$
$$\Rightarrow\; (\forall x \epsilon I) \;;\; \sqrt{x}+\sqrt{\varepsilon}-1 = \pm\sqrt{x}$$

في حالة $\sqrt{x}+\sqrt{\varepsilon}-1 = -\sqrt{x}$ لدينا : $\varepsilon = \left(1-2\sqrt{x}\right)^2$

لكن : $\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 \leq 1 \;;\; (x \geq 1)$ إذن : $\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 \notin I$

و في حالة $\sqrt{x}+\sqrt{\varepsilon}-1 = \sqrt{x}$. لدينا : $\varepsilon = 1 \in [1;+\infty[$

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا.

إذن 1 هو العنصر المحايد للقانون في المجموعة I .

التمرين الأول II 1

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E .

$$M(a)\times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E$$

إذن E جزء مستقر من المجموعة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول II 2 أ

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^*$.

$$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x)\times M(y) = \varphi(x)\times\varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

ليكن $M(y)$ عنصرا من $(E,\times)$.

و لنحل في $\mathbb{R}^*$ المعادلة $M(y) = (x)$ ذات المجهول x التالية :

$$\varphi(x) = M(y) \;\Leftrightarrow\; M(x) = M(y)$$
$$\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\; x = y$$

و بالتالي المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ و هو y .

أو بتعبير آخر : $\left(\forall\, M(y) \in E\right), \left(\exists!\, x = y \in \mathbb{R}^*\right) \;:\; \varphi(x) = M(y)$

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

التمرين الأول II 2 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يحولها إلى مجموعة الوصول .

لدينا φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

نستنتج إذن البنية الجبرية لـ $(E,\times)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ $(\mathbb{R}^*,\times)$ و ذلك عبر التشاكل التقابلي φ .

لدينا $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 .

و كل عنصر x يقبل $\frac{1}{x}$ كمماثل .

إذن : $(E,\times)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$

و كل مصفوفة $M(x)$ تقبل مماثلة و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\begin{cases} \varphi(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x}-1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

التمرين الأول II 2 ج

$$H_n \in H \;\Rightarrow\; H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\; H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2(2^n-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\; H_n = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; x = 2^n$$

و لدينا : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ إذن H جزء غير فارغ من E .

لتكن $\begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين من H

$$\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2^{n-m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

إذن $(H,\times)$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين الثاني I 1 أ

$$\left(1+\frac{2}{3}i\right)^2 = 1-\frac{4}{9}+\frac{4i}{3} = \frac{5}{9}+\frac{4}{3}i = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}+4i\right)$$

$$\left(1+\frac{2}{3}i\right)^2 - 4\left(1+\frac{2}{3}i\right)\left(1+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{5}{3}+4i\right)$$
$$= \left(1+\frac{2}{3}i\right)^2 - 4\left(1+\frac{2}{3}i\right)^2 + 3\left(1+\frac{2}{3}i\right)^2$$
$$= 4\left(1+\frac{2}{3}i\right)^2 - 4\left(1+\frac{2}{3}i\right)^2 = 0$$

إذن العدد العقدي $\left(1+\frac{2}{3}i\right)$ حل للمعادلة (E) .

التمرين الثاني | I 1 ب

تذكير : إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة $az^2+bz+c=0$

فإن $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$ و $z_1z_2=\frac{c}{a}$.

نستعمل العلاقة : $z_1z_2=\frac{c}{a}$ نحصل على :

$$z_1z_2=\left(\frac{5}{3}+4i\right) \Rightarrow z_2=\frac{\left(\frac{5}{3}+4i\right)}{\left(1+\frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Rightarrow z_2=\frac{\left(\frac{5}{3}+4i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}{\left(1+\frac{2}{3}i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Rightarrow z_2=\frac{9}{13}\left(\frac{13}{3}+\frac{26}{9}i\right)$$

$$\Rightarrow z_2=3+2i$$

$$\Rightarrow z_2=3\left(1+\frac{2}{3}i\right)$$

$$\Rightarrow z_2=3\,z_1$$

التمرين الثاني | II 1 أ

لدينا : $P=r(A)$ إذن حسب الكتابة العقدية للدوران r نجد :

$$(z_P-z_\Omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z_A-z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow (p-\omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p=e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)+\omega} \quad (1)$$

و بنفس الطريقة : لدينا : $B=r(Q)$

$$B=r(Q) \Leftrightarrow (z_B-z_\Omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z_Q-z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow (b-\omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(q-\omega)$$

$$\Leftrightarrow q\,e^{\frac{i\pi}{3}}=(b-\omega)+\omega\,e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{q=e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)+\omega} \quad (2)$$

التمرين الثاني | II 1 ب

في البداية لدينا الأشياء التالية :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)&=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)&=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}}$$

$$\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{\frac{-4i\pi}{3}}-e^{-i\pi}\right)}{\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$$

$$=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)+1\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)}$$

$$=\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+1\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

التمرين الثاني | II 1 ج

نستعمل نتيجة السؤال $II(1$ أ) :

لدينا :

$$(p-a)=\omega+a\,e^{\frac{i\pi}{3}}-\omega\,e^{\frac{i\pi}{3}}-a$$

$$=\omega\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)+a\left(e^{\frac{i\pi}{3}}-1\right)$$

$$=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)$$

إذن :

$$(3)\quad \boxed{(p-a)=\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}$$

و لدينا :

$$(q-b)=\omega+b\,e^{\frac{-i\pi}{3}}-\omega\,e^{\frac{-i\pi}{3}}-b$$

$$=\omega\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)+b\left(e^{\frac{-i\pi}{3}}-1\right)$$

$$=\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)(\omega-b)$$

إذن :

$$(4)\quad \boxed{(q-b)=\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)(\omega-b)}$$

و لدينا : $\left(\frac{p-a}{q-b}\right)=\left(\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$

إذن : $\left(\frac{p-a}{q-b}\right)=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$

التمرين الثاني | II 2 أ

ننطلق من العلاقة $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ و نستعمل العلاقة (5)

$$\left(\frac{p-a}{q-b}\right)=\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{2i\pi}=1$$

إذن : $(p-a)=(q-b)$ يعني : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BQ}$

و منه نستنتج حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع أن $APBQ$ متوازي الأضلاع .

التمرين الثاني | II 2 ب

في هذا السؤال نستعمل النتيجة (3) و العلاقة $\frac{\omega-a}{\omega-b}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

هذه العلاقة تصبح : $(\omega-b)=e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)$

$$(b-a)=(\omega-a)-(\omega-b)$$

$$=(\omega-a)-e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)$$

$$=(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{p-a}=\frac{(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}{\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)}=\frac{1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1}{4}(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})=i\sqrt{3}$$

و بالتالي : $\left(\frac{b-a}{p-a}\right) = i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \arg(i\sqrt{3})\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$\Rightarrow$ زاوية قائمة $P\hat{A}B$

و بما أن $APQB$ متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة .
إذن $APQB$ مستطيل .

التمرين الثالث 1 أ

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 .
إذن 503 عدد أولي .

التمرين الثالث 1 ب

بما أن 7 و 503 عددان أوليان .
فإنه حسب $Fermat$: $7^{503-1} \equiv 1\ [503]$
يعني : $7^{502} \equiv 1\ [503]$
يعني : $(7^{502})^4 \equiv 1^4\ [503]$
يعني : $7^{2008} \equiv 1\ [503]$

التمرين الثالث 2

لدينا $(1;8)$ حل خاص للمعادلة (E) .
و ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) . إذن : $\begin{cases} 49\times 1 - 6\times 8 = 1 \\ 49x - 6y = 1 \end{cases}$
ننجز عملية الطرح بين هاتين المعادلتين طرفا بطرف نجد :
$(*)\quad 49(x-1) = 6(y-8)$
من هذه المتساوية نستنتج أن 49 يقسم الجداء $6(y-8)$.
إذن 49 يقسم $(y-8)$ لأن $7^2 \wedge 6 = 1$ و ذلك حسب $Gauss$.
يعني : $y = 49k + 8\ ;\ (\exists k\epsilon\mathbb{Z})$
نعوض y بـ $(49k+8)$ في $(*)$ نجد $49(x-1) = 6(49k)$
يعني : $x = 6k + 1$
نستنتج إذن أن الزوج $(6k+1; 49k+8)$ حل للمعادلة (E) .
عكسيا لدينا : $49(6k+1) - 6(49k+8) = 1$
و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تُكتب على شكل :
$S = \{\,(6k+1\,;49k+8)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\,\}$

التمرين الثالث 3 أ

نعلم أنه إذا كانت $(q^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي q المخالف لـ 1 . فإن : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$
لدينا $(7^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 7 .
إذن : $1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007} = \dfrac{7^{2007+1} - 1}{7-1}$

$$\Leftrightarrow\ N = \frac{7^{2008} - 1}{6}$$
$$\Leftrightarrow\ 7^{2008} - 6N = 1$$
$$\Leftrightarrow\ 7^2 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$
$$\Leftrightarrow\ 49 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$
$\Leftrightarrow$ $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E)

التمرين الثالث 3 ب

لدينا : $\begin{cases} 1 \equiv 1\ [4] \\ 7 \equiv -1\ [4] \end{cases}$

و لدينا : $\begin{cases} 7^2 \equiv 1\ [4] \\ 7^3 \equiv -1\ [4] \end{cases}$

و لدينا : $\begin{cases} 7^4 \equiv 1\ [4] \\ 7^5 \equiv -1\ [4] \end{cases}$

و لدينا : $\begin{cases} 7^{2006} \equiv 1\ [4] \\ 7^{2007} \equiv -1\ [4] \end{cases}$

نجمع جميع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :
$1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2006} + 7^{2007} \equiv 0\ [4]$
يعني : $N \equiv 0\ [4]$
و لدينا حسب نتيجة السؤال 1) ب) : $7^{2008} \equiv 1\ [503]$
إذن : $503/(7^{2008} - 1)$
و نعلم أن $(7^{2008} - 1) = 6N$ إذن $503/6N$.
نعلم أن 503 أولي و 2×3 هو التفكيك الأولي لـ 6 إذن : $6 \wedge 503 = 1$
و منه حسب $Gauss$ نستنتج أن : $503/N$
و بالتالي : $N \equiv 0\ [503]$

التمرين الثالث 3 ج

لدينا 503 عدد أولي . و لدينا 2^2 هو التفكيك الأولي للعدد 4 .
إذن : $503 \wedge 4 = 1$
و نعلم أن : $4/N$ و $503/N$.
إذن : $4 \times 503/N$. يعني : $2012/N$.

التمرين الرابع I 1

لدينا : $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \left(\dfrac{(1+x) - x}{(1+x)^2}\right) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$
نلاحظ أنه إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) = 0$.
و إذا كان $x \geq 0$ فإن $g'(x) \geq 0$.
إذن g دالة تزايدية على المجال $[0;+\infty[$.

التمرين الرابع I 2

لدينا : $x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ \Rightarrow\ x \geq 0$
$$\Rightarrow\ g(x) \geq g(0) = 0$$
$$\Rightarrow\ g(x) \geq 0$$
إذن : $\forall\, x\ \epsilon\ [0;+\infty[\ ;\ g(x) \geq 0$

التمرين الأول II 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(\ln(1+e^{-x}))$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}\right)$$
$$= \lim_{\substack{u\to0^+ \\ u=e^{-x}}}\left(\frac{\ln(1+u) - \ln(1+0)}{u-0}\right)$$
$$= (\ln(1+u))'_{u=0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} e^x(\ln(1+e^{-x}))\\ &= \lim_{x\to-\infty} e^x\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} e^x\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} e^x(\ln(e^x+1)-\ln(e^x))\\ &= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{0^+}\ln(\underbrace{e^x}_{0^+}+1)-\underbrace{xe^x}_{0^-}=0\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 2

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x\ln(1+e^{-x})+e^x\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\\ &= e^x\left(\ln(1+e^{-x})-\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\right)\\ &= e^x g(e^{-x})\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 3

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ ;\ e^x>0\ \ et\ \ e^{-x}>0$

$\Longrightarrow\ (\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x>0\ \ et\ \ g(e^{-x})>0$

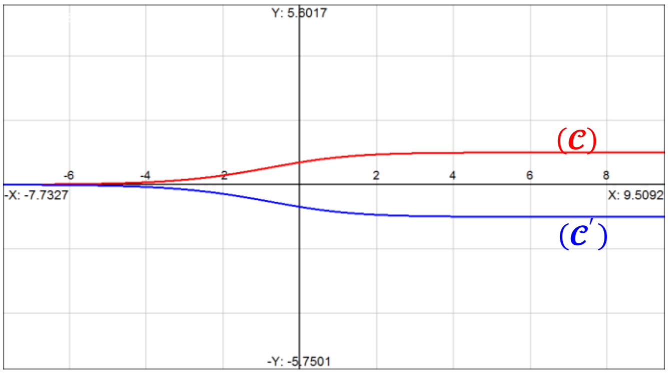
$\Longrightarrow\ (\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x g(e^{-x})>0$

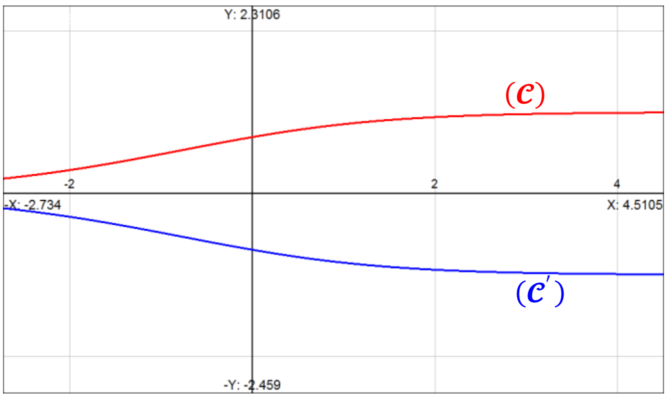
$\Longrightarrow\ (\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f'(x)>0$

$\Longrightarrow$ f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	0 ↗	1

التمرين الرابع II 4





التمرين الرابع II 5

$$\begin{aligned}x\in\,]-1,0[\ &\Longrightarrow\ -1<x<0\\ &\Longrightarrow\ e^x<1\ \ et\ \ e^{-x}<e\\ &\Longrightarrow\ 0<e^x g(e^{-x})<g(e)\\ &\Longrightarrow\ 0<f'(x)<g(e)\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 6

$h(x)=f(x)+x\ \Longrightarrow\ h'(x)=f'(x)+1>1>0$

$\Longrightarrow$ h تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

إذن h تقابل من أي مجال $[x,y]$ يوجد ضمن $\mathbb{R}$ نحو صورته بالدالة h
نختار المجال $[-1;0]$.

إذن h تقابل من $[-1;0]$ نحو $f([-1;0])$.

و لدينا : $h([-1;0])=[h(-1);h(0)]\approx\left[\frac{-1}{2};\ln 2\right]$

و بما أن : $0\in\left[\frac{-1}{2};\ln 2\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالتقابل h في المجال $[-1;0]$.

و بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha\in[-1;0]\ ;\ h(\alpha)=0$

و بما أن : $h(-1)\neq h(0)\neq 0$

فإن : $\exists!\ \alpha\in\,]-1;0[\ ;\ h(\alpha)=0$

أي : $\exists!\ \alpha\in\,]-1;0[\ ;\ f(\alpha)+\alpha=0$

التمرين الرابع II 7 أ

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n):\ -1\leq u_n\leq 0$

من أجل $n=0$ لدينا : $-1\leq u_0=0\leq 0$

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن m عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (P_m) صحيحة .

يعني : $-1\leq u_m\leq 0$

لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ f(x)\geq 0$

إذن : $f(u_m)\geq 0\ \ (1)$

و لدينا حسب الافتراض : $u_m\leq 0$

إذن $f(u_m)\leq\ln 2$ لأن f تزايدية على $\mathbb{R}$.

و منه : $f(u_m)\leq 1$ لأن : $\ln 2\approx 0{,}6<1$.

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $0\leq f(u_m)\leq 1$

و منه : $-1\leq -f(u_m)\leq 0$

يعني : $-1\leq u_{m+1}\leq 0$

و هذا يعني أن العبارة (P_{m+1}) صحيحة .

و بذلك نحصل على الوضعية التالية :
$$\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_m)\ \Longrightarrow\ (P_{m+1})\ ;\ (\forall m\in\mathbb{N})\end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ -1\leq u_n\leq 0$

التمرين الرابع II 7 ب

لدينا f دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله . نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن $\mathbb{R}$. نختار المجال الذي طرفاه u_n و α و الذي سوف نرمز له بالرمز $\overleftrightarrow{[\alpha,u_n]}$ لأنه لا ندري من الأكبر هل u_n أو α .

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow\ \exists\, c\in\overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ \frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}=f'(c)\\ &\Longrightarrow\ \exists\, c\in\overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|f'(c)|\\ &\Longrightarrow\ \exists\, c\in\overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ |f(u_n)-f(\alpha)|=|f'(c)|\cdot|u_n-\alpha|\\ &\Longrightarrow\ \exists\, c\in\overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ |-u_{n+1}+\alpha|=|f'(c)|\cdot|u_n-\alpha|\\ &\Longrightarrow\ \exists\, c\in\overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|=|f'(c)|\cdot|u_n-\alpha|\\ &\Longrightarrow\ \exists\, c\in\overleftrightarrow{]\alpha,u_n[}\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq g(e)|u_n-\alpha|\\ &\qquad\qquad car\ :\ 0\leq f'(x)\leq g(e)\\ &\Longrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq g(e)|u_n-\alpha|\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 7 ج

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) :\ |u_n-\alpha| \le (g(e))^n$

من أجل $n=0$ لدينا : $|u_0-\alpha|<1\ car\ \alpha \in]-1;0[$

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $m\in\mathbb{N}$ و نفترض أن $|u_m-\alpha|\le (g(e))^m$.

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في $g(e)$ نحصل على :

$$g(e)\,|u_m-\alpha| \le (g(e))^{m+1}$$

إذن : $|u_{m+1}-\alpha| \le g(e)|u_m-\alpha| \le \left(g(e)\right)^{m+1}$

أي : $|u_{m+1}-\alpha|\le \left(g(e)\right)^{m+1}$

يعني أن العبارة (P_{m+1}) صحيحة .

نحصل إذن على الوضعية التالية : $\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_m) \Rightarrow (P_{m+1})\ ;\ (\forall m\in\mathbb{N}) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le (g(e))^n$

التمرين الرابع II 7 د

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le (g(e))^n$

نلاحظ أن $(g(e))^n$ متتالية هندسية أساسها $g(e)$ و هو عدد موجب

و أصغر من 1 لأن $g(e)<0{,}6<1$. إذن : $\lim\limits_{n\infty}(g(e))^n=0$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$(pour\ n\to\infty)\ ;\ |u_n-\alpha|\le \underbrace{(g(e))^n}_{n\infty \searrow 0}$$

أو بتعبير أوضح :

$$-\underbrace{(g(e))^n}_{n\infty \searrow 0} \le (u_n-\alpha) \le \underbrace{(g(e))^n}_{n\infty \searrow 0}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim(u_n-\alpha)=0$

أي : $\lim(u_n)=\alpha$

التمرين الخامس 1

$$F(1)=\int_1^1\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

التمرين الخامس 2 أ

لدينا الدالة $t\longrightarrow \frac{\ln t}{1+t^2}$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$.

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ على المجال $]0;+\infty[$.

و الدالة ψ تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} \psi'(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2} \\ \psi(x)=\displaystyle\int_0^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^{0}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt+\int_0^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt \\ &= \int_0^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt-\int_0^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt \\ &= \psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

إذن : $F(x)=\psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right)$

نلاحظ أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \psi'(x)-\left(\frac{1}{x}\right)'\psi'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right) \\ &= \left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)=0 \end{aligned}$$

بما أن : $\forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\ F'(x)=0$

فإن : $(\forall x>0), (\exists!\, c\in\mathbb{R})\ ;\ F(x)=c$

لدينا : $c=F(1)=0$

إذن : $(\forall x>0)\ ;\ F(x)=0$

التمرين الخامس 3

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt \\ \Rightarrow\ F(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x}\underbrace{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}_{v'(t)}\underbrace{(\ln t)}_{u(t)}dt \\ \Rightarrow\ F(x) &= [v(t)u(t)]_{\frac{1}{x}}^{x}-\int_{\frac{1}{x}}^{x}v(t)u'(t)\,dt \\ \Rightarrow\ F(x) &= [Arctan(t)\,(\ln t)]_{\frac{1}{x}}^{x}-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt \\ \Rightarrow\ F(x) &= Arctan(x)\cdot\ln x - Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \\ &\quad -\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt \\ \Rightarrow\ F(x) &= \left(Arctan(x)+Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\ln x - \\ &\quad -\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt \end{aligned}$$

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\varphi(x)=Arctan\left(\frac{1}{x}\right)+Arctan(x)$$

لدينا φ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$.

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{-1}{x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{1+x^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=0 \end{aligned}$$

إذن φ دالة ثابتة على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

أو بتعبير آخر :

$$\begin{cases} \forall x\in\,]-\infty,0[\ ;\ \varphi(x)=c_1\in\mathbb{R} \\ \forall x\in\,]0,+\infty[\ ;\ \varphi(x)=c_2\in\mathbb{R} \end{cases}$$

نعوض x بالقيمتين 1 و -1 و ذلك من أجل إيجاد c_1 و c_2 .

$$\begin{cases} c_1 = \varphi(-1) = 2\,Arctan(-1) = 2\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ c_2 = \varphi(1) = 2\,Arctan(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

و بالتالي : $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \;;\; \forall\, x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} \;;\; \forall\, x < 0 \end{cases}$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو : $(\forall x > 0) \;;\; \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\Longrightarrow\ (\forall x > 0) \;;\; Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow\ (\forall x > 0) \;;\; Arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - Arctan(x) \quad (**)$$

التمرين الخامس 4

نستغل النتيجتين $(*)$ و $(**)$ للإجابة على هذا السؤال .

لدينا : $(\forall\, x > 0) \;;\; F(x) = 0$

$$\Longrightarrow\ \left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right) + Arctan(x)\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t}\,dt = 0$$

$$\Longrightarrow\ \left(\frac{\pi}{2}\right)\ln x - \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t}\,dt = 0$$

$$\Longrightarrow\ \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t}\,dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)\ln x$$

$$\Longrightarrow\ \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{Arctan(t)}{t}\,dt = \ln x$$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2013

التمرين الأول

1 أ

المجموعة $\mathbb{Z}$ مزودة بالقانون $*$ المعرف بما يلي :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ x*y = x+y-2$$

لدينا $*$ قانون تركيب داخلي لأنه إذا كان x و y عنصرين من $\mathbb{Z}$

فإن $(x+y-2)\in\mathbb{Z}$

<u>**لنبرهن على أن $*$ تبادلي :**</u>

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أن القانون $+$ تبادلي في الحلقة الواحدية التبادلية $(\mathbb{Z},+,\times)$

إذن : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ x*y = x+y-2 = y+x-2 = y*x$

إذن $*$ تبادلي في $\mathbb{Z}$.

<u>**لنبرهن على أن القانون $*$ تجميعي في $\mathbb{Z}$.**</u>

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من $\mathbb{Z}$

لدينا :
$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x*y)+z-2 = x+y-2+z-2\\ &= x+(y+z-2)-2\\ &= x+(y*z)-2\\ &= x*(y*z)\end{aligned}$$

إذن : $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ (x*y)*z = x*(y*z)$

و منه فإن القانون $*$ تجميعي في المجموعة $\mathbb{Z}$.

1 ب

ليكن ε العنصر المحايد للقانون $*$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

إذن : $(\forall x\in\mathbb{Z})\ ;\ x*\varepsilon = \varepsilon*x = x$

لتحديد قيمة ε ننطلق من التعبير : $x*\varepsilon = x$

إذن : $x+\varepsilon-2 = x$ و منه : $\varepsilon = 2\in\mathbb{Z}$

إذن 2 هو العنصر المحايد للقانون $*$ في $\mathbb{Z}$.

1 ج

لكي تكون $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا من $\mathbb{Z}$ بالقانون $*$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{Z}$. و x' مماثله بالنسبة للقانون $*$.

إذن : $x*x' = x'*x = 2$

ننطلق من المتساوية التالية : $x*x' = 2$

إذن : $x+x'-2 = 2$ يعني : $x' = 4-x$

بما أن $x\in\mathbb{Z}$ و $4\in\mathbb{Z}$ فإن : $(4-x)\in\mathbb{Z}$

و بالتالي : كل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يقبل مماثلا في $\mathbb{Z}$ و هو $(4-x)$.

<u>**خلاصة**</u> : لقد حصلنا على المعلومات التالية :

- $*$ داخلي و تبادلي و تجميعي في $\mathbb{Z}$.
- $*$ يقبل عنصرا محايدا و هو 2 .
- كل عنصر x من $\mathbb{Z}$ يمتلك مماثلا و هو $(4-x)$.

إذن : $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية .

2 أ

نعتبر التطبيق f المعرف بما يلي :
$$f:\ (\mathbb{Z},\times)\ \mapsto\ (\mathbb{Z},\top)$$
$$x\ \mapsto\ f(x)=x+2$$

لكي يكون f تشاكلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ f(x\times y) = f(x)\top f(y)$$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{Z}$.

لدينا :
$$\begin{aligned}f(x)\top f(y) &= (x+2)\top(y+2)\\ &= (x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6\\ &= xy-2 = f(x\times y)\end{aligned}$$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$(\forall y\in\mathbb{Z}),(\exists!\,x\in\mathbb{Z})\ ;\ f(x)=y$$

يعني : المعادلة $f(x)=y$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{Z}$.

ليكن y عنصرا من المجموعة $\mathbb{Z}$. لدينا :
$$\begin{aligned}f(x)=y &\iff x+2=y\\ &\iff x=y-2\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

إذن : $(\forall y\in\mathbb{Z}),(\exists!\,x=y-2\in\mathbb{Z})\ ;\ f(x)=y$

و هذا يعني أن التطبيق f تقابل من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$.

<u>**خلاصة**</u> : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$.

2 ب

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد نسبية ، لدينا من جهة أولى :

$$\begin{aligned}(x*y)\top z &= (x*y)z-2(x*y)-2z+6\\ &= (x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6\\ &= xz+yz-4z-2x-2y-2z+10\end{aligned}$$

و من جهة ثانية لدينا :
$$\begin{aligned}(x\top z)*(y\top z) &= (x\top z)+(y\top z)-2\\ &= (xz-2x-2z+6)+(yz-2y-2z+6)-2\\ &= xz+yz-4z-2x-2y-2z+10\end{aligned}$$

نستنتج أن : $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\ ;\ (x*y)\top z = (x\top z)*(y\top z)$

أي : القانون $\top$ توزيعي على $*$ في $\mathbb{Z}$.

3

لنبين أن : $(\mathbb{Z},*,\top)$ <u>**حلقة**</u> <u>**تبادلية**</u> و <u>**واحدية**</u>

- $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية
- $\top$ قانون تجميعي
- $\top$ توزيعي على $*$

- $\top$ يقبل عنصرا محايدا في $\mathbb{Z}$

- $\top$ تبادلي في $\mathbb{Z}$

حصلنا من خلال الأجوبة السابقة على المعلومتين التاليتين :

$\boxed{(\mathbb{Z},*)\ \text{زمرة تبادلية}}$ (1) و $\boxed{\text{القانون } \top \text{ توزيعي على القانون } *}$ (2)

لدينا f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\top)$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{Z},\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(\mathbb{Z},\times)$ و ذلك عن طريق التطبيق f .

لأنه و كما نعلم : التشاكل التقابلي يُحوِّل البنية الجبرية لمجموعة الأنطلاق إلى مجموعة الوصول.

بما أن الضرب $\times$ تبادلي و تجميعي في $(\mathbb{Z},\times)$ و يقبل 1 كَعُنصر محايد.

فإن : $\boxed{\text{القانون } \top \text{ تبادلي في } \mathbb{Z}}$ (3) و $\boxed{\top \text{ قانون تجميعي في } \mathbb{Z}}$ (4)

و $\boxed{f(1)=3 \text{ عنصر محايد للقانون } \top \text{ في } \mathbb{Z}}$ (5)

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(\mathbb{Z},*,\top)$ حلقة تبادلية و واحدية وحدتها العدد النسبي 3 .

4 أ

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{Z}$. لدينا :

$$\begin{aligned}x\top y=2 &\iff xy-2x-2y+6=2\\ &\iff xy-2x-2y+4=0\\ &\iff x(y-2)-2(y-2)=0\\ &\iff (y-2)(x-2)=0\\ &\iff (y-2)=0 \ \text{ أو } \ (x-2)=0\\ &\iff y=2 \ \text{ أو } \ x=2\end{aligned}$$

4 ب

تكون الحلقة $(\mathbb{Z},\top,*)$ كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .

ليكن x قاسما للصفر في $(\mathbb{Z},\top,*)$.

إذن : $\exists\, y \in \mathbb{Z}\backslash\{2\}\ ;\ x \top y = y \top x = 2$

و منه حسب نتيجة السؤال 4) أ) : $x = 2$ أو $y = 2$

إذن لا وجود لأي قاسم للصفر لأن قواسم الصفر إن وجدت يجب أن تخالف العنصر المحايد 2 و بالتالي $(\mathbb{Z},\top,*)$ حلقة كاملة .

4 ج

تكون الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z},\top,*)$ جسما إذا كان كل عنصر من $\mathbb{Z}\backslash\{2\}$ يقبل مماثلا (أو مقلوبا) في $(\mathbb{Z},\top)$.

و لذلك نحدد أولا الصيغة العامة لمماثل عنصر x من $\mathbb{Z}$ بالقانون $\top$.

ليكن y مماثل x بالنسبة للقانون $\top$. إذن :

$$\begin{aligned} x \top y = 3 &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3 \\ &\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x-2) = (2x-3) \\ &\Leftrightarrow y = \left(\frac{2x-3}{x-2}\right) \end{aligned}$$

و نلاحظ أن الكمية $\left(\frac{2x-3}{x-2}\right)$ ليست دائما عنصرا من $\mathbb{Z}$.

العنصر $1 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مماثل 1 بالنسبة لـ $\top$

و العنصر $3 \in \mathbb{Z}$ مثلا هو مماثل 3 بالنسبة لـ $\top$

لكن العنصر $\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$ هو مماثل 7 بالنسبة للقانون $\top$.

إذن توجد عناصر من $\mathbb{Z}$ لا تقبل مماثلا في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لـ $\top$.

و بالتالي فالحلقة $(\mathbb{Z},\top,*)$ ليست جسما .

التمرين الثاني

I 1

لدينا من جهة أولى :

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2\left(3+i\sqrt{3}\right)^2 - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= a^2\left(6+6i\sqrt{3}\right) - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= 6a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) - 8a^2\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ &= \boxed{-2a^2\left(1+i\sqrt{3}\right)}\ (\mathbf{1}) \end{aligned}$$

و من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned} a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 &= a^2\left(1-3-2i\sqrt{3}\right) \\ &= a^2\left(-2-2i\sqrt{3}\right) \\ &= \boxed{-2a^2\left(1+i\sqrt{3}\right)}\ (\mathbf{2}) \end{aligned}$$

نستنتج إذن من (1) و (2) أن : $\Delta = a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$

I 2

لدينا : $\Delta = a^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$

إذن : المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a - \left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4} \\ &= \frac{3a+i\sqrt{3}a+a-i\sqrt{3}a}{4} = \frac{4a}{a} = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a + \left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4} \\ &= \frac{3a+i\sqrt{3}a-a+i\sqrt{3}a}{4} = \frac{2a+2i\sqrt{3}a}{4} = \frac{a\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2} \end{aligned}$$

II 1

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا : $\dfrac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)} = \dfrac{a-0}{ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$

إذن : $\begin{cases} \dfrac{OA}{OB} = 1 \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

و هذا يعني أن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O و قياس إحدى زواياه و هي الزاوية $\widehat{O}$ يساوي $60°$.

إذن : OAB مثلث متساوي الأضلاع .

الطريقة الثانية :

لدينا : $OA = |aff(A) - aff(O)| = |a - 0| = |a|$

و لدينا : $\begin{aligned} OB &= |aff(B) - aff(O)| \\ &= |b - 0| = \left|ae^{\frac{i\pi}{3}}\right| = |a| \end{aligned}$

و كذلك : $\begin{aligned} AB &= |aff(B) - aff(A)| = |b - a| \\ &= \left|ae^{\frac{i\pi}{3}} - a\right| = \left|a\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1\right)\right| = |a|\cdot\left|e^{\frac{i\pi}{3}} - 1\right| \\ &= |a|\cdot\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = |a|\cdot\left|\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |a| \end{aligned}$

نستنتج إذن أن : $OA = OB = AB$ و $A \neq B \neq C$

إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

II 2 أ

لدينا r دوران مُعَرف بما يلي : $(\mathcal{P}) \xrightarrow{r_M\left(\frac{\pi}{3}\right)} (\mathcal{P})$

ننطلق من الكتابة : $A_1 = r^{-1}(A)$ إذن : $r(A_1) = A$

و منه حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$\left(aff(A) - aff(M)\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(aff(A_1) - aff(M)\right)$$

يعني : $(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z)$

يعني : $(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}a_1 - e^{\frac{i\pi}{3}}z$

يعني : $e^{\frac{i\pi}{3}}a_1 = a - z + e^{\frac{i\pi}{3}}z$

يعني : $a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}\left(a - z + e^{\frac{i\pi}{3}}z\right)$

يعني : $a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}a - e^{\frac{-i\pi}{3}}z + z$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} e^{\frac{-i\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

إذن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + z$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

و بنفس الطريقة ننطلق من الكتابة $r(B) = B_1$.

إذن حسب التعريف العقدي للدوران r نكتب :

$$\left(aff(B_1) - aff(M)\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(aff(B) - aff(M)\right)$$

يعني : $(b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left(ae^{\frac{i\pi}{3}} - z\right)$

يعني : $b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z$

و لدينا : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و نضيف كذلك : $e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن بالرجوع إلى آخر تعبير لِـ b_1 نكتب :

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

$$= \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

II 2 ب

بصفة عامة ، لكي نبرهن على أن رباعيا ما متوازي أضلاع ، توجد عدة طرق من بينها : القطران لهما نفس المنتصف و صيغة التوازي و الصيغة المتجهية و صيغة التقايس . لكن أرى أن أسهل طريقة في هذا السؤال هي أن نبرهن أن كل ضلعين متقابلين متقايسان . لأن المسافة في المستوى العقدي ما هي إلا معيار لعدد عقدي .

لنبرهن أن : $OA_1 = B_1M$ و $OB_1 = A_1M$

لدينا : $OA_1 = |aff(A_1) - aff(O)| = |a_1|$

و لدينا : $B_1M = |aff(M) - aff(B_1)| = |z - b_1|$

$$= \left|z - \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right| = |a_1|$$

إذن : $\boxed{OA_1 = B_1M}$ (1)

و بنفس الطريقة لدينا : $OB_1 = |aff(B_1) - aff(O)| = |b_1|$

و لدينا كذلك : $A_1M = |aff(M) - aff(A_1)| = |z - a_1|$

$$= \left|z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right|$$

$$= \left|\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z\right| = |b_1|$$

إذن : $\boxed{OB_1 = A_1M}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين في الرباعي OA_1MB_1 متقايسان . إذن : OA_1MB_1 متوازي أضلاع

II 3 أ

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$

و منه : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$ يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

و منه : $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$ إذن : $\boxed{e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\left(\frac{a}{b}\right)}$

نوظف بعد ذلك هذه المتساوية فيما سيأتي :

لدينا : $\begin{cases} r(A_1) = A \\ r(B) = B_1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} (a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z) \\ (b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(b - z) \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} (z - a_1) = e^{\frac{-i\pi}{3}}(z - a) \\ (z - b_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \end{cases}$

أي : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني : $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}\left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني : $\boxed{\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \frac{-a}{b}\left(\frac{z - b}{z - a}\right)}$

بإمكاننا أن نجيب دون استعمال المعطيين $r(A_1) = A$ و $r(B) = B_1$

و هذا ما سوف أعرضه الآن كطريقة أخرى للجواب .

الطريقة الثانية :

لدينا : $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $\frac{a}{b} = e^{\frac{-i\pi}{3}}$

و من هاتين الكتابتين نستنتج ما يلي :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = e^{\frac{-i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

إذن : $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1}$

و لدينا كذلك : $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ إذن : $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$

إذن : $\boxed{\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1}$

و من هذه النتيجة نكتب : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

يعني : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

نحن الآن مُسَلحون بمتساويتين ثمينتين :

$$(1)\quad \boxed{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1} \quad \text{و} \quad \boxed{\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (2)$$

ننطلق إذن من نتيجتي السؤال 2) أ) و نوظف المتساوية (1) :

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = e^{\frac{-i\pi}{3}}a + e^{\frac{i\pi}{3}}z \\ b_1 = -e^{\frac{-i\pi}{3}}a + e^{\frac{-i\pi}{3}}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{b}{a}\right)z \\ b_1 = -\left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a} \\ b_1 = \frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = z - \frac{a^2}{b} - \frac{bz}{a} \\ z - b_1 = z + \frac{a^2}{b} - \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(\frac{b}{a}\right)z \end{cases}$$

فيما يلي سوف نوظف المتساوية الثمينة (2) :

$$\Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} = \frac{\frac{a^2}{b}+\frac{bz}{a}}{\frac{-a^2}{b}+\frac{az}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(a+\left(\frac{b}{a}\right)^2 z\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)(z-a)} = \frac{a-\frac{a}{b}z}{z-a}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{b}\right)(-b+z)}{(z-a)} = \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

و بالتالي : $\boxed{\left(\frac{z-b_1}{z-a_1}\right) = \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)}$

II 3 ب

لنبين أن التكافؤ التالي صحيح .

A و B و O و M نقط متداورة $\Leftrightarrow$ A_1 و B_1 و M نقط مستقيمية

لدينا : A_1 و B_1 و M نقط مستقيمية $\Leftrightarrow \frac{z-b_1}{z-a_1} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{-a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b}\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{0-a}{0-b}\right) \times \left(\frac{z-b}{z-a}\right) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ A و B و O و M نقط متداورة

التمرين الثالث

1 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 بحيث : $3^n - 2^n = 0[n]$

إذن : n يقسم $(3^n - 2^n)$

و منه : $(\exists m\in\mathbb{N})\ ;\ 3^n - 2^n = mn \twoheadleftarrow (1)$

ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

إذن : $(\exists s\in\mathbb{N})\ ;\ n = ps \twoheadleftarrow (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $3^n - 2^n = \underbrace{ms}_{\in\mathbb{N}}p$

إذن : p يقسم $(3^n - 2^n)$ يعني : $3^n - 2^n \equiv 0[p] \twoheadleftarrow (3)$

لكي نبرهن على أن $p \geq 5$ يكفي أن نُفَنِّد العبارتين $p = 2$ و $p = 3$

نفترض أن $p = 2$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$

إذن حسب الافتراض : $3^n - 2^n \equiv 0\ [2] \twoheadleftarrow (4)$

و نعلم أنه كيفما كان $n\in\mathbb{N}$ لدينا : $2^n \equiv 0[2] \twoheadleftarrow (5)$

نجمع المتوافقتين (4) و (5) طرفا بطرف : $3^n - 2^n + 2^n \equiv 0\ [2]$

يعني : $3^n \equiv 0\ [2]$ و منه : 2 يقسم 3^n أي : $\boxed{2 \text{ يقسم } 3\times 3^{n-1}}$ (6)

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن $2 \wedge 3^{n-1} = 1\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*) \twoheadleftarrow (7)$

من (6) و (7) نستنتج إذن حسب $(Gauss)$ أن : 2 يقسم 3

و هذا تناقض واضح . إذن : $p \neq 2$

نفترض أن $p = 3$

لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$

إذن حسب الافتراض نكتب : $3^n - 2^n \equiv 0\ [3] \twoheadleftarrow (8)$

و نعلم أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ -3^n \equiv 0\ [3] \twoheadleftarrow (9)$

نجمع المتوافقتين (8) و (9) طرفا بطرف: $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0\ [3]$

يعني : $-2^n \equiv 0\ [3]$ أي : $2^n \equiv 0\ [3]$

يعني : 3 يقسم 2^n و منه : 3 يقسم $2 \times 2^{n-1} \twoheadleftarrow (10)$

بما أن : $2 \wedge 3 = 1$ فإن : $2^{n-1} \wedge 3 = 1\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*) \twoheadleftarrow (11)$

من (10) و (11) نستنتج حسب $Gauss$ أن : 3 يقسم 2

و هذا تناقض واضح . إذن : $p \neq 3$

خلاصة السؤال أ) :

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإن : $3^n - 2^n \equiv 0\ [p]$ و $p \geq 5$

1 ب

نعلم أن p عدد أولي و يخالف العدد الأولي 2 إذن : $p \wedge 2 = 1$

و منه حسب $Fermat$: $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$

و بنفس الطريقة p عدد أولي يُخالف العدد الأولي 3 إذن : $p \wedge 3 = 1$

و منه حسب $Fermat$: $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$

1 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $n \wedge (p-1) = 1$ ثم نستعمل $Bezout$.

الطريقة الأولى :

للإجابة على هذا السؤال سوف نحتاج إلى خاصية مهمة في صيغتين :

الصيغة الأولى : إذا كان : $a \wedge b = 1$ فإن : $a^n \wedge b = 1$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

الصيغة الثانية : $\begin{vmatrix} a_1 \wedge b = 1 \\ a_2 \wedge b = 1 \\ \vdots \\ a_n \wedge b = 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{i=n} a_i\right) \wedge b = 1$

ليكن p أصغر قاسم أولي للعدد n .

إذن تفكيك العدد n إلى جداء عوامل أولية سيكون على الشكل التالي :

$$n = p^{r_1} \times {p_2}^{r_2} \times \cdots \times {p_j}^{r_j}$$

بحيث : $\forall j \geq 2\ ;\ \ p_j > p$

و كذلك : $\{r_i\ /\ 1 \leq i \leq j\} \subset \mathbb{N}$

في البداية نلاحظ أن : $p - (p-1) = 1$.

يعني : $1(p) + (-1)(p-1) = 1$.

إذن حسب $Bezout$ نستنتج أن : $p \wedge (p-1) = 1$

و منه حسب الخاصية المذكورة : $p^{r_1} \wedge (p-1) = 1 \quad (1)$

و لدينا : $p_2 > p > p-1$ إذن : $p_2 \wedge (p-1) = 1$.

لأن p_2 عدد أولي و يستحيل أن يقسم عددا أصغر منه $(p-1)$.

و منه حسب الخاصية المذكورة : $p_2^{r_2} \wedge (p-1) = 1 \quad (2)$

و بنفس الطريقة نبين أن :

$$\begin{vmatrix} (3) & (p_3)^{r_3} \wedge (p-1) = 1 \\ (4) & (p_4)^{r_4} \wedge (p-1) = 1 \\ \vdots & \vdots \\ (j) & (p_j)^{r_j} \wedge (p-1) = 1 \end{vmatrix}$$

نطبق الصيغة الثانية للخاصية المذكورة على هذه المتساويات نجد :

$$\left(p^{r_1} \times {p_2}^{r_2} \times \cdots \times {p_j}^{r_j}\right) \wedge (p-1) = 1$$

يعني : $n \wedge (p-1) = 1$

و منه حسب $Bezout$ يوجد زوج (a, u) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث :

$$\boxed{an + u(p-1) = 1}$$

نضع $b = -u$ فنحصل على : $an - b(p-1) = 1$

الطريقة الثانية :

لنبين بالخلف على أن : $n \wedge (p-1) = 1$

نضع : $n \wedge (p-1) = d$

لنبين أن $d = 1$. و من أجل ذلك نفترض أن $d \neq 1$.

و نَفصِلُ بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان d عددا أوليا.

إذن $d > p$ و $d < p-1$.

لأن p هو أصغر قواسم n و كذلك d يقسم $p-1$.

من جهة أخرى لدينا $p-1 < p$ لأن p أولي موجب.

إذن $d < p-1 < p$ و $d > p$.

يعني $d < p$ و $d > p$. و هذا تناقض واضح .

إذن d يستحيل أن يكون أوليا .

الحالة الثانية : إذا كان d غير أولي.

يوجد إذن عدد أولي موجب m يقسم d ، إذن فهو يقسم n و $(p-1)$

و ذلك لأن علاقة يقسم متعدية .

بما أن m يقسم n فإنه بالضرورة $m \geq p \quad (1)$

لأن p هو أصغر القواسم الأولية للعدد n .

و بما أن m يقسم $(p-1)$ فإن $|m| \leq |p-1|$.

و بما أن $p \geq 5$ و m أولي موجب فإن $m \leq (p-1) \quad (2)$

و نعلم أن $(p-1) < p \quad (3)$ لأن p موجب .

إذن من (2) و (3) نستنتج أن : $m < p \quad (4)$

و التناقض نستنتجه من خلال (1) و (4) ، أي : $m > m$

و بالتالي : $n \wedge (p-1) = 1$.

و منه حسب $Bezout$ يوجد زوج $(a\ ,u)$ من $\mathbb{Z}^2$ بحيث :

$$an + u(p-1) = 1$$

نضع $b = -u$ فنحصل على : $an - b(p-1) = 1$

ملاحظة 1) : من هذه النتيجة الأخيرة يُمكن أن نستخرج باستعمال مبرهنة $Besout$ العكسية ما يلي :

$$(*) \twoheadrightarrow \begin{vmatrix} a \wedge b = 1 \\ \boxed{a \wedge (p-1) = 1} \\ n \wedge b = 1 \\ n \wedge (p-1) = 1 \end{vmatrix}$$

خلاصة السؤال ج) : إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا أكبرقطعا من 1 و يحقق $3^n - 2^n \equiv 0\ [n]$ و كان p أصغر قواسمه الأولية الموجبة فإنه يوجد عددان نسبيان a و b بحيث : $an - b(p-1) = 1$

1 د

ليكن r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية لـ a على $(p-1)$.

يعني : $\begin{cases} (q, r)\ \epsilon\ \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ a = q(p-1) + r \\ 0 \leq r < p-1 \end{cases}$

ملاحظة 2) : قبل أن نجيب على السؤال د) لاحظ أنه بإمكاننا أن نبين أن $r > 0$ و سوف نحتاج هذه النتيجة فيما سيأتي .

لدينا : $r \geq 0$ إذن $r = 0$ أو $r > 0$.

نفترض أن $r = 0$ إذن : $a = q(p-1)$

يعني : $(p-1)$ يقسم a و منه : $a \wedge (p-1) = (p-1)$

إذن حسب النتيجة $(*)$: $(p-1) = 1$

يعني : $p = 2$. و هذا تناقض لأن $p \geq 5$

إذن : $0 < r < (p-1)$

نعود إذن ، بعد هذه الجولة المرحة مع r ، إلى السؤال د) .

و أقترح عليكم طريقتين في الإجابة :

الطريقة الأولى :

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد n نحصل على : نحصل على :
نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد n نحصل على :

$$an = qn(p-1) + rn$$

يعني : $rn = an - qn(p-1) \twoheadleftarrow (\mathbf{13})$

و لدينا حسب النتيجة (12) : $an = 1 + b(p-1)$

نُعَوِّض an بالتعبير $1 + b(p-1)$ في العلاقة (13) نجد :

$$rn = 1 + b(p-1) - qn(p-1)$$

أي : $rn = 1 + (b - qn)(p-1)$

نضع : $k = (b - qn)$ إذن : $rn = 1 + k(p-1)$

و لإتمام الجواب يكفي أن نُبرهن أن $k\epsilon\mathbb{N}^*$

لدينا : $(b,q,n)\,\epsilon\,\mathbb{Z}^3$ إذن : $k\,\epsilon\,\mathbb{Z}$

و نَفْصل هنا بين ثلاث حالات و هي : $\boldsymbol{k = 0}$ أو $\boldsymbol{k} < 0$ أو $\boldsymbol{k} > 0$

نفترض أن : $\boldsymbol{k = 0}$ إذن : $b = qn$

نُعوض إذن b بالقيمة qn في النتيجة (12) : $an - qn(p-1) = 1$

و منه حسب النتيجة (13) : $rn = 1$

أي : n يقسم 1 يعني : $n = 1$

و هذا **تناقض** لأن : $n > 1$ إذن : $k \neq 0 \twoheadleftarrow (\star)$

نفترض أن : $\boldsymbol{k < 0}$ إذن : $b < qn$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السالب قطعا $(p-1)-$ نجد :

$$-b(p-1) > -qn(p-1)$$

نُضيف إلى كلا الطرفين الكمية an نجد :

$$an - b(p-1) > an - qn(p-1)$$

إذن باستعمال النتيجتين (12) و (13) نجد : $1 > rn \twoheadleftarrow (\mathbf{14})$

و لدينا : $r > 0$ و $n > 1$ إذن : $rn > r \twoheadleftarrow (\mathbf{15})$

من (14) و (15) نستنتج أن : $1 > rn > r$ يعني : $1 > r$

العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الأصغر من 1 هو الصفر .

إذن : $r = 0$ و هذا **تناقض** لأن $r \neq 0$ حسب **الملاحظة 2)** .

إذن : $k > 0$ يعني : $k\,\epsilon\,\mathbb{N}^*$

الطريقة الثانية :

لدينا : $an - b(p-1) = 1 \quad (1)$

و لدينا كذلك : $a = (p-1)q + r$

نضرب الطرفين في العدد الغير المنعدم n فنحصل على :

$$(2) \quad an = (p-1)qn + rn$$

ننجز عملية الفرق بين (2) و (1) فنحصل على ما يلي :

$$\begin{aligned}(2)-(1) \;&\Rightarrow\; b(p-1) = (p-1)qn + rn - 1\\ &\Rightarrow\; b(p-1) - (p-1)qn = rn - 1\\ &\Rightarrow\; (b-qn)(p-1) = rn - 1\\ &\Rightarrow\; (rn-1) = k(p-1)\;;\;\; avec\;\; k = b - qn\end{aligned}$$

لنبين الآن أن : $k = (b - qn)\,\epsilon\,\mathbb{N}^*$

أولا، لدينا حسب الملاحظة 2) : $r > 0$. إذن : $r \geq 1$

لدينا $n > 1$ و $r \geq 1$ إذن $rn > 1$

يعني $n\big(a - q(p-1)\big) > 1$ أي $an - qn(p-1) > 1$

أي $an - 1 > qn(p-1)$ أي $b(p-1) > qn(p-1)$

نختزل بالعدد الغير المنعدم $(p-1)$ نجد $b > qn$.

يعني $b - qn > 0$ إذن $k = (b - qn) > 0$

و بالتالي : $k\,\epsilon\,\mathbb{N}^*$

خلاصة السؤال د) : رأينا في هذا السؤال أنه إذا كان r و q على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على العدد $(p-1)$ فإنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$

أو بتعبير جميل : $(\exists k\epsilon\mathbb{N}^*)\;;\; rn = 1 + k(p-1) \twoheadleftarrow (\mathbf{16})$

2

باستعمال البرهان بالخلف ، نفترض وجود عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق : $3^n - 2^n \equiv 0\,[n]$. و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n .

نتطلق من النتيجتين : $\begin{cases}2^{p-1} \equiv 1\,[p]\\ 3^{p-1} \equiv 1\,[p]\end{cases}$

بما أن : $(k\epsilon\mathbb{N}^*)$ فإن : $\begin{cases}2^{k(p-1)} \equiv 1\,[p]\\ 3^{k(p-1)} \equiv 1\,[p]\end{cases}$

و منه : $\begin{cases}-2 \times 2^{k(p-1)} \equiv -2\,[p]\\ 3 \times 3^{k(p-1)} \equiv 3\,[p]\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}-2^{1+k(p-1)} \equiv -2\,[p]\\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3\,[p]\end{cases}$

و منه باستعمال النتيجة (16) نكتب : $\begin{cases}-2^{rn} \equiv -2\,[p]\\ 3^{rn} \equiv 3\,[p]\end{cases}$

نجمع هاتين المتوافقتين طرفا بطرف نجد : $3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1\,[p] \twoheadleftarrow (\mathbf{17})$

و لدينا حسب النتيجة (3) : $3^n - 2^n \equiv 0\,[p]$

إذن : $3^n \equiv 2^n\,[p]$

و بما أن $(r\epsilon\mathbb{N}^*)$ فإن : $3^{rn} \equiv 2^{rn}\,[p]$

و منه : $2^{rn} - 3^{rn} \equiv 0\,[p] \twoheadleftarrow (\mathbf{18})$

نجمع المتوافقتين (17) و (18) طرفا بطرف نجد :

$$3^{rn} - 2^{rn} + 2^{rn} - 3^{rn} \equiv 1 + 0\,[p]$$

يعني : $0 \equiv 1\,[p]$ يعني كذلك : $1 \equiv 0\,[p]$ أي : p يقسم 1

و منه $p = 1$ لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو 1 نفسه .

و هذا **تناقض** لأن $p \geq 5$ إذن n لا وجود له في $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

خلاصة التمرين بأكمله :

$$\boxed{\forall\, n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \setminus \{1\}\;;\; 3^n - 2^n \not\equiv 0\,[n]}$$

التمرين الرابع **1** **أ**

لدينا : $\begin{cases}h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x}\;;\;\; \forall x > 1\\ h(1) = 1\end{cases}$ نضع : $\varphi(x) = x\ln x$

إذن :

$$\lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{x\ln x}\right) = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{\left(\dfrac{x\ln x}{x-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{1}{\left(\dfrac{x\ln x - 1\ln 1}{x-1}\right)} = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{\left(\dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}\right)} = \frac{1}{\varphi_d'(1)}$$

و لدينا : $\varphi(x) = x\ln x$ إذن : $\varphi'(x) = \ln x + 1$

يعني : $\varphi_d'(1) = \varphi_g'(1) = \varphi'(1) = \ln(1) + 1 = 1$

و بالتالي : $\displaystyle\lim_{x\to1^+} h(x) = \frac{1}{\varphi_d'(1)} = \frac{1}{1} = 1 = h(1)$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to1^+} h(x) = h(1)$

و هذا يعني أن الدالة h دالة متصلة على يمين 1

1 **ب**

نعتبر الدالة العددية v المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$v(x) = \ln x - x + 1$$

لندرس تغيرات الدالة v على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا v عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة و القابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. إذن : v قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$.

و لدينا : $v'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

- إذا كان : $x = 1$ فإن : $v'(x) = 0$
- إذا كان : $x > 1$ فإن : $v'(x) < 0$
- إذا كان : $x < 1$ فإن : $v'(x) > 0$

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to 0^+} v(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln x - x + 1) = \ln(0^+) - 0 + 1 = -\infty - 0 + 1 = -\infty$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to +\infty} v(x) = \lim_{x\to +\infty} (\ln x - x + 1) = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة v كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
v	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الدالة v :

- متصلة على المجال $]0;+\infty[$.
- تزايدية على المجال $]0;1]$.
- تناقصية على المجال $[1;+\infty[$
- $v(1) = 0$

إذن 0 قيمة قصوية للدالة v على المجال $]0;+\infty[$.

يعني $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ ;\ v(x) < 0$

يعني $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ ;\ \ln x - x + 1 < 0$

يعني $\forall\, x \in\,]0;+\infty[\ ;\ \ln x < x - 1$

و بما أن : $]1;+\infty[\ \subset\ ]0;+\infty[$

فإن : $\forall\, x \in\,]1;+\infty[\ ;\ \ln x < x - 1$

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$. لدينا : $h(x) = \dfrac{x-1}{x\ln x}$

إذن :
$$h'(x) = \frac{x\ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x\ln x)^2} = \frac{x\ln x - (x\ln x + x - \ln x - 1)}{(x\ln x)^2} = \frac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2}$$

و نعلم أن : $(\forall x > 1)\ ;\ (\ln x - x + 1) < 0$

و كذلك : $(\forall x > 1)\ ;\ (x\ln x)^2 > 0$

إذن : $(\forall x > 1)\ ;\ \dfrac{\ln x - x + 1}{(x\ln x)^2} < 0$

يعني : $(\forall x > 1)\ ;\ h'(x) < 0$

أي أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

2 أ

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\ln x}\right) - \left(\frac{1}{x\ln x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right) - \left(\frac{1}{x\ln x}\right) = \left(\frac{1}{+\infty}\right) - \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$$

نُلخص النتائج المتعلقة بالدالة h في الجدول التالي :

x	1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
h	1	$\searrow$	0

2 ب

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة h أن الدالة h متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ بحيث :

$$h(\,[1;+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} h(x)\ ;\ h(1)\right] =]0;1]$$

إذن : h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $]0;1]$.

أي : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ \exists!\, y \in\,]0;1]\ :\ y = h(x)$

أو بتعبير آخر : $\forall\, x \in [1;+\infty[\ ;\ \exists!\, h(x) \in\,]0;1]$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < h(x) \leq 1$

الجزء الثاني

1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

لاحظ في البداية أن : $(t\ln t)' = 1 + \ln t$

نستغل إذن هذه الملاحظة أثناء الحساب .

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \int_x^{x^2}\left(\frac{1 + \ln t - \ln t}{t\ln t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\left(\frac{1+\ln t}{t\ln t}\right)dt - \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$
$$= \int_x^{x^2}\frac{(t\ln t)'}{t\ln t}\,dt - \int_x^{x^2}\frac{1}{t}\,dt$$
$$= [\ln(t\ln t)]_x^{x^2} - [\ln t]_x^{x^2}$$
$$= (\ln(x^2\ln(x^2)) - \ln(x\ln x)) - (\ln(x^2) - \ln x)$$
$$= \ln\left(\frac{x^2\ln(x^2)}{x\ln x}\right) - \ln\left(\frac{x^2}{x}\right) = \ln\left(\frac{2x^2\ln(x)}{x\ln x}\right) - \ln(x)$$
$$= \ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln 2$$

و بالتالي :
$$\boxed{(\forall x > 1)\ ;\ \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2}$$

1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

$$\begin{aligned} g(x)-\ln 2 &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}\,dt - \int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt \\ &= \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}\,\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)dt \\ &= \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}}{t\ln t}-\frac{1}{t\ln t}\right)dt \\ &= \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)dt \end{aligned}$$

1 ج

باستعمال تقنية تغيير المتغير نضع : $\sqrt{t}=u$

إذن : $\frac{du}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ يعني : $dt=2u\,du$

- إذا كان $t=x$ فإن : $u=\sqrt{x}$
- إذا كان $t=x^2$ فإن : $u=x$

إذن آخر تكامل حصلنا عليه يصبح :

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2}\left(\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}\right)dt &= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u^2\ln(u^2)}\right)(2u\,du) \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{2u^2\ln u}\right)(2u\,du) \\ &= \int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u\ln u}\right)du \end{aligned}$$

إذن : $(\forall x>1)\ ;\ g(x)-\ln 2=\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{u-1}{u\ln u}\right)du$

Remarque : u et t sont des paramètres d'intégration qu'on peut schématiser comme des espaces mémoires temporels (variables muettes)

2 أ

ليكن $x>1$ و ليكن $t\in[\sqrt{x};x]$.

لدينا الدالة f تناقصية على المجال $]1;+\infty[$.

إذن فهي تناقصية على المجال $[\sqrt{x};x]$ لأن $x>1$.

بما أن : $\sqrt{x}\le t\le x$ فإن : $h(x)\le h(t)\le h(\sqrt{x})$

يعني : $h(x)\le\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)\le h(\sqrt{x})$

إذن : $\int_{\sqrt{x}}^{x}h(x)\,dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h(\sqrt{x})\,dt$

يعني : $h(x)\int_{\sqrt{x}}^{x}1\,dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt\le h(\sqrt{x})\int_{\sqrt{x}}^{x}1\,dt$

يعني : $h(x)\,[t]_{\sqrt{x}}^{x}\le\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt\le h(\sqrt{x})\,[t]_{\sqrt{x}}^{x}$

يعني : $h(x)(x-\sqrt{x})\le\int_{\sqrt{x}}^{x}\left(\frac{t-1}{t\ln t}\right)dt\le h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$

و بالتالي حسب نتيجة السؤال ج) $(\forall x>1)$ نكتب :

$$(*)\ \ \boxed{h(x)(x-\sqrt{x})\le g(x)-\ln 2\le h(\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}$$

2 ب

نضرب أطراف التأطير $(*)$ في العدد الموجب قطعا $\left(\frac{1}{x-1}\right)$ نجد :

$$\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x)\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$$

بعد ذلك نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير على يمين 1 نجد :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) &= \lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}h(x) \\ &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(x)=\left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\right)h(1)=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x}) &= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)h(\sqrt{x}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1}\right)h(\sqrt{1})=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(x)}_{\xrightarrow[x\to1^+]{}\ \boxed{\frac{1}{2}}}\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})}_{\xrightarrow[x\to1^+]{}\ \boxed{\frac{1}{2}}}$$

و بالتالي : $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$

أي أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 و $g_d'(1)=\frac{1}{2}$.

2 ج

لدينا حسب التأطير الوارد في السؤال 2) أ) :

$$(\forall x>1)\ ;\ g(x)\ge h(x)(x-\sqrt{x})+\ln 2$$

لنحسب نهاية $(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2$ بجوار $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2 &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x})(x-1)}{x\ln x}+\ln 2 \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(x-1)}{x\ln x}+\ln 2 \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)+\ln 2 \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{\ln x}{x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)+\ln 2 \\ &= \left(\frac{1}{0^+}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)+\ln 2 \\ &= (+\infty)(1-0)(1-0)+\ln 2 \\ &= (+\infty)(1)(1)+\ln 2=+\infty \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall x>1)\ ;\ g(x)\geq \underbrace{h(x)(x-\sqrt{x})+\ln 2}_{\substack{x\to+\infty \\ \downarrow \\ +\infty}}$$

إذن حسب خاصية الترتيب و النهايات نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

بالنسبة لنهاية $\frac{g(x)}{x}$ بجوار $+\infty$ ننطلق من التأطير الثمين المحصل عليه في السؤال 2) أ) كما سوف نستعمل أثناء الحساب النهاية المحصل عليها سابقا و هي : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$. لدينا :

$$(x-\sqrt{x})h(x)+\ln 2\leq g(x)\leq (x-\sqrt{x})h(\sqrt{x})+\ln 2$$

نضرب طرفي هذا التأطير في العدد الموجب قطعا $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln x}{x}\leq\frac{g(x)}{x}\leq\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}$$

ثم نحسب نهايتي طرفي هذا التأطير بجوار $+\infty$ نحصل على :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln 2}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x)+\frac{\ln 2}{x}\\&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)(0)+\frac{\ln 2}{+\infty}=(1-0)(0)+0=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{(\sqrt{x})^2}\\&=\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\sqrt{x}}}\left(1-\frac{1}{t}\right)h(t)+\frac{\ln 2}{t^2}\\&=\left(1-\frac{1}{+\infty}\right)(0)+\frac{\ln 2}{(+\infty)^2}=0\end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(x)+\frac{\ln x}{x}}_{\substack{x\to+\infty\\ \downarrow \\ 0}}\leq\frac{g(x)}{x}\leq\underbrace{\left(\frac{x-\sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x})+\frac{\ln 2}{x}}_{\substack{x\to+\infty\\ \downarrow \\ 0}}$$

إذن حسب خاصية النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$

3 أ

أذكّر في البداية بما يلي : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I و بالخصوص تقبل دالة أصلية F التي تنعدم في a و تحقق :

$$\begin{aligned}F:I&\mapsto\mathbb{R}\\ x&\mapsto\int_a^x f(t)\,dt\end{aligned}\quad \text{و}\quad \begin{cases}F(a)=0\\ F'(x)=f(x)\end{cases}$$

انتهى التذكير .

ليكن a عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي :

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}$$

نلاحظ أن u دالة متصلة على $]1;+\infty[$ و ذلك حسب المبرهنات العامة للاتصال .

إذن : u تقبل عدة دوال أصلية على $]1;+\infty[$ و بالخصوص u تقبل دالة أصلية v التي تنعدم في a و معرفة بما يلي :

$$\begin{aligned}v:]1;+\infty[&\mapsto\mathbb{R}\\ x&\mapsto\int_a^x u(t)\,dt\end{aligned}\quad \text{و}\quad \begin{cases}v(a)=0\\ v'(x)=u(x)\end{cases}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة g نكتب :

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt\ ;\ x>1\\&=\int_x^a\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt+\int_a^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt\\&=\int_a^{x^2}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt-\int_a^{x}\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt\\&=v(x^2)-v(x)\end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $g(x)=v(x^2)-v(x)\ ;\ x>1$

انطلاقا من الدوال $x\to x$ و v و $x\to x^2$ نستطيع القول ، باستعمال المبرهنات العامة لاشتقاق مركب دالتين ، أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

و لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall x>1)\ ;\ g'(x)&=\left(v(x^2)-v(x)\right)'\\&=2x\,v'(x^2)-v'(x)\\&=2x\,u(x^2)-u(x)\\&=\frac{2x}{\sqrt{x^2}\ln(x^2)}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}=\frac{2x}{2x\ln x}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\\&=\frac{x}{x\ln x}-\frac{\sqrt{x}}{x\ln x}=\frac{x-\sqrt{x}}{x\ln x}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^2\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\,\ln\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}h(\sqrt{x})\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x>1)\ ;\ g'(x)=\frac{1}{2}\,h(\sqrt{x})}$

3 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال 2) ب) من الجزء الأول :

$$(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < h(x) \leq 1$$

نلاحظ أن : $x \geq 1 \implies \sqrt{x} \geq 1$

إذن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$

و منه : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$

و من هذه الكتابة نستنتج أن g دالة تزايدية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

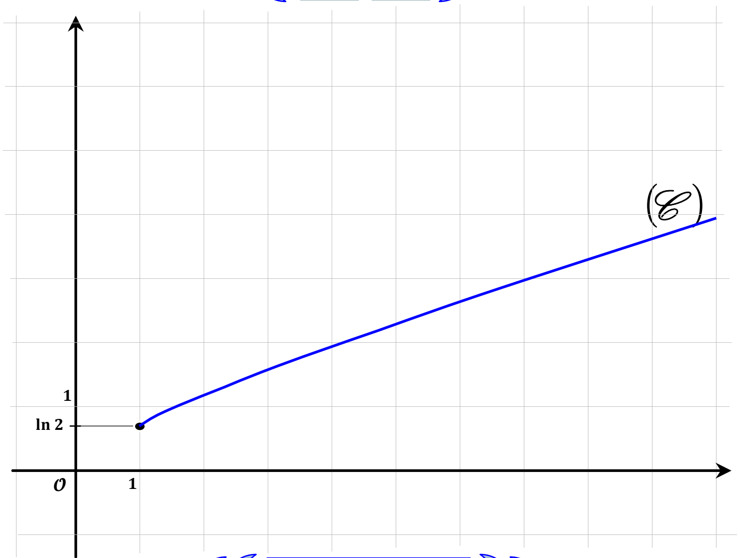
و لإنشاء جدول تغيرات g نستدعي النتائج التي حصلنا عليها من قبل و هي :

- g معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$
- g تزايدية قطعا على $]1;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = g(1) = \ln 2$

نرسم إذن جدول تغيرات g كما يلي :

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$\ln 2$ $\nearrow$ $+\infty$

3 ج



الجزء الثالث

I 1

ليكن x عنصرا من المجال $]1;+\infty[$.

لدينا : $k(x) = g(x) - x + 1$

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$

فإن : k قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا : $k'(x) = g'(x) - 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال 3) ب) من الجزء الثاني :

$$(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

إذن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$

يعني : $(\forall x \geq 1)\ ;\ g'(x) < 1$

و منه : $(\forall x \geq 1)\ ;\ g'(x) - 1 < 0$

أي : $(\forall x \geq 1)\ ;\ k'(x) < 0$

و هذا يعني أن الدالة k تناقصية قطعا على المجال $]1;+\infty[$.

إذن k تقابل من المجال $]1;+\infty[$ نحو صورته بالدالة k .

و لدينا $k([1;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)\ ;\ k(1)\right]$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} k(x) &= \lim_{x\to+\infty} (g(x) - x + 1) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(0 - 1 + \frac{1}{+\infty}\right)(+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty\end{aligned}$$

و بالتالي : k تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو المجال $]-\infty;\ln 2]$.

I 2

لدينا : $\ln 2 > 0$ إذن : $0 \in]-\infty;\ln 2]$

و بما أن k تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $]-\infty;\ln 2]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالدالة k في المجال $[1;+\infty[$.

يعني بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha \in [1;+\infty[\ ;\ k(\alpha) = 0$

يعني : $\exists!\ \alpha \in [1;+\infty[\ ;\ g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$

يعني : $\exists!\ \alpha \in [1;+\infty[\ ;\ 1 + g(\alpha) = \alpha$

أو بتعبير لطيف : المعادلة $1 + g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا

في المجال $[1;+\infty[$ و هو α .

II 1 أ

باستعمال البرهان بالترجع ، نعتبر العبارة (P_n) التالية :

$$(P_n) :\quad 1 \leq u_n < \alpha$$

من أجل $n = 0$ لدينا حسب المعطيات : $1 \leq u_0 < \alpha$

إذن : العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ و نفترض أن : $1 \leq u_n < \alpha$

نُدخل على هذا التأطير الدالة التزايدية قطعا g نحصل على :

$$g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha)$$

ثم نضيف 1 لكل طرف : $g(1) + 1 \leq g(u_n) + 1 \leq g(\alpha) + 1$

إذن : باستعمال النتائج السابقة نكتب : $1 < \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$

يعني : $1 \leq u_{n+1} < \alpha$ إذن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

حصلنا إذن على الوضعية التالية : $\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie \\ (P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n \geq 0\end{cases}$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$

أي : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 \leq u_n < \alpha$

II 1 ب

لدينا حسب آخر نتيجة : $(\forall n \geq 0)\ ;\ u_n < \alpha$

نُدخل الدالة التناقصية قطعا k على هذه المتفاوتة نجد :

$$(\forall n \geq 0)\ ;\ k(u_n) > k(\alpha)$$

و بما أن : $k(\alpha) = 0$ فإن : $(\forall n \geq 0)\ ;\ k(u_n) > 0$

يعني : $(\forall n \geq 0)\ ;\ g(u_n) - u_n + 1 > 0$

يعني : $(\forall n \geq 0)\ ;\ 1 + g(u_n) > u_n$

و منه : $(\forall n \geq 0)\ ;\ u_{n+1} > u_n$

و من هذه الكتابة نستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تزايدية قطعا .

II 1 ج

لدينا $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية قطعا .

و بما أنها مكبورة بالعدد α (لأن $(\forall n\geq 0)\ ;\ u_n<\alpha$ حسب 1) أ))

فإنها متقاربة و نهايتها ℓ تحقق : $1+g(\ell)=\ell$

و رأينا أن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجال $]1;+\infty[$ و هو α .

إذن : $\ell=\lim\limits_{n\infty}(u_n)=\alpha$

II 2 أ

نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي : $\psi(x)=1+g(x)$

بما أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

فإن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$.

و منه ψ قابلة للإشتقاق على أي مجال يوجد ضمن $]1;+\infty[$.

نختار المجال $[u_n;\alpha]$ الذي يوجد ضمن $]1;+\infty[$

(و ذلك لأن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ 1\leq u_n<\alpha$)

إذن بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية (TAF)

على الدالة ψ في المجال $[u_n\,;\alpha]$ نجد :

$$\exists\, c\,\epsilon\,]u_n;\alpha[\ ;\ \frac{\psi(u_n)-\psi(\alpha)}{u_n-\alpha}=\psi'(c)$$

لدينا : $\begin{cases}\psi(u_n)=1+g(u_n)=u_{n+1}\\ \psi(\alpha)=1+g(\alpha)=\alpha\end{cases}$

إذن : $\exists\, c\,\epsilon\,]u_n;\alpha[\ ;\ \dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}=\psi'(c)$

يعني : $(*)\ \ \exists\, c\,\epsilon\,]u_n;\alpha[\ ;\ \left|\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}\right|=|\psi'(c)|$

لدينا : $\psi'(c)=g'(c)$ و $c\,\epsilon\,]u_n;\alpha[$

إذن : $1\leq u_n<c<\alpha$ أي : $c\geq 1$

و منه حسب نتيجة السؤال 3) ب) من الجزء الثاني : $0<g'(c)\leq\dfrac{1}{2}$

إذن : $|\psi'(c)|=|g'(c)|\leq\dfrac{1}{2}$

أي : $(**)\ \ |\psi'(c)|\leq\dfrac{1}{2}$

إذن باستعمال الكتابتين $(*)$ و $(**)$ نكتب :

$$(\forall n\geq 0)\ ;\ \left|\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}\right|\leq\frac{1}{2}$$

يعني : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}\ |u_n-\alpha|$

II 2 ب

لدينا : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}\ |u_n-\alpha|$

إذن بتغيير $(n+1)$ بـ n نجد :

$$\begin{aligned}|u_n-\alpha|&\leq\frac{1}{2}\ |u_{n-1}-\alpha|\\&\leq\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\ |u_{n-2}-\alpha|\\&\leq\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\ |u_{n-3}-\alpha|\\&\ \ \vdots\quad\vdots\\&\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_{n-n}-\alpha|\end{aligned}$$

إذن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|$

و يمكن كذلك استعمال البرهان بالترجع .

لنبرهن بالترجع على أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|$

من أجل $n=0$ لدينا : $|u_0-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0\ |u_0-\alpha|$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

ليكن $n\epsilon\mathbb{N}$ و نفترض أن : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{2}$ نجد :

$$(\forall n\geq 0)\ ;\ \frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ |u_0-\alpha|$$

بما أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

فإن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|$

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل $(n+1)$.

و بالتالي حسب مبدأ الترجع :

$$(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|$$

II 2 ج

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها عدد موجب قطعا و أصغر من 1 .

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ و منه : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|=0$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}\ 0}$$

أو بتعبير واضح نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n\geq 0)\ ;\ \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}\ 0}\leq(u_n-\alpha)\leq\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}\ 0}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}(u_n-\alpha)=0$

أي : $\lim\limits_{n\infty}u_n=\alpha$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2013

التمرين الأول

1 I

<u>منهجية التفكير في هذا السؤال</u> :

نضع $\alpha = (x-1)(y-1)$ و $\beta = (x-2)(y-2)$

نريد أن نبين أن : $\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; x*y\in G$

يعني نريد أن نبين أن : $\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; 1 < x*y < 2$

من أجل ذلك سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; x*y>1$ و $x*y<2$

يعني سوف نحتاج إلى أن نبين أن :

$$\boxed{\forall\,(x,y)\in G^2 \; ; \; \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}>0 \text{ و } \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}<2}$$

يعني : $\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; \alpha+\beta>0$ و $\alpha>0$ و $\beta>0$

<u>**إلى العمل**</u> : ليكن x و y عنصرين من المجال $G =]1,2[$.

إذن : $1<x<2$ و $1<y<2$.

و منه : $0<(x-1)<1$ و $0<(y-1)<1$.

أي : $0<(x-1)(y-1)<1$

و هذا يعني أن الكمية $(x-1)(y-1)$ كمية موجبة قطعا .

يعني : $(x-1)(y-1)>0$

و لدينا كذلك : $1<x<2$ و $1<y<2$

إذن : $-1<(x-2)<0$ و $-1<(y-2)<0$

يعني أن : $(x-2)$ و $(y-2)$ كميتان سالبتان قطعا .

إذن : جداؤهما كمية موجبة قطعا . يعني : $(x-2)(y-2)>0$

في المرحلة الأولى نبين أن : $\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; x*y>1$

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-1)(y-1)>0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)$

نحصل على : $2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2) >$
$> (x-1)(y-1)+(x-1)(y-2)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا التالية :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}}$$

نحصل على : $\dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}>1$

و هذا يعني أنه : $\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; x*y>1$

في المرحلة الثانية نبين أن : $\boxed{\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; x*y<2}$ (1)

و من أجل ذلك ننطلق من الكتابة : $(x-2)(y-2)>0$

و نضيف إلى كلا الطرفين الكمية $(x-2)(y-2)$

نجد : $2(x-2)(y-2)>(x-2)(y-2)$

ثم نضيف بعد ذلك إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $2(x-1)(y-1)$

نجد : $2(x-1)(y-1)+2(x-2)(y-2)>$
$> (x-2)(y-2)+2(x-1)(y-1)$

يعني : $2[(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)]>$
$> (x-2)(y-2)+2(x-1)(y-1)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في الكمية الموجبة قطعا :

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}}$$

نجد : $2 > \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

يعني : $\boxed{\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; 2>x*y}$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; 1<x*y<2$

يعني : $\forall(x,y)\in G^2 \; ; \; x*y\in G$

و بالتالي $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

I 2 أ

لدينا f تطبيق معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{aligned} f \; : \; (\mathbb{R}_+^*,\times) &\longmapsto (G,*) \\ x &\longmapsto \frac{x+2}{x+1} \end{aligned}}$$

لكي يكون التطبيق f تشاكلا يكفي أن نتحقق من أن :

$\forall\, x,y\in\mathbb{R}_+^* \; ; \; f(x\times y) = f(x)*f(y)$

ليكن x و y عنصرين من المجموعة $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $f(x)*f(y) = \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)*\left(\dfrac{y+2}{y+1}\right)$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-1\right)+\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)\left(\frac{y+2}{y+1}-2\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right)+\left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$

$$= \frac{xy+2}{xy+1} = f(x\times y)$$

إذن : $\boxed{f(x)*f(y) = f(x\times y)}$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

لكي يكون f تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$(\forall y\in G) , (\exists!\, x\in\mathbb{R}_+^*) \; : \; f(x)=y$

أو بتعبير أسهل : يكون f تطبيقا تقابليا عندما يكون للمعادلة $f(x)=y$ ذات المجهول x حل وحيد في $\mathbb{R}_+^*$ مرتبط بـ y .

ليكن y عنصرا من المجموعة G و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $f(x)=y$.

هذه المعادلة تصبح : $\dfrac{x+2}{x+1}=y$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $(x+1)$

نجد : $(x+2)=y(x+1)$

يعني : $x+2=xy+y$ يعني : $x(1-y)=(y-1)$

نضرب طرفي هذه المعادلة في العدد الغير المنعدم $\dfrac{1}{1-y}$

نجد : $x=\dfrac{y-2}{1-y}$

نلاحظ أن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد لأنه إذا افترضنا غير ذلك .

أي وجود عدد آخر y' يحقق $x=\dfrac{y'-2}{1-y'}$

فإنه سوف نحصل على : $\dfrac{y-2}{1-y}=\dfrac{y'-2}{1-y'}$

أي : $y-yy'-2+2y' = y'-2-yy'+2y$

أي : $(y-y')=0$ أي : $y=y'$

و بالتالي فإن التعبير $\dfrac{y-2}{1-y}$ وحيد .

إذن المعادلة $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا و هو $\dfrac{y-2}{1-y}$

يكفي الآن أن نتحقق من أن هذا الحل ينتمي إلى $\mathbb{R}_+^*$.

يعني أنه يكفي أن نبين أن : $\dfrac{y-2}{1-y}>0\ ;\ \forall y\in]1,2[$

لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(y-2)<0$

و لدينا : $1<y<2$ إذن : $-1<(1-y)<0$

إذن $(y-2)$ و $(1-y)$ كميتان سالبتان قطعا.

أي أن خارجهما كمية موجبة قطعا .

يعني : $\dfrac{y-2}{1-y}>0\ ;\ \forall y\in]1,2[$

إذن : $f(x)=y\ :\ \left(\exists!\, x=\dfrac{y-2}{1-y}\in\mathbb{R}_+^*\right),(\forall y\in G)$

يعني أن f تقابل من $\mathbb{R}_+^*$ نحو G .

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(G,*)$.

2 I ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .

يعني أنه عندما نتوفر على تشاكل تقابلي f من مجموعة $(E,*)$ نحو $(F,\top)$ فإنه نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(F,\top)$ انطلاقا من البنية الجبرية للمجموعة $(E,*)$ عن طريق التطبيق f .

و من ثم :

إذا كان $*$ تبادلي أو تجميعي في E فإن $\top$ تبادلي أو تجميعي في F .

إذا كان e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E فإن $f(e)$ هو العنصر المحايد للقانون $\top$ في F .

إذا كان x' هو مماثل x بالنسبة للقانون $*$ في E فإن $f(x')$ هو مماثل $f(x)$ بالنسبة للقانون $\top$ في F

في هذا السؤال لدينا f تشاكل تقابلي معرف بما يلي :

$$f\ :\ (\mathbb{R}_+^*,\times)\ \mapsto\ (G,*)$$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة $(G,*)$ انطلاقا من البنية الجبرية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ عن طريق التطبيق f .

و بما أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 فإن $(G,*)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي $f(1)$ أي العدد $\frac{3}{2}$. و للتأكد من ذلك يكفي أن تتحقق من أن :

$$(\forall x\in G)\ ;\ x*\frac{3}{2}=\frac{3}{2}*x=x$$

II 1 أ

تذكير : لتكن $(E,*,\top)$ حلقة و e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في E . نقول بأن عنصرا x من E قاسم للصفر إذا تحققت الشروط التالية :

$$\begin{cases} x\neq e \\ \exists\, y\in E\setminus\{e\}\ ;\ x\top y=y\top x=e \end{cases}$$

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ التي صفرها $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

لدينا :
$$\begin{aligned}A^3&=A\times A\times A\\&=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathcal{O}\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A^3=\mathcal{O}}$

لدينا المصفوفة $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ هي العنصر المحايد لـِ $+$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

نلاحظ في البداية أن $A\neq\mathcal{O}$

و لدينا : $A^3=A\times A^2=\mathcal{O}$

مع : $A^2=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq\mathcal{O}$

إذن نستنتج أن $A\neq\mathcal{O}$ و توجد مصفوفة و هي A^2 تخالف $\mathcal{O}$ و تحقق $A\times A^2=A^2\times A=\mathcal{O}$

إذن حسب التذكير : المصفوفة A قاسم للصفر في الحلقة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

II 1 ب

$$\begin{aligned}(A^2-A+I)\times(A+I)&=A^3+A^2-A^2-A+A+I\\&=A^3+I=\mathcal{O}+I=I\end{aligned}$$

و بما أن A و I مصفوفتان من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

فإن المصفوفة (A^2-A+I) عنصر من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

و نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية وحدتها I إذن $\times$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

يعني : $(A+I)\times(A^2-A+I)=(A^2-A+I)\times(A+I)=I$

و بالتالي $(A+I)$ مصفوفة قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$

و مقلوبها هو المصفوفة (A^2-A+I) .

و لدينا : $(A+I)=\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned}(A^2-A+I)&=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-3&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

خلاصة :

مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix}1&3&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

II 2

لكي يكون $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$\begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y \\ (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x \\ (\alpha\times\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x) \\ 1\cdot x=x \end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \forall\, x,y\in E \\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{pmatrix}$$

بحيث $\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$
و $+$ هو جمع المصفوفات في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
و $\cdot$ هو ضرب مصفوفة في عدد حقيقي .
في البداية نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتان من E .

لدينا :
$$\begin{aligned} M(a,b)-M(c,d) &= aI+bA-cI-dA \\ &= (a-c)I+(b-d)A \\ &= M(\,a-c\;;b-d\,)\in E \end{aligned}$$

إذن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$
و بما أن $+$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ فإن $\boxed{(E,+) \text{ زمرة تبادلية}}$ **(1)**
نستنتج الخاصيات المتبقية من خلال كون E جزء من الفضاء المتجهي
الحقيقي $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ و كون E جزء مستقر بالنسبة للقانون $(\cdot)$
و ذلك لأن : $\forall\, M(a,b)\in E\;,\forall\alpha\in\mathbb{R}\;;\;\alpha\cdot M(a,b)=M(\alpha a,\alpha b)\in E$

إذن :
$$\begin{cases} (E,+) \text{ زمرة تبادلية} \\ \alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B \\ (\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A \\ (\alpha\times\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A) \\ 1\cdot A=A \end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \forall\, A,B\in E \\ \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R} \end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

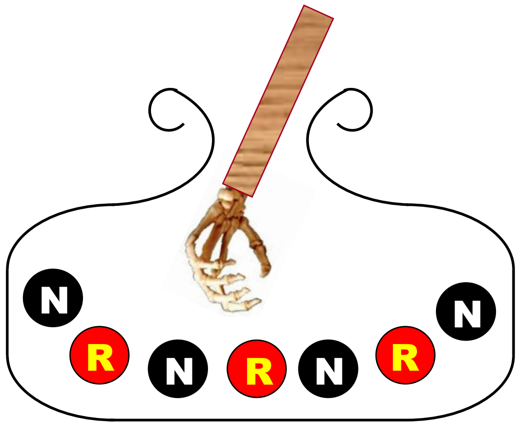
من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
نعتبر الأسرة (I,A) .
من الواضح أن الأسرة (I,A) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.
لأن : $\forall\, M(a,b)\in E\;;\;M(a,b)=aI+bA$
يعني أن كل مصفوفة من E تكتب على شكل تأليفة خطية للمصفوفتين I و A
لنبين الآن أن الأسرة (I,A) حرة .
من أجل ذلك ننطلق من تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و A .

$$a\cdot I+b\cdot A=\mathcal{O}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a&0&0\\0&a&0\\0&0&a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0&3b&2b\\0&0&b\\0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a&3b&2b\\0&a&b\\0&0&a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

إذن الأسرة (I,A) حرة .
و بما أن (I,A) أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي E فإنها أساس لهذا
الفضاء المتجهي الحقيقي

التمرين الثاني

I 1



عندما نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من صندوق يحتوي
على 7 كرات فإن هذه التجربة العشوائية تحتمل 7^4 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega)=7^4=2401$
بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .
X هو المتغير العشوائي الذي يربط كل عملية بعدد الكرات السوداء
المسحوبة من الصندوق . إذن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X
هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 . يعني : $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$

قانون احتمال المتغير العشوائي X سيكون إذن التطبيق P_X المعرف على
المجموعة $\{0,1,2,3,4\}$ نحو المجال $[0,1]$ بما يلي :

$$\begin{aligned} P_X \;:\; \{0,1,2,3,4\} &\longmapsto [0,1] \\ k &\longmapsto P_X(k)=p[X=k] \end{aligned}$$

لنحسب إذن احتمال كل قيمة k من قيم المتغير العشوائي X .

لنحسب : $p[X=0]$

الحدث $[X=0]$ هو الحصول على أربع كرات كلها حمراء و توجد 3^4
امكانية لسحب الكرات الأربع .

إذن : $p[X=0]=\dfrac{3^4}{7^4}=\dfrac{81}{2401}$

لنحسب : $p[X=1]$

الحدث $[X=1]$ هو الحصول على كرة سوداء واحدة و ثلاث كرات
حمراء . و من أجل ذلك لدينا :

4^1 إمكانية لسحب الكرة السوداء
C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة السوداء
3^3 إمكانية لسحب ثلاث كرات حمراء

إذن : $p[X=1]=\dfrac{4^1\times C_4^1\times 3^3}{7^4}=\dfrac{432}{2401}$

لنحسب : $p[X=2]$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين حمراوين و كرتين سوداوين .
و من أجل ذلك لدينا :

4^2 إمكانية لسحب الكرتين السوداوين .
C_4^2 إمكانية لاختيار مكان الكرتين السوداوين .
3^2 إمكانية لسحب الكرتين الحمراوين .

إذن : $p[X=2]=\dfrac{4^2\times C_4^2\times 3^2}{7^4}=\dfrac{864}{2401}$

لنحسب : $p[X=3]$

الحدث $[X=3]$ هو الحصول على ثلاث كرات سوداء و كرة حمراء واحدة . و من أجل ذلك لدينا :

3^1 إمكانية لسحب الكرة الحمراء .

C_4^1 إمكانية لاختيار السحبة صاحبة الكرة الحمراء .

4^3 إمكانية لسحب الكرات السوداء الثلاث .

إذن : $\boxed{p[X=3] = \dfrac{3^1 \times C_4^1 \times 4^3}{7^4} = \dfrac{768}{2401}}$

لنحسب : $p[X=4]$

الحدث $[X=4]$ هو الحصول على أربع كرات كلها سوداء .

إذن : $\boxed{p[X=4] = \dfrac{4^4}{7^4} = \dfrac{256}{2401}}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بما يلي

$$P_X \ : \ \{0,1,2,3,4\} \ \mapsto \ [0,1]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \ \mapsto \ P_X(0) = \dfrac{81}{2401} \\ 1 \ \mapsto \ P_X(1) = \dfrac{432}{2401} \\ 2 \ \mapsto \ P_X(2) = \dfrac{864}{2401} \\ 3 \ \mapsto \ P_X(3) = \dfrac{768}{2401} \\ 4 \ \mapsto \ P_X(4) = \dfrac{256}{2401} \end{array}}$$

و للتأكد من صحة الجواب يجب أن نحصل على :

$$\boxed{\frac{81}{2401} + \frac{432}{2401} + \frac{864}{2401} + \frac{768}{2401} + \frac{256}{2401} = 1}$$

2 I

$$E(X) = \sum_0^4 k \cdot p[X=k]$$

$$= 0\left(\frac{81}{2401}\right) + 1\left(\frac{432}{2401}\right) + 2\left(\frac{864}{2401}\right) + 3\left(\frac{768}{2401}\right) + 4\left(\frac{256}{2401}\right)$$

$$= \frac{5488}{2401} = \frac{16}{7}$$

1 II

لدينا : $p(E \cap N) = p_N(E) \times p(N)$

و لدينا كذلك الحدث E هو الحصول على ثلاث كرات سوداء من خلال ثلاث سحبات متتابعة بدون إحلال .

إذن نستطيع تجزيء الحدث E في المرحلة الثالثة إلى ثلاث أحداث جزئية و مستقلة فيما بينها و هي :

E_1 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الأولى

E_2 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثانية

E_3 : الحصول على كرة سوداء في السحبة الثالثة

إذن نكتب : $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3$

و منه : $p_N(E) = p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3)$

يعني :

$$\begin{aligned} p(E \cap N) &= p_N(E) \times p(N) \\ &= p_N(E_1) \times p_N(E_2) \times p_N(E_3) \times p(N) \\ &= \frac{9}{12} \times \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} \times \frac{4}{7} = \frac{2016}{9240} = \boxed{\frac{12}{55}} \end{aligned}$$

2 II

$$\begin{aligned} p(E) &= p(E \cap N) + p(E \cap R) \\ &= \frac{12}{55} + p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R) \\ &= \frac{12}{55} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7} \\ &= \frac{12}{55} + \frac{72}{9240} = \boxed{\frac{87}{385}} \end{aligned}$$

3 II

لنحسب $p_E(R)$

$$\begin{aligned} p_E(R) &= \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{p_R(E) \times p(R)}{p(E)} \\ &= \frac{p_R(E_1) \times p_R(E_2) \times p_R(E_3) \times p(R)}{p(E)} \\ &= \frac{\frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{3}{7}}{\frac{87}{385}} = \boxed{\frac{1}{29}} \end{aligned}$$

التمرين الثالث

1 I

لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(E) : 2\,z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a-1)^2 - 8(a-1)^2 \\ &= -4(a-1)^2 \\ &= \big(2i(a-1)\big)^2 \end{aligned}$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 .

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= \frac{2(a-1) + 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1+i)}{2} \\ z_2 &= \frac{2(a-1) - 2i(a-1)}{4} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} \end{aligned}}$$

أ 2 I

لدينا $a = e^{i\theta}$ مع $0 < \theta < \pi$ إذن : $(a-1) = e^{i\theta} - 1$

$$\begin{aligned} (a-1) = e^{i\theta} - 1 &= \cos\theta + i\sin\theta - 1 \\ &= \cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta) \end{aligned}$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بحيث : $(a-1) = r\,e^{i\varphi}$.

يعني : $\cos(\theta) - 1 + i\sin(\theta) = r\cos(\varphi) + i\,r\sin(\varphi)$

أي : $\begin{cases} \cos(\theta) - 1 = r\cos(\varphi) \\ \sin(\theta) = r\sin(\varphi) \end{cases}$

من خلال دمج مربعي هاتين المتساويتين :

نجد : $(\cos(\theta) - 1)^2 + sin^2\theta = r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)$

يعني : $cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 + sin^2\theta = r^2$

يعني : $2(1-\cos\theta) = r^2$

يعني : $2\left(1-\left(2\,cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right)\right) = r^2$

يعني : $2\left(2-2\,cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=r^2$

يعني : $4\left(1-\,cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=r^2$

يعني : $4\,sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=r^2$

يعني : $r = 2\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ و $r>0$

يكفي الآن تحديد قيمة φ . و ننطلق من الكتابة $\sin\theta = r\sin\varphi$

يعني : $\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\varphi)$

يعني : $\cancel{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cancel{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sin(\varphi)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$

يعني : $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$

يعني : $\frac{\theta}{2}\equiv\varphi-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

يعني $\varphi\equiv\frac{\theta+\pi}{2}\ [2\pi]$ إذن : $\boxed{(a-1)=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}}$

ملاحظة : يمكن تطبيق القاعدة التالية مباشرة

$$e^{ix}+e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

I 2 ب

في البداية لدينا :

$$(1+i) = \sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right) = \sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt2 e^{\frac{i\pi}{4}}$$

و لدينا كذلك :

$$(1-i)=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)=\sqrt2 e^{\frac{-i\pi}{4}}$$

إذن : $z_1 = \frac{(a-1)(1+i)}{2} = \frac12\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt2\, e^{\frac{i\pi}{4}}e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

$= \sqrt2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i(2\theta+3\pi)}{4}}$

$z_2 = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = \frac12\cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\sqrt2\, e^{\frac{-i\pi}{4}}e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

$= \sqrt2\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i(2\theta+\pi)}{4}}$

II 1

لدينا J هي منتصف القطعة $[AC]$.

إذن : $\boxed{aff(J) = \frac{aff(A)+aff(C)}{2} = \frac{a+i}{2}}$

و لدينا K هي منتصف القطعة $[AB]$.

إذن : $\boxed{aff(K) = \frac{aff(A)+aff(B)}{2} = \frac{a-i}{2}}$

II 2

لدينا r_1 دوران مركزه J و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

و لدينا $r_1(C)=C'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(C')-aff(J)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(C)-aff(J))$$

$$\Leftrightarrow \left(c'-\frac{a+i}{2}\right)=i\left(i-\frac{a+i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow c' = \frac{-1-ia+a+i}{2} = \frac{(a-1)(1-i)}{2}=z_2$$

و بنفس الطريقة لدينا r_2 دوران مركزه K و زاويته $\frac{\pi}{2}$

و لدينا $r_2(A)=A'$ إذن حسب التعريف العقدي للدوران نكتب :

$$(aff(A')-aff(K)) = e^{\frac{i\pi}{2}}(aff(A)-aff(K))$$

$$\Leftrightarrow \left(a'-\frac{a-i}{2}\right)=i\left(a-\frac{a-i}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{ia-1+a-i}{2} = \frac{(a-1)(1+i)}{2}=z_1$$

إذن : $\boxed{c'=z_2 \quad \text{و} \quad a'=z_1}$

II 3

لدينا : $\frac{a'-c'}{a-1} = \frac{\frac{(a-1)(i+1)}{2}-\frac{(a-1)(1-i)}{2}}{\frac{a-1}{1}}$

$= \frac{(a-1)(i+1-1+i)}{2}\times\frac{1}{(a-1)}$

$= \frac{i\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}} = i$

إذن : $\frac{a'-c'}{a-1}=i$ و منه : $\arg\left(\frac{a'-c'}{a-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

يعني : $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{C'A'}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

و هذا يعني أن المستقيم (AB') عمودي على المستقيم $(A'C')$.

أي أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$

لأن $B'\in(AB')$ و $(A'C')\perp(AB')$.

التمرين الرابع

1 أ

لدينا : $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0^+)^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1 = f(0)$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)}$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة على يمين الصفر .

لنحسب الآن نهاية f بجوار $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(+\infty)^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

1 ب

لدراسة اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$

و من أجل ذلك نستعين بالنهايتين التاليتين :

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$$

لدينا :
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$

نضرب البسط و المقام في المرافق $\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)$ نجد :

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}{1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{1-1-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{-(x\ln x)^2}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}(-x(\ln x)^2)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}\left(1+\sqrt{1+(x\ln x)^2}\right)}\right)$$
$$=(-0)\left(\frac{1}{\sqrt{1+(0)^2}\left(1+\sqrt{1+(0)^2}\right)}\right)=(0)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

إذن :
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=0}$$

و هذا يعني أن الدالة f قابلة للإشتقاق على يمين الصفر و $f_d'(0)=0$.

1 ج

تذكير : إذا كانت g دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال I .
و كانت f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على مجال J .
إذن تكون الدالة $f\circ g$ قابلة للإشتقاق على المجال I إذا كان : $g(I)\subseteq J$

لدينا :
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}$$

نضع : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

و نضع : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ \psi(x)=x\ln x$

إذن : $\forall\, x\,\epsilon\,]0;+\infty[\ ;\ f(x)=\varphi\circ\psi\,(x)$

لدينا ψ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$
و φ دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
إذن تكون الدالة $\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$
إذا كان : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$
ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $\psi(x)=x\ln x\ \epsilon\ \left[\frac{1}{e},+\infty\right[\subset\mathbb{R}$

إذن : $\psi(\,]0,+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$

إذن الدالة $f=\varphi\circ\psi$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$. لدينا :

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(x\ln x)^2}}=(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-1}{2}}}$$

إذن :
$$f'(x)=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-1}{2}-1}(1+(x\ln x)^2)'$$
$$=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(x\ln x)'$$
$$=\frac{-1}{2}(1+(x\ln x)^2)^{\frac{-3}{2}}(2x\ln x)(1+\ln x)$$
$$=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

إذن :
$$\boxed{(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

1 د

نلاحظ في البداية أن : $(\forall x>0)\ ;\ (1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}>0$
إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارتي الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.
الكمية $\ln x$ تنعدم في 1 و الكمية $1+\ln x$ تنعدم في $\frac{1}{e}$.
نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	1	↘	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	↗	1	↘	0

2 أ

لدينا :
$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln x}dx=\int\frac{(\ln x)'}{(\ln x)}dx$$
$$=\ln(|\ln x|)+c\quad ;\quad c\epsilon\mathbb{R}$$

بما أن : $x\,\epsilon\,[e;+\infty[$ فإن : $\ln x\geq 1$
نأخذ الثابتة c تساوي 0 نجد أن الدالة $x\to\ln(\ln x)$ دالة أصلية
للدالة $x\to\dfrac{1}{x\ln x}$ على المجال $[e;+\infty[$.
و أشير إلى أن $x\to\ln(\ln x)$ دالة معرفة و متصلة على $]1;+\infty[$
إذن فهي متصلة على $[e,+\infty[$ لأن : $[e,+\infty[\ \subset\ ]1,+\infty[$.

2 ب

ليكن t عنصرا من المجال $[e,+\infty[$.

ننطلق من المتفاوتة $0 < 1$ و نضيف إلى طرفيها الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(t\ln t)^2 < 1+(t\ln t)^2$

و منه : $\sqrt{(t\ln t)^2} < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$

يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2}$ $\quad(1)$

و لدينا كذلك $t \geq e$ إذن $\ln t \geq 1$.

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نجد : $t\ln t \geq e > 1$

نحتفظ بالمتفاوتة : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t > 1$

التي تصبح : $(\forall t \geq e)\ ;\ (t\ln t)^2 > 1$

نضيف إلى طرفي هذه المتفاوتة الكمية $(t\ln t)^2$

نجد : $(\forall t \geq e)\ ;\ 2\,(t\ln t)^2 > 1+(t\ln t)^2$

يعني : $(\forall t \geq e)\ ;\ \sqrt{2}\,t\ln t > \sqrt{1+(t\ln t)^2}$ $\quad(2)$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln t < \sqrt{1+(t\ln t)^2} < \sqrt{2}\,t\ln t}$$

2 ج

من خلال آخر تأطير حصلنا عليه نستنتج أن :

$$(\forall t \geq e)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t\ln t}\right) < \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}} < \frac{1}{t\ln t}$$

ليكن x عددا حقيقيا بحيث $x \geq e$.

نُدخل التكامل $\int_e^x dt$ على هذا التأطير نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_e^x \left(\frac{1}{t\ln t}\right)dt < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \int_e^x \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}[\ln(\ln t)]_e^x < \displaystyle\int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < [\ln(\ln t)]_e^x$

يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \displaystyle\int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$

2 د

لدينا حسب آخر تأطير :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+(t\ln t)^2}}\,dt < \ln(\ln x)$$

إذن : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \displaystyle\int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = \ln(\ln(+\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)}_{x\to+\infty\ \searrow\ +\infty} < \int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\ln(\ln x)}_{x\to+\infty\ \searrow\ +\infty}}$$

و هذا يعني حسب خاصية التأطير و النهايات أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_e^x f(t)\,dt = +\infty}$$

إذن :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt + \int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\binom{constante}{réelle} + \lim_{x\to+\infty}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right) \\
&= (+\infty)+(+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$ $\quad(1)$

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x) < \int_e^x f(t)\,dt < \ln(\ln x)$$

نضرب أطراف هذا التأطير في العدد الموجب قطعا $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لنحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(\ln x)}{x}\right)$

لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)\times\frac{\ln x}{\ln x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\right)\times\frac{\ln x}{x} \\
&= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty\\ y=\ln x}} \frac{\ln y}{y}\times\frac{\ln x}{x} = 0\times 0 = 0
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(\ln x)}{x}\right) = 0}$

و نحصل بذلك على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\ln(\ln x)}{x}\right)}_{x\to+\infty\ \searrow\ 0} < \frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt < \underbrace{\frac{\ln(\ln x)}{x}}_{x\to+\infty\ \searrow\ 0}}$$

و منه حسب خاصية النهايات و التأطير نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_e^x f(t)\,dt = 0}$$

نستغل إذن هذه النهاية لحساب : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$

لدينا :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt+\int_e^x f(t)\,dt\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^e f(t)\,dt\right)+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_e^x f(t)\,dt\right)}_{0}\\ &= \left(\frac{1}{+\infty}\right)\times\left(\begin{matrix}constante\\ réelle\end{matrix}\right)+0=0\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0}$ (2)

و يمكن تفسير النهايتين (1) و (2) بقولنا : المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل .

2 هـ

لدراسة نقط انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_F)$ ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$.

لدينا F دالة عددية معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$.

أو بتعبير الاشتقاق نكتب : $\forall x \in [0,+\infty[\ ;\ F'(x)=f(x)$

و بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

فإن الدالة F' قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ ; F''(x)=f'(x)=\dfrac{-x\ln x\,(1+\ln x)}{(1+(x\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}$

إذن تنعدم الدالة $F''(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

عندما تنعدم الكميتين $(\ln x)$ و $(1+\ln x)$.

أي تنعدم الدالة $F''(x)$ إذا كان $x=1$ أو $x=\frac{1}{e}$

و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطتين و ذلك حسب جدول الإشارة السابق .

و بالتالي $(\mathscr{C}_F)$ يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي $\frac{1}{e}$ و 1 .

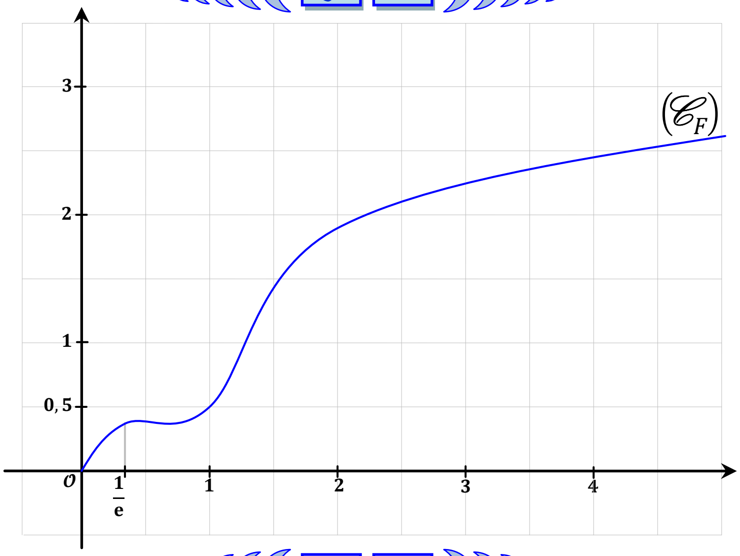
و يمكن أن نضيف جدول التقعر للمنحنى $(\mathscr{C}_F)$

و ذلك انطلاقا من جدول إشارة $f'(x)$.

لأن : $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ F''(x)=f'(x)$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$F''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(\mathscr{C}_F)$		$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ محدب	نقطة انعطاف	$(\mathscr{C}_F)$ مقعر	

2 ز



3 أ

نستعمل النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

لدينا :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) &= \lim_{x\to+\infty}(x-F(x))=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{F(x)}{x}\right)\\ &=(+\infty)(1-0)=+\infty\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty}$

من جهة ثانية لدينا φ معرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $\varphi(x)=x-F(x)$

و لدينا كذلك F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ بحيث : $F'(x)=f(x)$

إذن φ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

و لدينا : $\varphi'(x)=1-F'(x)=1-f(x)$

نلاحظ أنه إذا كان $x=0$ فإن $f(x)=1$

يعني : $1-f(x)$ أي : $\varphi'(x)=0$

<u>إذا كان</u> $0\leq x\leq\frac{1}{e}$ فإن $f(0)\geq f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

إذن : $1\geq f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$

يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

<u>إذا كان</u> $\frac{1}{e}\leq x\leq 1$ فإن $f\left(\frac{1}{e}\right)\leq f(x)\leq f(1)$

لأن f دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

إذن $f\left(\frac{1}{e}\right)\leq f(x)\leq 1$ يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$

إذن φ دالة تزايدية على المجال $\left[\frac{1}{e},1\right]$.

<u>إذا كان</u> : $x\geq 1$ فإن : $f(x)\leq f(1)$

لأن f دالة تناقصية على المجال $[1,+\infty[$.

إذن : $f(x)\leq 1$ يعني : $1-f(x)\geq 0$ أي : $\varphi'(x)\geq 0$.

إذن φ دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$.

<u>**خلاصة**</u> : $\boxed{\varphi \text{ دالة تزايدية قطعا على المجال } [0,+\infty[}$

3 ب

لدينا φ دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.
إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو صورته $\varphi([0,+\infty[)$.
و لدينا : $\varphi([0,+\infty[) = \left[\varphi(0) ; \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)\right[= [0,+\infty[$
إذن φ تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو المجال $[0,+\infty[$.
و هذا يعني حسب تعريف التقابل :
$$(\forall\, y \in [0,+\infty[\,), (\exists!\, x \in [0,+\infty[\,) \;;\; \varphi(x) = y$$
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .
إذن : $n \in [0,+\infty[$ لأن : $\mathbb{N} \subset [0,+\infty[$
إذن يوجد عنصر وحيد نرمز له بـ α_n في المجال $[0,+\infty[$
بحيث : $\varphi(\alpha_n) = n$
أو بتعبير آخر : المعادلة $\varphi(x) = n$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا
و هو α_n في المجال $[0,+\infty[$ و ذلك كيفما كان n من $\mathbb{N}$.
أو بتعبير أخير : $(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists!\ \alpha_n \geq 0) \;;\; \varphi(\alpha_n) = n$

3 ج

رأينا حسب السؤال ب) أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; \alpha_n \geq 0$
إذن $F(\alpha_n) \geq F(0)$ لأن F تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.
يعني أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; F(\alpha_n) \geq 0 \quad (1)$
و نعلم أن : $(\forall x \geq 0) \;;\; \varphi(x) = x - F(x)$
إذن : $\varphi(\alpha_n) = \alpha_n - F(\alpha_n)$ لأن : $\alpha_n \geq 0$
يعني : $F(\alpha_n) = \alpha_n - \varphi(\alpha_n) \quad (2)$
بدمج (1) و (2) نحصل على : $\alpha_n - \varphi(\alpha_n) \geq 0$
يعني : $\alpha_n \geq \varphi(\alpha_n)$
و نعلم أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; \varphi(\alpha_n) = n$
إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; \alpha_n \geq n$
نلاحظ أن : $\lim\limits_{n\infty} n = +\infty$ إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; \alpha_n \geq \underset{\substack{\searrow n\infty \\ +\infty}}{n}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty}$

4 أ

الطريقة الأولى : استعمال الرتابة

في البداية سوف نبين أن : $\forall\, x \in [1,+\infty[\;;\; xf(x) < F(x)$
ثم بعد ذلك نعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x) = \frac{F(x)}{x}$
نبين أن هذه الدالة g تناقصية على $[1,+\infty[$ و ذلك عن طريق تحديد إشارة مشتقتها الأولى $g'(x)$. ثم نستغل هذه الرتابة لإظهار المتفاوتة المطلوبة . $(let's\ \ get\ back\ to\ work\ now)$
لنبين أن : $\forall\, x \in [1,+\infty[\;;\; xf(x) < F(x)$
من أجل ذلك سوف نستعمل الخاصية التالية :

$$\begin{cases} f\ est\ continue\ sur\ [a,b] \\ \forall\, x \in [a,b] \;;\; m < f(x) < M \end{cases}$$
$$\Rightarrow \boxed{m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)}$$

لدينا f دالة متصلة و تناقصية على كل مجال $[0,x]$ حيث $x \geq 1$.
و لدينا $(\forall\, x \geq 1) \;;\; 0 < f(x) < 1$.
إذن : $m = \min\limits_{[0,x]}(f(x)) = f(x)$ و $M = \max\limits_{[0,x]}(f(x)) = f(0)$

$$\Rightarrow\ (x-0)f(x) < \int_0^x f(t)\,dt < (x-0)f(0)$$
$$\Rightarrow\ \boxed{xf(x) < F(x) < x}$$
$$\Rightarrow\ g'(x) < 0 \;;\; car\ \ g'(x) = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}$$
$$\Rightarrow\ \boxed{g\ est\ \searrow\ sur\ [1,+\infty[}$$
$$\Rightarrow\ g(\alpha_n) \leq g(n) \;;\; car\ \alpha_n \geq n$$
$$\Rightarrow\ \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n}$$
$$\Rightarrow\ \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n) \;;\; car\ \ f(n) > 0$$
$$\Rightarrow\ 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) \;;\; car \begin{cases} et\ F(\alpha_n) \geq 0 \\ et\ \alpha_n > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\ d'où\ le\ résultat\ voulu\ \star$$

الطريقة الثانية : استعمال TAF

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[1,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{F(x)}{x}$
شرطا الإتصال و الإشتقاق محققين في هذه الدالة لأنها خارج مُعَرَّف لدالتين متصلتين و قابلتين للإشتقاق على المجال $[1,+\infty[$.
نطبق إذن مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $[n,\alpha_n]$ نجد :

$$\Rightarrow\ \exists\, c \in\,]n,\alpha_n[\;;\; \frac{\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n}}{\alpha_n - n} = g'(c) = \frac{cf(c) - F(c)}{c^2}$$

نلاحظ أن : $1 \leq n < c \leq \alpha_n$ إذن حسب ما سبق نستنتج أن:

$$\Rightarrow\ cf(c) - F(c) < 0$$
$$\Rightarrow\ \frac{cf(c) - F(c)}{c^2} < 0$$
$$\Rightarrow\ \frac{\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n}}{\alpha_n - n} < 0$$
$$\Rightarrow\ \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{n} < 0 \;;\; car\ \ \alpha_n - n \geq 0$$
$$\Rightarrow\ \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n}$$
$$\Rightarrow\ \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) \;;\; car\ f(n) > 0$$
$$\Rightarrow\ 0 < \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} < \frac{F(n)}{n} + f(n) \;;\; car \begin{cases} et\ F(\alpha_n) \geq 0 \\ et\ \alpha_n > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\ d'où\ le\ résultat\ voulu\ \star$$

4 ب

نعلم حسب الأسئلة السابقة أن :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad و \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0}$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{F(n)}{n}+f(n)\right)=0$

و منه فإن التأطير $(\star)$ يُصبح :

$$(\forall n\geq 1)\;;\;\underbrace{0}_{n\infty\,\searrow\,\mathbf{0}}<\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}<\underbrace{\frac{F(n)}{n}+f(n)}_{n\infty\,\searrow\,\mathbf{0}}$$

و منه حسب مصاديق التقارب نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}=0}$ $(\blacksquare)$

من جهة أخرى نعلم أن : $(\forall x\geq 0)\;;\;\varphi(x)=x-F(x)$

لدينا $\alpha_n\geq 0$ إذن $\varphi(\alpha_n)=\alpha_n-F(\alpha_n)$

و نعلم كذلك أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\;;\;\varphi(\alpha_n)=n$

إذن : $n=\alpha_n-F(\alpha_n)$ يعني : $F(\alpha_n)=\alpha_n-n$

أي : $\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}=\dfrac{\alpha_n-n}{\alpha_n}=1-\dfrac{n}{\alpha_n}$

يعني : $\lim\limits_{n\infty}\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}=\lim\limits_{n\infty}\left(1-\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$

يعني : $0=1-\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)$ يعني : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)=1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{n}{\alpha_n}\right)}=\dfrac{1}{1}=1$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)=1}$

التمرين الخامس

1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n\geq 1$

لدينا :

$$\begin{aligned}v_n=\ln(u_n)&=\ln\left(\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}\right)\\&=n^2\ln\left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)\\&=n^2\left[\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))\right]\end{aligned}$$

2

نعتبر f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln(\arctan(x))$

لدينا حسب الخاصيات العامة لاتصال مركب دالتين أن الدالة f متصلة على $]0;+\infty[$ و كذلك f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

لأن ln دالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و $arctan$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $]0;+\infty[\subset\mathbb{R}$.

إذن بإمكاننا تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f في أي مجال محدود و يوجد ضمن $]0;+\infty[$

ليكن $n\geq 1$ و نختار المجال $[n\,;\,n+1]$.

إذن يوجد عدد حقيقي c من المجال $]n\,;n+1[$ بحيث :

$$(**)\quad\boxed{\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f'(c)}$$

لدينا : $\forall\,x\,\epsilon\,]0;+\infty[\;\;;\;\;f(x)=\ln(\arctan(x))$

إذن :

$$f'(x)=\frac{(\arctan(x))'}{\arctan(x)}=\frac{\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)}{\arctan(x)}=\frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}$$

إذن بالرجوع إلى المتساوية $(**)$ نجد :

$$\boxed{\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=\frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n+1))-\ln(\arctan(n))=\frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

يعني :

$$\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))=\frac{-1}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الغير المنعدم n^2 نجد :

$$n^2[\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))]=\frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

و باستعمال نتيجة السؤال 1) نجد : $\boxed{v_n=\dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}}$

خلاصة :

$$\boxed{(\forall n\geq 1)\,,(\exists\,c\,\epsilon\,]n;n+1[\,)\;;\;v_n=\frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}}$$

3

لدينا : $n<c<n+1$

نُدخل الدالة $arctan$ على هذا التأطير و علما أنها تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ نجد :

(1) $\arctan(n)<\arctan(c)<\arctan(n+1)$

و لدينا كذلك : $n<c<n+1$

إذن : $(1+n^2)<(1+c^2)<1+(n+1)^2$ (2)

نضرب التأطيرين (1) و (2) طرفا بطرف نجد :

$$\boxed{\begin{aligned}&(1+n^2)\arctan(n)<(1+c^2)\arctan(c)<\\&\qquad<(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)\end{aligned}}$$

نُدخل على هذا التأطير دالة المقلوب نجد :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}<\frac{1}{(1+c^2)\arctan(c)}<\\&\qquad<\frac{1}{(1+n^2)\arctan(n)}\end{aligned}}$$

و نضرب أطرف هذا التأطير في العدد السالب قطعا $-n^2$ نجد :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<\frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}<\\&\qquad<\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}\end{aligned}}$$

و نستغل بعد ذلك نتيجة السؤال 2) نجد : $(\otimes)$

$$\boxed{\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)\arctan(n+1)}}$$

4

في البداية أذكركم بالنهايتين المهمتين التاليتين :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{-\pi}{2}} \quad \text{و} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}}$$

لدينا :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{-n^2}{n^2+2n+2}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right)$$

$$= (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

و لدينا كذلك :

$$\lim_{n\infty} \frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}$$

$$= \lim_{n\infty} \left(\frac{-n^2}{n^2+1}\right)\left(\frac{1}{arctan(n+1)}\right)$$

$$= (-1)\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{-2}{\pi}$$

إذن التأطير $(\otimes)$ يُصبح :

$$\underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+n^2)arctan(n)}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} \frac{-2}{\pi}} < v_n < \underbrace{\left(\frac{-n^2}{(1+(n+1)^2)arctan(n+1)}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} \frac{-2}{\pi}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نجد : $\boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = \frac{-2}{\pi}}$

و لدينا $v_n = \ln(u_n)$ إذن : $u_n = e^{v_n}$

و منه : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} e^{v_n} = e^{\left(\lim_{n\infty} v_n\right)} = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = e^{\left(\frac{-2}{\pi}\right)}}$

أجوبة امتحان الدورة العادية 2014

التمرين الأول 1

يكفي أن نبين أن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 31 و 331 لا تقسم كلا من العددين 31 و 331 .

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 31 هي : 2 و 3 و 5 .

و نلاحظ أن هذه الأعداد لا تقسم العدد 31 . إذن 31 عدد أولي .

الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 331 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17. و نلاحظ أن هذه الأعداد لا تقسم العدد 331 .

إذن 331 عدد أولي .

خلاصة : $a_1 = 31$ و $a_2 = 331$ عددان أوليان .

التمرين الأول 2

سوف نستعمل نظمة العد العشري و كذلك صيغة مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها 10 . ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

لدينا :

$$a_n = \underbrace{333\cdots3}_{n\ fois}1$$
$$= 1 + 3(10^1 + 10^2 + \cdots + 10^n)$$
$$= 3(10^0 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^n) + 1 - 3\times 10^0$$
$$= 3\left(\frac{10^{n+1}-1}{10-1}\right) - 2 = \frac{10^{n+1}-1}{3} - 2$$

$$\Longrightarrow\ 3\,a_n + 7 = 3\left(\frac{10^{n+1}-1}{3} - 2\right) + 7$$
$$= 10^{n+1} - 1 - 6 + 7$$
$$= 10^{n+1}$$

$$la\ conclusion : \boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 3a_n + 7 = 10^{n+1}}$$

التمرين الأول 3

ليكن k عنصرا من $\mathbb{N}$.

لدينا 31 عدد أولي و نلاحظ أن العدد 10 لا يقسم العدد 31 .

إذن : $10 \wedge 31 = 1$ و 31 عدد أولي .

و منه حسب مبرهنة $(Fermat)$:

$$10^{31-1} \equiv 1\,[31]$$
$$\Longrightarrow\ 10^{30} \equiv 1\,[31]$$
$$\Longrightarrow\ (10^{30})^k \equiv 1^k\,[31]\ ;\ (\forall k\epsilon\mathbb{N})$$
$$\Longrightarrow\ 10^{30k} \equiv 1\,[31]\ ;\ (\forall k\epsilon\mathbb{N})$$
$$\Longrightarrow\ 10^{30k+2} \equiv 100\,[31]\quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا : $100 \equiv 7\,[31]$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $10^{30k+2} \equiv 7\,[31]$

$$la\ conclusion : \boxed{(\forall k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 10^{30k+2} \equiv 7\,[31]}$$

التمرين الأول 4

ليكن k عددا صحيحا طبيعيا . $a_{30k+1} = 1 + 3\left(\dfrac{10^{30k+1+1}-1}{10-1}\right) - 3$

$$\Longleftrightarrow\ 3\,a_{30k+1} = 3 + 3 + 10^{30k+2} - 1 - 9 = 10^{30k+2} - 7$$
$$\Longleftrightarrow\ 3\,a_{30k+1} = 10^{30k+2} - 7\quad (*)$$

بما أن : $(\forall k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 10^{30k+2} - 7 \equiv 0\,[31]$

فإن : $\left(10^{30k+2} - 7\right) \equiv 0\,[31]$ $(**)$

إذن من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $3\,a_{30k+1} \equiv 0\,[31]$

يعني أن العدد 31 يقسم الجداء $3\,a_{30k+1}$.

و بما أن $31 \wedge 3 = 1$ فإنه حسب $Gauss$ نستنتج أن 31 يقسم a_{30k+1} .

التمرين الأول 5

سوف نستعمل البرهان بالخلف .

نفترض وجود x و y من $\mathbb{Z}$ بحيث $a_n x + 31y = 1$

و ليكن $n\epsilon\mathbb{N}^*$ بحيث : $n \equiv 1\,[30]$

إذن : $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ n = 30k + 1$

نعلم أن 31 يقسم a_{30k+1} مهما يكن k من $\mathbb{Z}$

إذن 31 يقسم a_n لأن : $n = 30k + 1$

إذن : $(\exists k'\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ a_n = 31k'$

نعوض إذن a_n بـ $31k'$ في المعادلة $a_n x + 31y = 1$ فنحصل على :

$$31k'x + 31y = 1$$
$$\Longleftrightarrow\ 31(k'x + y) = 1$$
$$\Longrightarrow\ 31\ divise\ 1\,,(\ car\ (k'x + y)\,\epsilon\,\mathbb{Z}\,)$$
$$\Longrightarrow\ Absurde\ (contradiction)$$

و بالتالي نستنتج من هذا التناقض ما يلي :

إذا كان $n \equiv 1\,[30]$ فالمعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

التمرين الثاني 1

يكفي أن نبين أن E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و أن :

$$\forall\ M(a,b)\,,M(c,d)\ \epsilon\ E\ ;\ M(a,b) - M(c,d)\ \epsilon\ E$$

E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنه يضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 .

و هو غير فارغ لأنه بإمكاننا رصد عنصر واحد على الأقل و هو $M(0,0)$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

لدينا :

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a-c & a-b-c+d \\ b-d & a+b-c-d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a-c) & (a-c)-(b-d) \\ (b-d) & (a-c)+(b-d) \end{pmatrix}$$
$$= M\big((a-c);(b-d)\big)\ \epsilon\ E$$

لأن : $(a-c)\ \epsilon\ \mathbb{R}$ و $(b-d)\ \epsilon\ \mathbb{R}$

نستنتج إذن أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية الأم $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

و ذلك حسب الخاصية المميزة لزمرة جزئية .

التمرين الثاني 2

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin E$$

المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ليست عنصرا من المجموعة E .

لأنه لا وجود لعددين حقيقيين a و b بحيث : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$

و التناقض الذي نحصل عليه هو أن : $1 - 0 = 2$

لكي يكون E جزءا مستقرا من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ يكفي أن نتحقق من أن :

$$\forall\ (A,B)\ \epsilon\ E^2\ ;\ A \times B\ \epsilon\ E$$

مع كامل الأسف ، هذه الخاصية غير محققة دائما لأننا نتوفر على مثال مضاد و هو المصفوفة $J = M(1,0)\ \epsilon\ E$.

و بتعبير آخر : لدينا $J\ \epsilon\ E$ و $J\ \epsilon\ E$ لكن $J \times J\ \notin\ E$

و بالتالي E جزء غير مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الثاني 3 أ

لدينا φ تطبيق معرف بما يلي :

$$\begin{aligned}\varphi \ : \ \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ (a+ib) &\longrightarrow M(a,b)\end{aligned}$$

لكي يكون تشاكلا من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),*)$ يكفي أن نبين أن :

$$\forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^* \ ; \ \varphi(z\times z') = \varphi(z)*\varphi(z')$$

ليكن $z=a+ib$ و $z'=c+id$ عددين عقديين غير منعدمين ،

من جهة أولى لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi(z)*\varphi(z') &= \varphi(a+ib)*\varphi(c+id)\\ &= M(a,b)*M(c,d)\\ &= M(a,b)\times N\times M(c,d)\\ &= \begin{pmatrix} a & a-b\\ b & a+b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(ac-bd) & (ac-ad-bc-bd)\\ (bc+ad) & (bc-bd+ac+ad)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(ac-bd) & (ac-bd)-(ad+bc)\\ (bc+ad) & (ac-bd)+(ad+bc)\end{pmatrix}\\ &= M\big((ac-bd);(bc+ad)\big) \in E\end{aligned}$$

لأن : $(ac-bd)\in\mathbb{R}$ و $(bc+ad)\in\mathbb{R}$

من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi(z\times z') &= \varphi\big((a+ib)\times(c+id)\big)\\ &= \varphi\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big)\\ &= M\big((ac-bd);(ad+bc)\big)\in E\end{aligned}$$

نستنتج أن : $\forall\,(z,z')\in(\mathbb{C}^*)^2 \ ; \ \varphi(z\times z') = \varphi(z)*\varphi(z')$

و هذا يعني أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),*)$.

التمرين الثاني 3 ب

لدينا :

$$\begin{aligned}\varphi \ : \ \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ (a+ib) &\longrightarrow M(a,b)\end{aligned}$$

لنبين أن φ تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* .

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E^* .

و لنحل في $\mathbb{C}^*$ المعادلة $\varphi(x+iy)=M(a,b)$ ذات المجهول $(x+iy)$.

هذه المعادلة تصبح : $M(x,y)=M(a,b)$

يعني : $\begin{pmatrix} x & x-y\\ y & x+y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-b\\ b & a+b\end{pmatrix}$

إذن : $x=a$ و $y=b$.

و هذا يعني أن للمعادلة السابقة حلا وحيدا في $\mathbb{C}^*$ و هو العدد العقدي الغير المنعدم $(a+ib)$. و بذلك نستنتج ما يلي :

$$(\forall\, M(a,b)\in E^*),(\exists!\ (x+iy)\in\mathbb{C}^*) \ ; \ \varphi(x+iy) = M(a,b)$$

و هذا يعني أن التطبيق φ تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* .

و بالتالي : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

التمرين الثاني 3 ج

نعلم أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي . إذن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية .

و نعلم أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),*)$.

إذن صورة الزمرة التبادلية $(\mathbb{C}^*,\times)$ هي الزمرة التبادلية $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)$

و نعلم أن : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$. إذن $(E^*,*)$ زمرة تبادلية .

التمرين الثاني 4

نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية . إذن $\times$ توزيعي على $+$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و منه $\times$ توزيعي على $+$ في E لأن $E\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

لتكن A و B و C ثلاث مصفوفات من المجموعة E .

$$\begin{aligned}A*(B+C) &= A\times N\times(B+C)\\ &= A\times(N\times B+N\times C)\\ &= A\times N\times B + A\times N\times C\end{aligned}$$

و بالتالي : $\forall\,(A,B,C)\in E^3 \ ; \ A*(B+C) = A*B+A*C$

و بنفس الطريقة نبين المتساوية الثانية .

يعني : $\forall\,(A,B,C)\in E^3 \ ; \ (B+C)*A = B*A+C*A$

و بالتالي القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$.

التمرين الثاني 5

يكون $(E,+,*)$ جسما إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} (E,+) \ \text{زمرة تبادلية} \\ (E^*,*) \ \text{زمرة} \\ * \ \text{توزيعي بالنسبة لـ} + \text{ في } E \end{cases}$$

و هذه الأشياء تم الحصول عليها من خلال النتائج السابقة . و لكي يكون $(E,+,*)$ تبادليا يكفي أن يكون $*$ تبادليا في E .

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E . من جهة أولى لدينا :

$$\begin{aligned}M(a,b)*M(c,d) &= M(a,b)\times N\times M(c,d)\\ &= \begin{pmatrix} a & a-b\\ b & a+b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & ac-bd+ad+bc\\ ad+bc & ac-bd-ad-bc\end{pmatrix}\\ &= M\big((ac-bd);(bc+ad)\big)\end{aligned}$$

من جهة ثانية لدينا : $M(c,d)*M(a,b) = M(c,d)\times N\times M(a,b)$

$$\begin{aligned}&= \begin{pmatrix} c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & a-b\\ b & a+b\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} c & c-d\\ d & c+d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & ac-bd+ad+bc\\ ad+bc & ac-bd-ad-bc\end{pmatrix}\\ &= M\big((ac-bd);(bc+ad)\big)\end{aligned}$$

و بالتالي : $\forall\, M(a,b),M(c,d)\in E \ ; \ M(a,b)*M(c,d) = M(c,d)*M(a,b)$

الخلاصة : $(E,+,*)$ جسم تبادلي .

التمرين الثالث 1 أ

لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-\sqrt{2}\,e^{i\theta}\right)^2 - 4e^{2i\theta}\\ &= 2e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta}\\ &= -2e^{2i\theta}\\ &= \left(\sqrt{2}\,i\,e^{i\theta}\right)^2\end{aligned}$$

التمرين الثالث 1 ب

المعادلة تقبل حلين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} - \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}(1-i)}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= e^{i\theta}\cdot e^{\frac{-i\pi}{4}} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}(1+i)}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= e^{i\theta} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

التمرين الثالث 2 أ

لدينا :
$$\frac{z_{T_1} - z_{T_2}}{z_A - z_O} = \frac{e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}\,e^{i\theta} - 0} = \frac{e^{i\theta}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)}{\sqrt{2}\,e^{i\theta}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{-i\pi}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = i \in i\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{T_1} - z_{T_2}}{z_A - z_O}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow (OA) \perp (T_1T_2)$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{T_2T_1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

التمرين الثالث 2 ب

لدينا k منتصف القطعة $[T_1T_2]$. إذن :
$$z_k = \frac{z_{T_1} + z_{T_2}}{2} = \frac{e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$$
$$= \frac{e^{i\theta}}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{-i\pi}{4}}\right) = \frac{e^{i\theta}}{2}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\theta}$$
$$\Rightarrow \frac{z_k - z_O}{z_A - z_O} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta} - 0}{\sqrt{2}\,e^{i\theta} - 0} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \frac{z_k - z_O}{z_A - z_O} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{Ok} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$
$$\Rightarrow k \in [OA]$$
$\Rightarrow$ A و k و O نقط مستقيمية

التمرين الثالث 2 ج

من خلال ما سبق حصلنا على الأشياء التالية :
$$\begin{cases} (T_1T_2) \perp (OA) \\ [T_1T_2] \text{ منتصف } k \\ k \in [OA] \end{cases}$$
إذن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1\,T_2]$.

التمرين الثالث 3 أ

ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى و $M'(z')$ صورتها بالدوران r .
$$r(M) = M' \Leftrightarrow (z_{M'} - z_{T_1}) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_M - z_{T_1})$$
$$\Leftrightarrow \left(z' - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(z - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$$
$$\Leftrightarrow z' = i\left(z - e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right) + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z' = iz + (1-i)\,e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z' = iz + \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{4}}\right)e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z' = iz + \sqrt{2}\,e^{i\theta}$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن الصيغة العقدية للدوران r . يعني :
$$\boxed{\begin{array}{llll} r & : & (\mathcal{P}) & \rightarrow (\mathcal{P}) \\ & & M(z) & \rightarrow M'\left(\sqrt{2}\,e^{i\theta} + iz\right) \end{array}}$$

ب لدينا : $r(I) = B$
$$\Leftrightarrow z_B = \sqrt{2}\,e^{i\theta} + i\,z_I$$
$$\Leftrightarrow b = \sqrt{2}\,e^{i\theta} + i$$

التمرين الثالث 3 ج

لدينا :
$$\frac{z_B - z_A}{z_I - z_J} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\theta} + i - \sqrt{2}\,e^{i\theta}}{1-(-1)} = \frac{1}{2}i \in i\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_I - z_J}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow (IJ) \perp (AB)$$

التمرين الثالث 4

لدينا C هي صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $-\vec{v}$. إذن نكتب :
$$\overrightarrow{AC} = -\vec{v} \Leftrightarrow aff\left(\overrightarrow{AC}\right) = aff(-\vec{v})$$
$$\Leftrightarrow z_c - z_A = -i$$
$$\Leftrightarrow z_c = z_A + i$$
$$\Leftrightarrow z_c = \sqrt{2}\,e^{i\theta} - i$$

التمرين الثالث 5

لدينا :
$$\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{\sqrt{2}\,e^{i\theta} + i + \sqrt{2}\,e^{i\theta} - i}{2} = \frac{2\sqrt{2}\,e^{i\theta}}{2} = \sqrt{2}\,e^{i\theta} = z_A$$

إذن :
$$\boxed{z_A = \frac{z_B + z_C}{2}}$$

و بالتالي A هي منتصف القطعة $[BC]$.

التمرين الرابع 1 أ

ندرس أولا الإتصال على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا : $f(x) = \frac{-x\ln x}{1+x^2}$; $(\forall x > 0)$

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

لدينا الدالة $x \rightarrow -x\ln x$ متصلة على $\mathbb{R}_+^*$.

لأنها عبارة عن جداء دالتين متصلتين على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا الدالة $x \rightarrow 1+x^2$ متصلة لأنها حدودية ذات معاملات حقيقية .

و لدينا : $(1+x^2) \neq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذن الدالة $f : x \rightarrow \frac{-x\ln x}{1+x^2}$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$

لأنها عبارة عن خارج دالتين متصلتين على المجال $]0;+\infty[$

و كذلك $1+x^2 \neq 0$; $(\forall x > 0)$.

<u>الإتصال على يمين الصفر</u>

لدينا :
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln x}{1+x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}(x\ln x) \times \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)$$
$$= 0 \times (-1) = 0 = f(0)$$

إذن f متصلة على اليمين في الصفر .

التمرين الرابع I 1 ب

لدينا : $f(x)=\left(\frac{-x}{1+x^2}\right)\ln x$; $(\forall\, x \in\,]0;+\infty[\,)$

نلاحظ أن : $\left(\frac{-x}{1+x^2}\right)\le 0$; $(\forall x \ge 0)$

إذن إشارة $f(x)$ على $]0;+\infty[$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $\ln x$.

إذا كان : $x=1$ فإن : $\ln x = 0$

إذا كان : $x>1$ فإن : $\ln x > 0$

إذا كان : $x<1$ فإن : $\ln x < 0$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	

التمرين الرابع I 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{-1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{-1}{x}(-\ln x)}{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$=\frac{-1}{x}(\ln x)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)=\frac{x\ln x}{1+x^2}=-f(x)$$

و بالتالي : $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$; $(\forall x>0)$

التمرين الرابع I 2 ب

لدينا الدالة $t\to t\ln t$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

و لدينا $t\to 1+t^2$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

لأنها حدودية ذات معاملات حقيقية .

إذن : $f: t\to \frac{-t\ln t}{1+t^2}$ دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

باعتبارها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

مع : $1+t^2\neq 0$; $(\forall t>0)$.

التمرين الرابع I 2 ج

لدينا f دالة متصلة على $[0,+\infty[$. إذن فهي متصلة على $[0,1]$.

و لدينا f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

إذن فهي قابلة للاشتقاق على المجال $]0;1[$.

و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\boxed{\exists\,\alpha\in\,]0,1[\ ;\ \frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\alpha)}$$

$$\Rightarrow\ \exists\,\alpha\in\,]0,1[\ ;\ f'(\alpha)=0\quad car\ f(1)-f(0)=0$$

التمرين الرابع I 2 د

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . لدينا : $\frac{1}{x}>0\ \Rightarrow\ x>0$

نلاحظ أن الدالتين f و $x\longrightarrow\frac{1}{x}$ قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

إذن : $x\longrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

و كذلك $x\longrightarrow -f(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

إذن نستطيع اشتقاق الدالتين $f\left(\frac{1}{x}\right)$ و $-f(x)$ من أجل $x>0$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)\ \Rightarrow\ \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=(-f(x))'$$

$$\Rightarrow\ \frac{-1}{x^2}\left(f'\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-f'(x)$$

$$\Rightarrow\ \frac{-1}{\alpha^2}\left(f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)=-f'(\alpha)\quad car\ \alpha>0$$

$$\Rightarrow\ f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0\ ;\ car\ f'(\alpha)=0$$

التمرين الرابع II

ملاحظة : لدينا : $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$; $(\forall\, x\ge 0)$

نلاحظ أن الدالة f متصلة فقط على المجال $]0;+\infty[$ و على يمين الصفر .

و هذا كاف للبحث عن الدالة F .

و نستطيع أن نكتب :

$$\boxed{F(x)=\lim_{a\to 0^+}\int_a^x f(t)\,dt\ ;\ \left(\begin{matrix} si\ cette\ limite\\ existe\ bien\ sûr\end{matrix}\right)}$$

و هذا النوع من التكاملات يسمى :

Les intégrales impropres

Ou bien

Les intégrales généralisées

و أشهر هذه التكاملات هو : $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$

التمرين الرابع II 1 أ

يكفي أن نبين أن : $\frac{t^2}{1+t^2}\le 1$ و $\frac{1}{2}\le\frac{t^2}{1+t^2}$; $(\forall\, t\ge 1)$

لدينا :

$$\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{1}{2}=\frac{2t^2-1-t^2}{2(1+t^2)}$$

$$=\frac{t^2-1}{2(1+t^2)}=\frac{(t-1)(t+1)}{2(1+t^2)}$$

نلاحظ أن : $(t-1)\ge 0$; $(\forall\, t\ge 1)$

إذن : $\frac{(t-1)(t+1)}{2(1+t^2)}\ge 0$; $(\forall\, t\ge 1)$

يعني : $\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{1}{2}\ge 0$; $(\forall\, t\ge 1)$

يعني : $\frac{t^2}{1+t^2}\ge\frac{1}{2}$; $(\forall\, t\ge 1)$

و بنفس الطريقة لدينا : $1-\frac{t^2}{1+t^2}=\frac{1+t^2-t^2}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}$

نلاحظ أن : $\frac{1}{1+t^2}\ge 0$; $(\forall\, t\ge 1)$

إذن : $1-\frac{t^2}{1+t^2}\ge 0$; $(\forall\, t\ge 1)$

يعني : $1\ge\frac{t^2}{1+t^2}$; $(\forall\, t\ge 1)$

الخلاصة : $\boxed{(\forall\, t\ge 1)\ ;\ 1\ge\frac{t^2}{1+t^2}\ge\frac{1}{2}}$

التمرين الرابع II 1 ب

ليكن $t \geq 1$ و $x \geq 1$

ننطلق من التأطير التالي : $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{t^2}{1+t^2} \leq 1$

نضرب جميع الأطراف في العدد الموجب $\dfrac{\ln t}{t}$ نحصل على :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t}{t}\right) \leq \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t} \leq \frac{\ln t}{t}$$

نُدخل التكامل $\int_1^x dt$ على هذه الدوال المتصلة و $1 \leq x$ نجد :

$$\frac{1}{2}\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt \leq \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}\, dt \leq \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$$

لنحسب الآن التكامل التالي : $\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$ و ذلك باستعمال مكاملة بالأجزاء .

$$\begin{aligned}\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt &= \int_1^x (\ln t)'(\ln t)\, dt \\ &= [(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x (\ln t)(\ln t)'\, dt\, dt \\ &= (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$$

$$\Rightarrow 2\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = (\ln x)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = \frac{(\ln x)^2}{2}}$$

نعود إلى آخر تأطير حصلنا عليه فنكتب :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln x)^2}{2}\right) \leq \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}\, dt \leq \frac{(\ln x)^2}{2}$$

نضرب جميع الأطراف في العدد -1 ثم نضيف الكمية $F(1)$ إلى جميع الأطراف نجد :

$$F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(1) - \int_1^x \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)\frac{\ln t}{t}\, dt \leq$$
$$\leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq \int_0^1 f(t)\, dt - \int_1^x -f(t)\, dt \leq$$
$$\leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq \int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^x f(t)\, dt \leq$$
$$\leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq \int_0^x f(t)\, dt \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$\boxed{F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}}$$

التمرين الرابع II 1 ج

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(F(1) - \dfrac{(\ln x)^2}{4}\right) = -\infty$

نحصل إذن على الوضعية التالية : $F(x) \leq \underbrace{F(1) - \dfrac{(\ln x)^2}{4}}_{\text{cette quantité tend vers } -\infty \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نكتب : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty}$ (1)

و لدينا كذلك : $F(1) - \dfrac{(\ln x)^2}{2} \leq F(x) \leq F(1) - \dfrac{(\ln x)^2}{4}$

نضرب جميع الأطراف في العدد الموجب $\dfrac{1}{x}$ نحصل على :

$$\frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right) \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$$

لنحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\left(\ln \sqrt{x}^2\right)^2}{(\sqrt{x})^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 \\ &= 4 \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4 \lim_{\substack{y\to+\infty \\ y=\sqrt{x}}} \left(\frac{\ln y}{y}\right)^2 \\ &= 4 \times 0^2 = 0\end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{\frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}_{\text{tend vers 0 lorsque } x \text{ tend vers } +\infty} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \underbrace{\frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4}\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}_{\text{tend vers 0 lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$$

نستنتج إذن أن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0}$ (2)

و من النهايتين (1) و (2) نستنتج أن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع II 2 أ

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من I

فإن الدالة :
$$\boxed{\begin{aligned} F :\ & I \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow \int_a^x f(t)\, dt\end{aligned}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I و التي تنعدم في a .

لدينا $\boxed{\begin{aligned} F :\ & [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow \int_0^x f(t)\, dt\end{aligned}}$ هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ و التي تنعدم في 0

و ذلك لأن f دالة متصلة على المجال $[0;+\infty[$. و $0 \in [0;+\infty[$

إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و مشتقتها على هذا المجال هي الدالة f .

يعني : $\boxed{\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ F'(x) = f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2}}$

التمرين الرابع III 2 ب

$(\forall\, x \geq 0)\ ;\ F'(x) = f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$F(1)$	$\searrow$	$-\infty$

التمرين الرابع III 1 أ

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$(\forall\, t > 0)\ ;\ \varphi(t) = \frac{1}{e} + t\ln t$$

نلاحظ أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.
باعتبارها مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.
و لدينا : $(\forall\, t > 0)\ ;\ \varphi'(t) = 1 + \ln t$

$$t = \frac{1}{e} \Rightarrow \varphi'(t) = 0$$
$$t > \frac{1}{e} \Rightarrow \varphi'(t) > 0$$
$$t < \frac{1}{e} \Rightarrow \varphi'(t) < 0$$

t	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$	0	$+$	
φ	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

نلاحظ أن 0 قيمة دنوية للدالة φ على المجال $]0;+\infty[$.
يعني : $(\forall\, t > 0)\ ;\ \varphi(t) \geq 0$
و منه : $(\forall\, t > 0)\ ;\ \frac{1}{e} \geq -t\ln t$

التمرين الرابع III 1 ب

ليكن t عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. لدينا : $-t\ln t \leq \frac{1}{e}$
نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{1+t^2}$ نجد :

$$\frac{-t\ln t}{1+t^2} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)$$

و بما أن : $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$
فإن : $\frac{-t\ln t}{1+t^2} \leq \frac{1}{e}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) \leq \frac{1}{e}\ ;\ (\forall\, t > 0)$
و من أجل $t = 0$ لدينا : $f(0) = 0 < \frac{1}{e}$
إذن : $(\forall\, t \geq 0)\ ;\ f(t) = \frac{1}{e}$

التمرين الرابع III 1 ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا .

$$(t \geq 0) \Rightarrow f(t) \leq \frac{1}{e}$$
$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{e}\,dt \quad car : \quad 0 \leq x \ \ et\ f\ et\ \tfrac{1}{e}\ \ sont\ continues$$
$$\Rightarrow F(x) \leq \frac{1}{e}x$$
$$\Rightarrow F(x) \leq \frac{1}{e}x < x\ ;\ car\ \ x > 0$$
$$\Rightarrow F(x) < x\ \ ;\ \forall\, x > 0$$

و بالتالي : $(\forall\, x > 0)\ ;\ F(x) < x$

التمرين الرابع III 2 أ

سوف نستعمل البرهان بالترجع .
نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ u_n\ \epsilon\ ]0,1[$
من أجل $n = 0$ لدينا $u_0\ \epsilon\ ]0;1[$
إذن العبارة (P_0) صحيحة .
ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$(P_n)\ est\ vraie \Rightarrow u_n\ \epsilon\ ]0,1[$$
$$\Rightarrow 0 < u_n < 1$$
$$\Rightarrow F(0) < F(u_n) < F(1)$$

لم يتغير الترتيب لأن F تزايدية على المجال $[0,1]$.

$$\Rightarrow 0 < F(u_n) < F(1)$$
$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < F(1)$$
$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < F(1) < 1$$
$$car\ \ F(x) < x\ \ ;\ \ \forall\, x > 0$$
$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$
$$\Rightarrow u_{n+1}\ \epsilon\ ]0,1[$$
$$\Rightarrow (P_{n+1})\ est\ vraie$$

و بالتالي نحصل على الوضعية التالية :

$$\begin{cases} (P_0)\ est\ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع نستنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ (P_n)\ est\ vraie$
يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n\ \epsilon\ ]0,1[$

التمرين الرابع III 2 ب

لدينا : $(*)$ $\boxed{(\forall\, x > 0)\ ;\ F(x) < x}$
و كذلك ، لدينا لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n\ \epsilon\ ]0,1[$
يعني أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$
نستطيع إذن تعويض x بـ u_n في الكتابة $(*)$.نحصل على : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ F(u_n) < u_n}$
يعني : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} < u_n$
إذن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .
و بما أنها مصغورة بـ 0 ($u_n > 0$) فهي متقاربة .

التمرين الرابع III 2 ج

لدينا $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية ترجعية معرفة بما يلي : $u_{n+1} = F(u_n)$.
و لدينا F دالة متصلة على المجال $[0;+\infty[$.
و كذلك $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة . إذن نهايتها l تحقق : $F(l) = l$
من جهة أخرى لدينا : $(\forall\, x > 0)\ ;\ F(x) < x$
و كذلك $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$
إذن الحل الوحيد للمعادلة $F(l) = l$ هو الصفر . و بالتالي : $\lim_{n\infty}(u_n) = 0$

التمرين الخامس | 1 | أ

نضع : $u : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ، $x \to -\frac{1}{x}$ و $v : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ، $x \to e^x$

لدينا u دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$. و لدينا v دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة $v \circ u$ متصلة على $\mathbb{R}^*$

و ذلك لأن جل صور عناصر $\mathbb{R}^*$ بالدالة u تقبل صورا بالدالة v

$(u(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbb{R})$

إذن الدالة $x \longrightarrow e^{\frac{-1}{x}}$ متصلة على $]0;+\infty[$

و نعلم أن : $x \longrightarrow \frac{1}{x^2}$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$.

إذن الدالة $x \longrightarrow \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}$: متصلة على المجال $]0;+\infty[$.

لأنها عبارة عن جداء دالتين متصلتين على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين الخامس | 1 | ب

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{2}{2x}e^{\frac{-1}{2x}}\right)^2 = 4\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{2x}e^{\frac{-1}{2x}}\right)^2$$
$$= 4\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\frac{1}{2x}}}\left(\frac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)}\right)^2 = 4\lim_{\substack{u\to+\infty\\ u=\frac{e^x}{x}}}\left(\frac{1}{u}\right)^2$$
$$= 0 = g(0)$$

إذن الدالة g متصلة على اليمين في الصفر .

التمرين الخامس | 1 | ج

لدينا :

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\right)$$
$$= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{2}{2x}e^{\frac{-1}{2x}}\right)^2 = 4\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{2x}e^{\frac{-1}{2x}}\right)^2$$
$$= 4\lim_{\substack{u\to-\infty\\ u=\frac{1}{2x}}}\left(\frac{1}{\left(\frac{e^u}{u}\right)}\right)^2 = 4\lim_{\substack{t\to0^-\\ t=\frac{e^u}{u}}}\left(\frac{1}{t}\right)^2$$
$$= +\infty \neq g(0)$$

إذن الدالة g غير متصلة على يسار الصفر .

و بالتالي g غير متصلة في الصفر .

لكن هذا لا يمنع من وجود الدالة L المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$L(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \lim_{a\to0^+}\int_a^x g(t)\,dt$$

$(Si\ cette\ limite\ existe\ bien\ sûr)$

التمرين الخامس | 2 | أ

لنحسب $L(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$.

و من أجل ذلك أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى : (*la réponse triviale*) .

$$L(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{t^2}\,e^{\frac{-1}{t}}\right)dt = \int_0^x \left(e^{\frac{-1}{t}}\right)'\,dt$$
$$= \int_0^x \left(t^2\,g(t)\right)'\,dt = [t^2 g(t)]_0^x$$
$$= x^2 g(x) - 0^2 g(0)$$
$$= x^2 g(x) = e^{\frac{-1}{x}}$$

الطريقة الثانية : (*la réponse universitaire*) .

$$L(x) = \int_0^x g(t)\,dt \quad ; \quad x\ fixé$$
$$= \lim_{a\to0^+}\int_a^x g(t)\,dt \quad ; \quad x\ fixé$$
$$= \lim_{a\to0^+}\int_a^x \left(\frac{1}{t^2}\,e^{\frac{-1}{t}}\right)dt \quad ; \quad x\ fixé$$
$$= \lim_{a\to0^+}\int_a^x \left(e^{\frac{-1}{t}}\right)'\,dt \quad ; \quad x\ fixé$$
$$= \lim_{a\to0^+}\left[e^{\frac{-1}{t}}\right]_a^x \quad ; \quad x\ fixé$$
$$= \lim_{a\to0^+}\left(e^{\frac{-1}{x}} - e^{\frac{-1}{a}}\right) \quad ; \quad x\ fixé$$
$$= e^{\frac{-1}{x}} - \lim_{a\to0^+}\left(e^{\frac{-1}{a}}\right) \quad ; \quad x\ fixé$$
$$= e^{\frac{-1}{x}} - \lim_{\substack{u\to-\infty\\ u=\frac{-1}{a}}} e^u \quad ; \quad x\ fixé$$
$$= e^{\frac{-1}{x}} \quad ; \quad x\ fixé$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x>0)\ ;\ L(x) = e^{\frac{-1}{x}}}$

التمرين الخامس | 2 | ب

لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ L(x) = e^{\frac{-1}{x}}$

الدالة L عبارة عن مُركب دالتين متصلتين φ و ψ المعرفتين بما يلي :

$\varphi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $x \longrightarrow \frac{-1}{x}$ و $\psi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $x \longrightarrow e^x$

نلاحظ أن جل صور عناصر $\mathbb{R}^*$ بالدالة φ تقبل صورا بالدالة φ

أو بتعبير آخر $\varphi(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbb{R}$.

إذن الدالة $x \longrightarrow e^{\frac{-1}{x}}$: متصلة على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين الخامس | 2 | ج

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+} L(x) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{\substack{u\to-\infty\\ u=\frac{-1}{x}}} e^u = 0$$

التمرين الخامس 3 أ

$$S_n = n\left(\left(\frac{1}{1}\right)^2 e^{\frac{-n}{1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{-n}{2}} + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}\right)^2 e^{\frac{-n}{n-1}}\right)$$

$$= \frac{n^2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\right)^2 e^{\frac{-n}{k}} \quad ; \ n \geq 1$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n}{k}\right)^2 e^{\frac{-n}{k}} \quad ; \ n \geq 1$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2} e^{\frac{-1}{\left(\frac{k}{n}\right)}} \quad ; \ n \geq 1$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \quad ; \ n \geq 1$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \underbrace{g\left(\frac{0}{n}\right)}_{=0}\right) \quad ; \ n \geq 1$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) \quad ; \ n \geq 1$$

و بالتالي :
$$\boxed{(\forall n \geq 1) \quad ; \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)}$$

التمرين الخامس 3 ب

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ فإن المتتالية :

$$S_n = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \quad ; \ n \geq 1$$

متقاربة و نهايتها هي التكامل $\int_a^b f(t)\,dt$.

أو بتعبير آخر : $\lim\limits_{n\infty}(S_n) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$

لدينا في هذا التمرين :
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$= \frac{(1-0)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(0 + \frac{k(1-0)}{n}\right)$$

و بما أن g متصلة على المجال $[0,1]$ حسب الإفتراض . فإنه حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و تؤول إلى $\int_0^1 g(t)\,dt$.

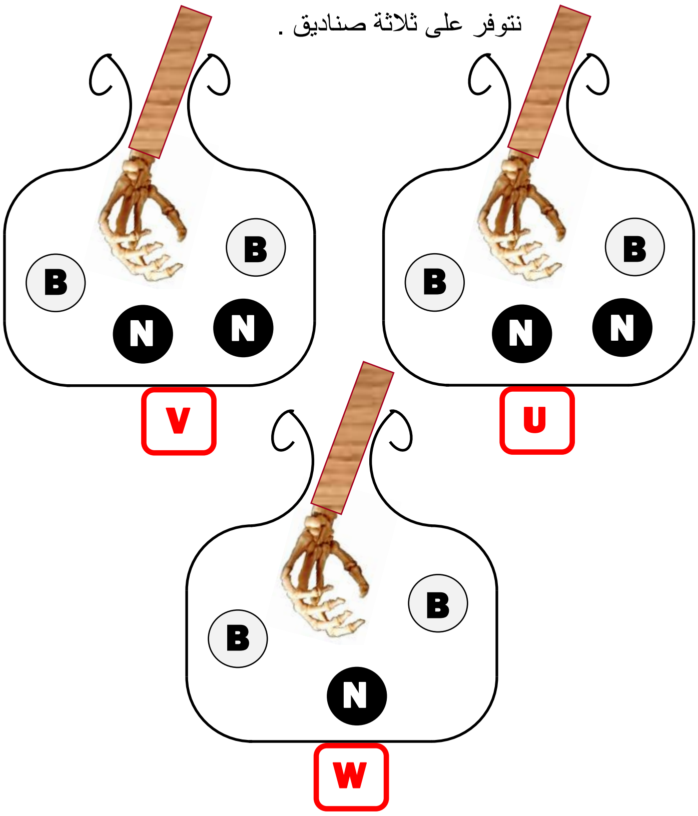
أو بتعبير آخر : $\lim\limits_{n\infty}(S_n) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = L(1) = \frac{1}{e}$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(S_n) = \dfrac{1}{e}}$

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2014

التمرين الأول 1

نتوفر على ثلاثة صناديق .



السحب الآني من هذه الصناديق يُحتم علينا استعمال التأليفات C_n^k في جل مراحل التمرين .

نحن أمام تجربة عشوائية تتساوى فيها احتمالات الأحداث الإبتدائية .
لأننا بصدد سحب عشوائي من صناديق تحتوي على كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس. و بذلك يكون احتمال أي حدث مساويا لخارج عدد امكانيات حدوثه على العدد الإجمالي للحالات الممكنة للتجربة المطروحة .

يعني : $p(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)}$; $\forall\ A \in \mathcal{P}(\Omega)$

نعتبر الحدث التالي : $A = \{$ يتم السحب من الصندوق U $\}$
$= \{$ الحصول على كرة بيضاء عندما نسحب كرة من الصندوق W $\}$

عندما نسحب عشوائيا كرة من الصندوق W الذي يحتوي على ثلاث كرات فإنه توجد C_3^1 نتيجة ممكنة لهذه التجربة العشوائية .
يعني : $card(\Omega_1) = C_3^1 = 3$. بحيث Ω_1 هو كون امكانيات هذه التجربة العشوائية الأولى (سحب كرة من W).

إذن : $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega_1)} = \frac{C_2^1}{C_3^1} = \frac{2}{3}$

إذن احتمال أن يتم السحب من الصندوق U يساوي $\frac{2}{3}$.

Autrement-dit, on a deux chances sur trois de tirer une boule blanche de l'urne W

التمرين الأول 1

نعتبر الأحداث التالية : $B_1 = \{$ نسحب الكرتين من الصندوق U $\}$
$= \{$ سحب كرة بيضاء من W $\}$

$N_1 = \{$ نسحب الكرتين من الصندوق V $\}$
$= \{$ سحب كرة بيضاء من W $\}$

$G = \{$ سحب كرتين بيضاوين في نهاية التجربة $\}$

$$\begin{aligned} p(G) &= p(G \cap B_1) + p(G \cap N_1) \\ &= p(B_1) \times p(G/B_1) + p(N_1) \times p(G/N_1) \\ &= \left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\right) \times \left(\frac{C_3^2}{C_5^2}\right) + \left(\frac{C_1^1}{C_3^1}\right) \times \left(\frac{C_2^2}{C_5^2}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}\right) = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

إذن احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة هو $\frac{7}{30}$.

Autrement-dit, on a sept chances sur 30 pour obtenir vers la fin du jeu deux boules blanches

التمرين الأول 3

نرمز بـ Ω لكون امكانيات التجربة العشوائية المنصوص عليها في التمرين بأكمله .

نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X المعرف بما يلي :

$$\begin{aligned} P_X \ :\ X(\Omega) &\longrightarrow [0;1] \\ k &\longrightarrow P_X(k) = p[X = k] \end{aligned}$$

لنحدد أولا المجموعة $X(\Omega)$.
X هو المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة .
في نهاية التجربة يمكن الحصول على :

- كرة بيضاء واحدة و أخرى سوداء .
- كرتين بيضاوين .
- كرتين سوداوين .

إذن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 و 1 و 2 .
أو بتعبير آخر : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$
لنحسب إذن احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X

لنحسب : $p[X = 0]$

الحدث $[X = 0]$ هو الحصول على كرتين سوداوين في نهاية التجربة .

إذن :

$$\begin{aligned} p[X = 0] &= p(NN) \\ &= p(NN \cap N_1) + p(NN \cap B_1) \\ &= p(N_1) \times p(NN/N_1) + p(B_1) \times p(NN/B_1) \\ &= \left(\frac{C_1^1}{C_3^1}\right) \times \left(\frac{C_3^2}{C_5^2}\right) + \left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\right) \times \left(\frac{C_2^2}{C_5^2}\right) \\ &= \left(\frac{C_1^1}{C_3^1}\right) \times \left(\frac{C_3^2}{C_5^2}\right) + \left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\right) \times \left(\frac{C_2^2}{C_5^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

لنحسب : $p[X = 1]$

الحدث $[X = 1]$ هو الحصول على كرة بيضاء واحدة و أخرى سوداء في نهاية التجربة .

إذن :

$$\begin{aligned} p[X = 1] &= p(BN) \\ &= p(BN \cap B_1) + p(BN \cap N_1) \\ &= p(B_1) \times p(BN/B_1) + p(N_1) \times p(BN/N_1) \\ &= \left(\frac{C_2^1}{C_3^1}\right) \times \left(\frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2}\right) + \left(\frac{C_1^1}{C_3^1}\right) \times \left(\frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{3 \times 2}{10}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3 \times 2}{10}\right) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

لنحسب : $p[X=2]$

الحدث $[X=2]$ هو الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة .

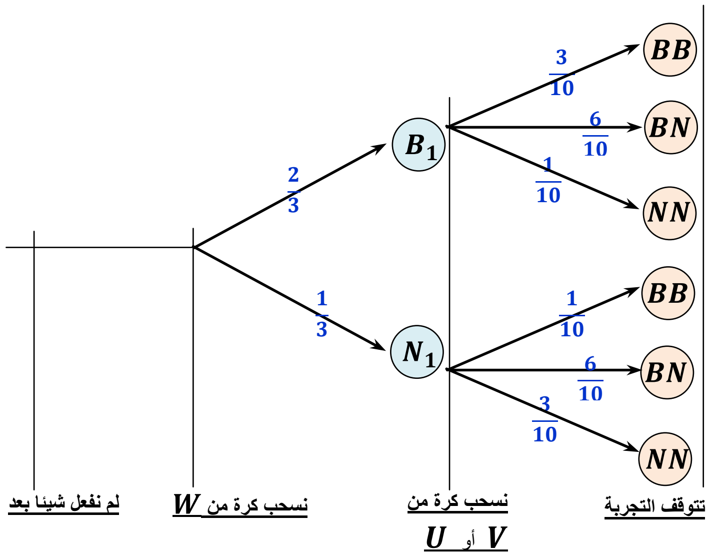
و نلاحظ أنه قد تم حسابه من خلال السؤال 2) .

و لدينا : $p[X=2] = p(BB) = \dfrac{7}{30}$

و بالتالي قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعرف بـ :

$$\begin{aligned} P_X \ : \ \{0,1,2\} &\longrightarrow [0;1] \\ 0 &\longrightarrow P_X(0) = \frac{1}{6} \\ 1 &\longrightarrow P_X(1) = \frac{3}{5} \\ 2 &\longrightarrow P_X(2) = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

إضافة : يمكن نَمذَجة هذا التمرين باستعمال شجرة الاحتمالات التالية :



التمرين الثاني 1

تذكير بمبدأ خوارزمية إقليدس

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ t & z \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x \wedge y = y \wedge t$$

ننجز القسمة الأقليدية للعدد b_n على العدد c_n نجد :

$$\begin{array}{c|c} b_n & c_n \\ 2 & 1 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c|c} 2\cdot 10^n + 1 & 2\cdot 10^n - 1 \\ 2\cdot 10^n - 1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نكتب : $\boxed{b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2}$ (1)

لنبين الآن أن : $c_n \wedge 2 = 1$.

نلاحظ في البداية أن : $c_n = 2\cdot 10^n - 1 > 2$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

لكي يكون c_n و 2 أوليان فيما بينهما .

يكفي أن نبين أن 2 لا يقسم c_n .

بالخلف، نفترض أن 2 يقسم c_n . إذن : $c_n \equiv 0\ [2]$

يعني : $2\cdot 10^n - 1 \equiv 0\ [2]$

من جهة أخرى لدينا : $-2\cdot 10^n \equiv 0\ [2]$

نجمع هاتين المتوافقتين طرفا بطرف نحصل على : $-1 \equiv 0\ [2]$

يعني أن العدد 2 قاسم للعدد -1 .

و هذا تناقض واضح. إذن ما افترضناه كان خاطئا .

يعني أن العدد 2 لا يقسم العدد c_n .

و منه : $c_n \wedge 2 = 1$

و منه : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2 = 1$

إذن b_n و c_n عددان أوليان فيما بينهما .

التمرين الثاني 2

وجود زوج (x_n, y_n) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث $b_n \cdot x_n + c_n \cdot y_n = 1$

مكفول و مضمون بنص مبرهنة $Bezout$.

تذكير بمبرهنة $Bezout$:

$$\boxed{a \wedge b = 1 \iff \exists\, u, v \in \mathbb{Z} \ ; \ au + bv = 1}$$

لنبحث الآن عن x_n و y_n .

لدينا : $c_n = 2\cdot 10^n - 1$

إذن : $\boxed{2\cdot 10^n - c_n = 1}$ (1)

و لدينا : (2) $\boxed{2 = b_n - c_n} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c|c} b_n & c_n \\ 2 & 1 \end{array}}$

نعوض 2 بـ $(b_n - c_n)$ في المتساوية (1) نجد :

$$(b_n - c_n)10^n - c_n = 1$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow b_n \cdot 10^n - c_n \cdot 10^n - c_n = 1 \\ &\Longrightarrow b_n \cdot 10^n + c_n \cdot (-10^n - 1) = 1 \\ &\Longrightarrow b_n \cdot x_n + c_n \cdot y_n = 1 \end{aligned}$$

$$avec \ : \ \begin{cases} x_n = 10^n \\ y_n = -(10^n + 1) \end{cases} ; \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

التمرين الثالث I 1

لنبين أن : $\forall\,(a,b) \in J^2 \ ; \ 1 + ab > 0$

من أجل ذلك أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى : ليكن a و b عنصرين من J .

$$\begin{aligned} (a,b) \in J^2 &\Longrightarrow \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} |a| < 1 \\ |b| < 1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow |ab| < 1 \\ &\Longrightarrow -1 < ab < 1 \\ &\Longrightarrow -1 < ab \\ &\Longrightarrow ab + 1 > 0 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية : ليكن a و b عنصرين من J . نَفصِلُ بين ثلاث حالات :

اذا كان a موجب و b موجب .

إذن : $-1 < 0 \leq ab$ يعني : $ab + 1 > 0$

اذا كان a سالب و b سالب .

إذن : $-1 < 0 \leq ab$ يعني : $ab + 1 > 0$

اذا كان أحدهما موجب و الآخر سالب .

ليكن مثلا $-1 < a \leq 0$ و $0 \leq b < 1$.

إذن : $0 \leq -a < 1$ و $0 \leq b < 1$.

عند المرور إلى الجداء نجد : $0 \leq -ab < 1$.

يعني : $-ab < 1$ أي : $ab + 1 > 0$

و بالتالي : $\forall\,(a,b) \in J^2 \ ; \ ab + 1 > 0$

لأن سوف نستنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في J .

من أجل ذلك يكفي أن نبين أن : $\forall\,(a,b) \in J^2 \ ; \ a * b \in J$

ليكن a و b عنصرين من J :

$$\begin{aligned} (a,b) \in J^2 &\Longrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ b < 1 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} (1-a) < 0 \\ (1-b) < 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow (1-a)(1-b) > 0 \\ &\Longrightarrow 1 - (a+b) + ab > 0 \\ &\Longrightarrow 1 + ab > (a+b) \\ &\Longrightarrow \frac{1+ab}{1+ab} > \frac{a+b}{1+ab} \ ; \ car \ \left(\frac{1}{1+ab}\right) > 0 \\ &\Longrightarrow \boxed{1 > a * b} \ (1) \end{aligned}$$

$$de\ même\ :\ (a,b)\,\epsilon\, J^2 \Rightarrow \begin{cases} a > -1 \\ b > -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} (a+1) > 0 \\ (b+1) > 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow (a+1)(b+1) > 0 \\
&\Rightarrow ab + (a+b) + 1 > 0 \\
&\Rightarrow 1 + ab > -(a+b) \\
&\Rightarrow \frac{1+ab}{1+ab} > \frac{-(a+b)}{1+ab} \quad ; \quad car\ \left(\frac{1}{1+ab}\right) > 0 \\
&\Rightarrow 1 > -(a*b) \\
&\Rightarrow \boxed{-1 < a*b} \quad (2)
\end{aligned}$$

$$(1)\ et\ (2) \begin{cases} \Rightarrow -1 < a*b < 1 \\ \Rightarrow a*b\,\epsilon\,]-1;1[\end{cases}$$

و بالتالي نحصل على ما يلي : $\forall\,(a,b)\,\epsilon\, J^2 \ ;\ a*b\,\epsilon\, J$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة J .

التمرين الثالث I 2 أ

تبادلية القانون $*$ في J نستنتجها من تبادلية القانونين $+$ و $\times$ في $\mathbb{R}$.

ليكن a و b عنصرين من J .

$$a*b = \frac{a+b}{1+ab} = \frac{b+a}{1+ba} = b*a$$

إذن $*$ قانون تبادلي في J .

التجميعية : لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال J .

$$(x*y)*z = \left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z = \frac{\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)+z}{1+z\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy}}{\dfrac{xy+xz+yz+1}{1+xy}}$$

نختزل بالعدد الموجب قطعا $(1+xy)$ نجد :

$$= \frac{x+y+z+xyz}{xy+xz+yz+1}$$

و بنفس الطريقة نبين أن : $x*(y*z) = \dfrac{x+y+z+xyz}{xy+xz+yz+1}$

و بالتالي : $\forall\,(x,y,z)\,\epsilon\, J^3 \ ;\ (x*y)*z = x*(y*z)$

يعني أن $*$ قانون تجميعي في J .

التمرين الثالث I 2 ب

العنصر المحايد : ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في J .

إذن : $(\forall x \epsilon J)\ ;\ x*e = e*x = x$

نهتم بإحدى المتساويتين فقط لأن $*$ تبادلي في J .

$$\begin{aligned}
x*e = x &\Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \\
&\Leftrightarrow x + e = x + x^2 e \\
&\Leftrightarrow e = x^2 e \\
&\Leftrightarrow e(1-x^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ e = 0 \\ ou\ bien\ (1-x^2) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow e = 0\ , car\ x \neq 1\ et\ x \neq -1 \\
&\Leftrightarrow e = 0\,\epsilon\,]-1;1[
\end{aligned}$$

إذن 0 هو العنصر المحايد للقانون $*$ في J .

التمرين الثالث I 2 ج

الزمرة $(J,*)$. لقد حصلنا لحد الآن على المعلومات التالية :

- J مجموعة غير فارغة .
- $*$ قانون تركيب داخلي في J .
- $*$ تجميعي في $*$
- 0 هو العنصر المحايد لـ $*$ في .

إذن لكي تكون $(J,*)$ زمرة يكفي أن يكون لكل عنصر x من J مماثل بالقانون $*$

ليكن x عنصرا من J و x' مماثله من J .

إذن : $x*x' = x'*x = 0$ يعني : $\frac{x+x'}{1+xx'} = 0$.

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الحقيقي الغير منعدم $(1+xx')$ نجد : $x + x' = 0$

التعبير $1+xx'$ غير منعدم لأن : $1+xx' > 0 \Rightarrow (x,x')\,\epsilon\, J$

إذن : $x' = -x\,\epsilon\, J$

و بالفعل $x'\epsilon\, J$ لأن من التأطير $-1 < x < 1$

نستنتج أن : $-1 < -x < 1$

إذن كل عنصر x من J يقبل مماثلا و هو $-x$ من J بالقانون $*$.

و هذه النتيجة إضافة إلى ما تم إيجاده سابقا :

- J مجموعة غير فارغة .
- $*$ قانون تركيب داخلي في J .
- $*$ تجميعي في J
- $*$ يقبل عنصرا محايدا من J و هو 0 .

نستنتج إذن أن $(J,*)$ زمرة

و بما أن $*$ تبادلي فإن $(J,*)$ زمرة تبادلية .

التمرين الثالث II 1

نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

نلاحظ أن f دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله لأنها عبارة عن خارج دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إضافة إلى ذلك لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x + 1 > 0$

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا :

$$\boxed{f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0}$$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

و بما أنها متصلة على $\mathbb{R}$ فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $f(\mathbb{R})$

و لدينا :

$$\begin{aligned}
f(\mathbb{R}) &= f(\,]-\infty;+\infty[\,) \\
&= \left]\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;\,\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[
\end{aligned}$$

و لدينا : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \left(\frac{0-1}{0+1}\right) = -1$

و لدينا :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} \\
&= \lim_{\substack{u\to-\infty \\ u=-x}} \left(\frac{1-e^u}{1+e^u}\right) \\
&= \left(\frac{1-0}{1+0}\right) = 1
\end{aligned}$$

و بالتالي f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $]-1;1[$.

أي أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J .

التمرين الثالث II 2

التشاكل : لدينا f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J و تقابله العكسي هو التطبيق g
بحيث : $f \circ g = Id_J$ و $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.
ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^*$.
لدينا : $x = g \circ f(x)$ و $y = g \circ f(y)$.
و منهما نستنتج أن : $x \times y = g(f(x)) \times g(f(y))$.
نُدخل التقابل f على هذه المتساوية نجد :

$$f(x \times y) = f\big(g(f(x)) \times g(f(y))\big)$$

و حسب تعريف القانون $\perp$ نستنتج أن : $f(x \times y) = f(x) \perp f(y)$
و هذا يعني أن f تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(J^*,\perp)$

التمرين الثالث II 3

تذكير : لتكن K مجموعة مزودة بقانوني التركيب الداخليين $*$ و $\top$.
تكون المجموعة $(K,*,\top)$ جسما إذا و فقط إذا كان :

- $(K,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد e
- $(K\backslash\{e\};\top)$ زمرة .
- $\top$ توزيعي بالنسبة لـ $*$ في K

المعلومات التي نتوفر عليها لحد الآن هي :

- $(J,*)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو 0 .
- $\perp$ توزيعي بالنسبة لـ $*$ في J (مقبولة)

يكفي إذن أن نبين أن $(K^*;\perp)$ زمرة . حيث $K^* = K\backslash\{0\}$
لدينا f تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(J^*,\perp)$.
إذن صورة الزمرة التبادلية $(\mathbb{R}^*,\times)$ هي الزمرة التبادلية $(f(\mathbb{R}^*),\times)$
و بما أن f تقابل من $\mathbb{R}^*$ نحو J^* . فإن : $f(\mathbb{R}^*) = J^*$
إذن صورة الزمرة التبادلية $(\mathbb{R}^*,\times)$ هي الزمرة التبادلية $(J^*,\perp)$
بالتشاكل التقابلي f
و بالتالي حسب الخاصية التي ذكرت لكم نستنتج أن $(J,*,\perp)$ جسم .
و بما أن $(J^*,\perp)$ زمرة تبادلية فإن $\perp$ تبادلي في J .
إذن $(J,*,\perp)$ جسم تبادلي .

التمرين الرابع I 1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + i = 0$ نضع $Z = r\,e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
z^2 + i = 0 &\Leftrightarrow z^2 = -i \\
&\Leftrightarrow \left(r\,e^{i\theta}\right)^2 = e^{\frac{-i\pi}{2}} \\
&\Leftrightarrow r^2\,e^{2i\theta} = e^{\frac{-i\pi}{2}} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta \equiv \dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 2\theta = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi \ ;\ k \in \{0;1\} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{-\pi}{4} \text{ أو } \theta = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = e^{\frac{-i\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = a \\ z_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}(1-i) \end{cases}
\end{aligned}$$

للتأكد لدينا بالفعل :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)^2 + i = \dfrac{2}{4}(-2i) + i = 0 \\ \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)^2 + i = \dfrac{2}{4}(-2i) + i = 0 \end{cases}$$

التمرين الرابع I 2 أ

لدينا : $1 + a = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

إذن :

$$\begin{aligned}
|1+a| &= \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}
\end{aligned}$$

لتحديد عمدة العدد العقدي $(1+a)$ سوف نستعين بالقاعدة التالية :

$$\boxed{e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$$

لدينا :

$$\begin{aligned}
1 + a &= 1 + e^{\frac{-i\pi}{4}} = e^{i0} + e^{\frac{-i\pi}{4}} \\
&= 2\cos\left(\frac{0 - \left(\frac{-\pi}{4}\right)}{2}\right) e^{\frac{-i\pi}{8}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{\frac{-i\pi}{8}}
\end{aligned}$$

إذن : $\arg(1+a) \equiv \arg\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) e^{\frac{-i\pi}{8}}\right)\ [2\pi]$

يعني : $\arg(1+a) \equiv \arg\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)\right) + \arg\left(e^{\frac{-i\pi}{8}}\right)\ [2\pi]$

يعني : $\arg(1+a) \equiv 0 - \dfrac{\pi}{8}\ [2\pi]$

أي : $\arg(1+a) \equiv \dfrac{-\pi}{8}\ [2\pi]$

إذن : $(1+a) = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\left(e^{\frac{-i\pi}{8}}\right)$

التمرين الرابع I 2 ب

لدينا : $(1+a) = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}\left(e^{\frac{-i\pi}{8}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) e^{\frac{-i\pi}{8}}$

إذن : $\sqrt{2 + 2\sqrt{2}} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ أي : $\dfrac{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$

التمرين الرابع I 2 ج

لدينا : $a^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)^2 = \dfrac{1}{2}(-2i) = -i$

إذن : $(1+a)(1-a) = 1^2 - a^2 = 1 + i$

نحصل إذن على ما يلي : $(1+a)(1-a) = (1+i) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} |1+a| \times |1-a| = \sqrt{2} \\ \arg(1+a) + \arg(1-a) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |1-a| = \dfrac{\sqrt{2}}{|1+a|} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \arg(1+a) + \arg(1-a) \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |1-a| = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \arg(1-a) \equiv \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{8}\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} |1-a| = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ \arg(1-a) \equiv \dfrac{3\pi}{8}\ [2\pi] \end{cases}
\end{aligned}$$

إذن الشكل المثلثي هو : $(1-a) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} ; \frac{3\pi}{8}\right]$

و شكله الأسي هو : $(1-a) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right) e^{\frac{i3\pi}{8}}$

التمرين الرابع II 1

لدينا حسب المعطيات : $zz' + i = 0$ (نتيجة مقبولة)

إذن : $zz' = -i$

لدينا : $\frac{z_{M'} - z_0}{z_N - z_0} = \frac{z'}{\bar{z}} = \frac{z'z}{z\bar{z}} = \frac{-i}{z\bar{z}} = \left(\frac{-1}{|z|^2}\right) i \in i\mathbb{R}^-$

و ذلك لأن $\left(\frac{-1}{|z|^2}\right)$ عدد حقيقي سالب.

نستنتج إذن أن : $\frac{z_{M'} - z_0}{z_N - z_0} = \left(\frac{-1}{|z|^2}\right) i \in i\mathbb{R}^-$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'} - z_0}{z_N - z_0}\right) \equiv \arg\left(\left(\frac{-1}{|z|^2}\right) i\right) \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'} - z_0}{z_N - z_0}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \frac{-\pi}{2} \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow (OM') \perp (ON)$$

التمرين الرابع II 2 أ

لدينا : $(z' - a) = \frac{z(z' - a)}{z} = \frac{zz' - za}{z} = \frac{-ia - za^2}{za}$

$$= \frac{-ia - z(-i)}{za} \quad car \ (a^2 = -i)$$
$$= \frac{-ia + zi}{za} = \frac{i(z-a)}{za}$$

إذن : $\boxed{(z' - a) = \frac{i(z-a)}{az}}$

التمرين الرابع II 2 ب

سوف نستعمل في هذا السؤال التكافؤ التالي .

$$[A \Longrightarrow B] \iff [non(B) \Longrightarrow non(A)]$$

لنبين إذن صحة الإستلزام التالي : $(z' = a) \Longrightarrow (z = -a)$

و سوف نستعين بالمتساوية $(*)$.

نفترض أن $(z' = -a)$ إذن $(z' + a) = 0$

$$(z' - a) = \frac{i(z-a)}{az}$$
$$\Rightarrow (z' - a) + 2a = i\left(\frac{z-a}{az}\right) + 2a$$
$$\Rightarrow (z' + a) = \frac{i(z-a) + 2a^2 z}{az}$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{i(z-a) + 2(-i)z}{az}$$
$$\Rightarrow iz - ia - 2iz = 0$$
$$\Rightarrow -ia - iz = 0$$
$$\Rightarrow iz = -ia$$
$$\Rightarrow -iiz = iia$$
$$\Rightarrow z = -a$$

نحصل إذن على الإستلزام التالي : $(z' = -a) \Longrightarrow (z = -a)$

الذي يكافئ : $non(z = -a) \Longrightarrow non(z' = -a)$

يعني : $(z \neq -a) \Longrightarrow (z' \neq -a)$

نفترض أن $M \neq B$ يعني : $z \neq -a$

إذن : $z' \neq -a$ أي : $M' \neq B$

و لدينا : $(z' - a) = \frac{i(z-a)}{az}$

إذن : $\frac{z' - a}{z' + a} = \frac{i(z-a)}{az(z' + a)} = \frac{i(z-a)}{azz' + a^2 z}$

$$= \frac{i(z-a)}{a(-i) - iz} \quad ; \quad car : \begin{cases} a^2 = -i \\ zz' = -i \end{cases}$$
$$= \frac{i(z-a)}{-i(z+a)} = -\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$$

و بالتالي : $\boxed{\frac{z' - a}{z' + a} = -\left(\frac{z-a}{z+a}\right)}$

التمرين الرابع II 3

لدينا : $\left(\frac{z' - a}{z' + a}\right) = -\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a - z'}{-a - z'}\right) = -\left(\frac{a-z}{-a-z}\right)$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a - z'}{-a - z'}\right) \equiv \arg\left(-\left(\frac{a-z}{-a-z}\right)\right) \ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_A - z_{M'}}{z_B - z_{M'}}\right) \equiv \pi + \arg\left(\frac{z_A - z_M}{z_B - z_{M'}}\right) \ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) + 2k\pi \ ; \ k \epsilon \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) + k'\pi \ ; \ k' = 1 + 2k \ \epsilon \ \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \ [\pi]$$

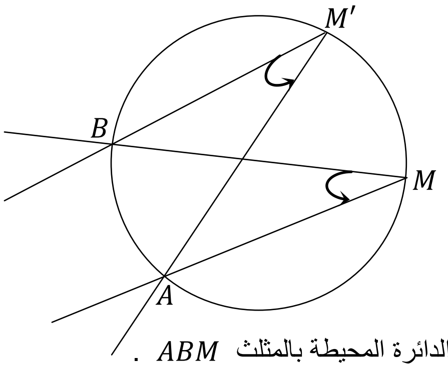
$\Leftrightarrow$ { A و B و M و M' متداورة أو A و B و M و M' مستقيمية }

و بما أن A و B و M نقط غير مستقيمية و ذلك حسب افتراض السؤال (3

فإن : $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) \not\equiv 0 \ [\pi]$ و منه : $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \not\equiv 0 \ [\pi]$

إذن النقط A و B و M و M' غير مستقيمية .

إذن فهي متداورة . و نحصل بذلك على الوضعية التالية :



إذن M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM .

التمرين الخامس I 1

لدينا : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{-2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = -2 \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t = \sqrt{x}}} \left(\frac{\ln t}{t}\right)$$
$$= (-2)(-\infty) = +\infty$$

و لدينا : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}\right) = -2 \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t = \sqrt{x}}} \left(\frac{\ln t}{t}\right)$

$$= (-2)(0^+) = 0$$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي للمنحنى $(\mathcal{C})$ على يمين الصفر

و لدينا : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

I 2 التمرين الخامس

في البداية نلاحظ أن f عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$

و $\forall x > 0 \,;\, \sqrt{x} \neq 0$. إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_*^+ =]0;+\infty[$

و لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{-\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\sqrt{x}(-\ln x)' - (\sqrt{x})'(-\ln x)}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x}\left(-\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(-\ln x)}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{-2}{2\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = \boxed{\frac{1}{2x\sqrt{x}}(-2+\ln x)}$$

نلاحظ أن : $(\forall x > 0) \,;\, \frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة العدد $(-2+\ln x)$.

إذا كان : $x = e^2$ فإن : $f'(x) = 0$.

إذا كان : $x > e^2$ فإن : $f'(x) > 0$.

إذا كان : $x < e^2$ فإن : $f'(x) < 0$.

و نستنتج بذلك جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0	1	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	-1	$-$ 0	$+$
f	$+\infty$	0	$\frac{-2}{e}$	0

I 3 أ التمرين الخامس

ليكن x و y عنصرين من المجال $]0;1[$ بحيث $x > y$

$$x > y \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(y) \,;\; car\ f\ est \searrow \\ x^n > y^n \;;\; \forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) < f(y) \\ -x^n > -y^n \end{cases} \Rightarrow f(x) - x^n < f(y) - y^n \Rightarrow g_n(x) < g_n(y)$$

و نحصل بذلك على الاستلزام التالي : $x > y \;\Rightarrow\; g_n(x) < g_n(y)$

و هذا يعني أن الدالة g_n تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$.

I 3 ب التمرين الخامس

لدينا g_n دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$.

إذن g_n تقابل من $]0,1[$ نحو $g_n(\,]0,1[\,)$.

$g_n(\,]0,1[\,)$ عبارة عن مجال كذلك لأن صورة مجال بدالة متصلة هي مجال .

و بذلك نكتب : $g_n(\,]0,1[\,) = \left]g_n(1) \,;\, \lim_{x\to 0^+} g_n(x)\right[$

و لدينا : $g_n(1) = f_n(1) - 1^n = -1$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to 0^+} g_n(x) = \lim_{x\to 0^+}(f_n(x) - x^n) = +\infty$

و بالتالي g_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]-1;+\infty[$. و هذا يعني أن كل عنصر من المجال $]-1;+\infty[$ يقبل سابقا واحدا بالدالة g_n من $]0,1[$.

بما أن 0 عنصر من المجال $]-1;+\infty[$ إذن يوجد سابق وحيد α_n من المجال $]0;1[$ بحيث $g_n(\alpha_n) = 0$.

أي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) , (\exists!\ \alpha_n\ \epsilon\ ]0,1[\,) \;;\; f_n(\alpha_n) - (\alpha_n)^2 = 0$

أي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) , (\exists!\ \alpha_n\ \epsilon\ ]0,1[\,) \;;\; f_n(\alpha_n) = (\alpha_n)^2$

I 3 ج التمرين الخامس

لدينا g_n دالة متصلة و تناقصية على المجال $]0,1[$.

و لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \;;\; 0 < \alpha_n < 1$

إذن من أجل $(n+1)\,\epsilon\,\mathbb{N}^*$ لدينا $0 < \alpha_{n+1} < 1$

و سوف نهتم فقط بالمتفاوتة اليسرى $\alpha_{n+1} > 0$.

ندخل على هذه المتفاوتة الدالة التناقصية قطعا g_n

نحصل على $g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(0)$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \;;\; g_n(\alpha_{n+1}) < -1$

و بالتالي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \;;\; g_n(\alpha_{n+1}) < -1 < 0$

أي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \;;\; g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

I 3 د التمرين الخامس

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. لدينا : $g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$

و نعلم أن g_n تقابل و تقابله العكسي g_n^{-1} دالة تناقصية .

نُدخل الدالة g_n^{-1} على المتفاوتة نجد : $g_n^{-1}(g_n(\alpha_{n+1})) > g_n^{-1}(g_n(\alpha_n))$

يعني أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \;;\; \alpha_{n+1} > \alpha_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ متتالية تزايدية .

و بما أنها مكبورة بالعدد 1 (لأن : $0 < \alpha_n < 1$)

فهي متقاربة و نضع : $\lim(\alpha_n) = l$

I 4 أ التمرين الخامس

في البداية لدينا : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \;;\; \alpha_{n+1} > \alpha_n$

و لدينا :

$$n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow \alpha_n \geq \alpha_1 \;\; car\ (\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ \nearrow \Rightarrow \lim_{n\infty}(\alpha_n) \geq \lim_{n\infty}(\alpha_1) \Rightarrow \boxed{l \geq \alpha_1} \;\; (2)$$

و لدينا كذلك :

$$n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \alpha_n < 1 \Rightarrow \alpha_n \leq 1 \Rightarrow \lim_{n\infty}(\alpha_n) \leq \lim_{n\infty} 1 \;\;;\; passage\ aux\ limites \Rightarrow \boxed{l \leq 1} \;\; (3)$$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$

I 4 ب التمرين الخامس

لدينا :

$$g_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow f_n(\alpha_n) - (\alpha_n)^n = 0 \Rightarrow f_n(\alpha_n) = (\alpha_n)^n \Rightarrow \frac{-\ln(\alpha_n)}{\sqrt{\alpha_n}} = (\alpha_n)^n \Rightarrow -\ln(\alpha_n) = \sqrt{\alpha_n}\,(\alpha_n)^n$$

إذن :

$$h(\alpha_n) = \frac{-1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} = \frac{-1}{2} + \frac{\ln\left(\sqrt{\alpha_n}\,(\alpha_n)^n\right)}{\ln(\alpha_n)} = \frac{-1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\ln(\alpha_n)}{\ln(\alpha_n)} + \frac{n\ln(\alpha_n)}{\ln(\alpha_n)} = n$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \;;\; h(\alpha_n) = n}$

التمرين الخامس I 4 ج

$$h(\alpha_n)=n \Leftrightarrow \frac{-1}{2}+\frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}=n$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}=n+\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(-\ln(\alpha_n))}=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\infty}\left(\frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(-\ln(\alpha_n))}\right)=\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\ln(l)}{\ln(-\ln(l))}=0$$
$$\Rightarrow \ln(l)=0$$
$$\Rightarrow l=e^0=1$$

التمرين الخامس I 4 د

نعلم أن $\lim(\alpha_n)=1$ و $f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$

إذن : $\lim_{n\infty}(\alpha_n)^n=\lim_{n\infty}f(\alpha_n)=f\left(\lim_{n\infty}(\alpha_n)\right)$

$$=f(1)=\frac{-\ln 1}{\sqrt{1}}=0$$

و بالتالي : $\lim_{n\infty}(\alpha_n)^n=1$

التمرين الخامس II 1 أ

في البداية نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $]0;1]$ و سالبة على المجال $[1;+\infty[$ و ذلك من خلال جدول تغيراتها .

إذن : $x\,\epsilon\,]0,1] \Rightarrow \int_x^1 f(t)\,dt\geq 0$

$$x\,\epsilon\,[1;+\infty[\ \Rightarrow \int_x^1 f(t)\,dt=-\int_1^x f(t)\,dt\geq 0$$
$$=-Quantité\ négative$$
$$=Quantité\ positive$$

خلاصة : $\boxed{\forall\, x>0\ ;\ \int_x^1 f(t)\,dt\geq 0}$

التمرين الخامس II 1 ب

$$\int_x^1 f(t)\,dt=\int_x^1\left(\frac{-\ln t}{\sqrt{t}}\right)dt=\int_x^1 \underbrace{\left(t^{\frac{-1}{2}}\right)}_{u'(t)}\underbrace{(-\ln t)}_{v(t)}\,dt$$
$$=[u(t)\times v(t)]_x^1-\int_x^1 u(t)\cdot v'(t)\,dt$$
$$=\left[2t^{\frac{1}{2}}\times(-\ln t)\right]_x^1+2\int_x^1\left(t^{\frac{1}{2}}\cdot t^{-1}\right)dt$$
$$=2\sqrt{x}\,\ln x+2\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_x^1$$
$$=2\sqrt{x}\,\ln x+2\left(2-2\sqrt{x}\right)$$
$$=2\sqrt{x}\,\ln x+4-4\sqrt{x}$$

التمرين الخامس II 1 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و المستقيمات التي معادلاتها $x=1$ و $x=e^2$ و $y=0$.

إذن : $\mathcal{A}=\left(\int_1^{e^2}|f(t)|\,dt\right)(l'unité)^2$

$$=-\int_{e^2}^1|f(t)|\,dt\ \ cm^2$$
$$=-\int_{e^2}^1 -f(t)\,dt\ \ cm^2\ ;\ car\ (\forall x\geq 1)\,,f(x)\leq 0$$
$$=\int_{e^2}^1 f(t)\,dt\ \ cm^2$$
$$=\left(2\sqrt{e^2}\ln(e^2)+4-4\sqrt{e^2}\right)\ cm^2$$
$$=(2\times e\times 2+4-4\times e)\ \ cm^2$$
$$=(4e+4-4e)\ \ cm^2$$
$$=4\ \ cm^2$$

التمرين الخامس II 2 أ

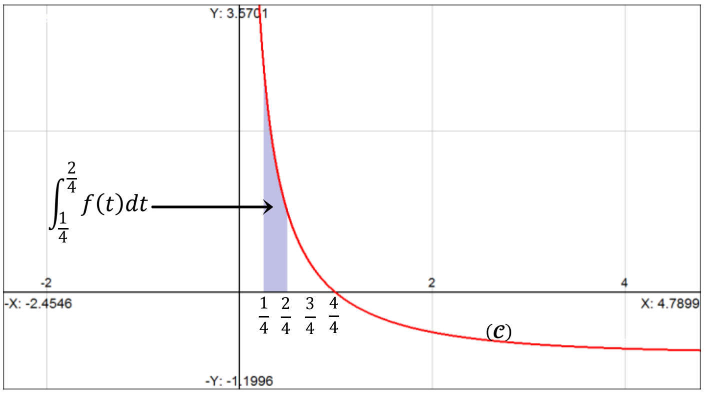
ليكن k و n عددين صحيحين طبيعيين بحيث $n\geq 2$ و $1\leq k\leq n$

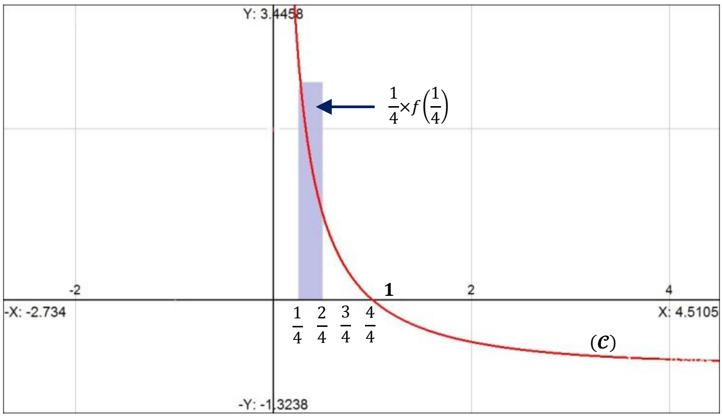
نلاحظ أن جميع المجالات $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ توجد ضمن المجال $]0;1]$.

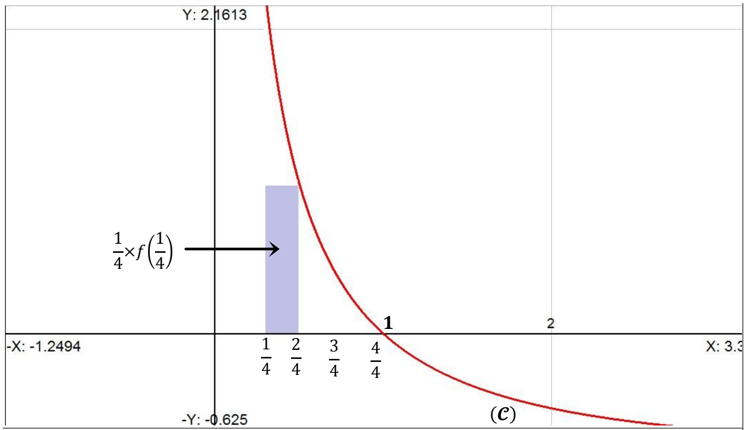
نعتبر قصور الدالة f على المجال $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ و سوف نستعمل فيما يلي تناقصية الدالة f على المجال $]0;1]$.

$$t\,\epsilon\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right] \Rightarrow \frac{k}{n}\leq t\leq\frac{k+1}{n}$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq f(t)\leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dt\ \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1\,dt\ \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq f\left(\frac{k}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1\,dt$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)[t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq f\left(\frac{k}{n}\right)[t]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

هندسيا : نأخذ مثال $n=4$.







و نلاحظ بالفعل أن : $\frac{1}{4} f\left(\frac{2}{4}\right) \leq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{n}\right)$

التمرين الخامس II 2 ب

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. و سوف نستعمل نتيجة السؤال 1)أ) .

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{1}{n} f(1) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

نجمع هذه التأطيرات طرفا طرفا نجد :

$$(*) \quad \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

نأخذ من هذا التأطير المتفاوتة اليسرى $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt}$

و نضيف إلى كلا الطرفين العدد 0 نجد :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

$$(1) \quad \boxed{\underbrace{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{u_n} \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt}$$

بعد ذلك نأخذ من التأطير $(*)$ المتفاوتة اليمنى .

$$\boxed{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt}$$

و نضيف إلى كلا الطرفين العدد 0 نجد :

$$0 + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} f(1) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{n}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \; \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt$$

التمرين الخامس II 2 ج

في هذا السؤال سوف نحاول حساب نهايتي طرفي التأطير $(**)$ عندما يؤول n إلى $+\infty$

لدينا حسب نتيجة السؤال 1)ب) :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\, dt = 2\sqrt{\frac{1}{n}} \ln\left(\frac{1}{n}\right) + 4 - 4\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{-2\ln n}{\sqrt{n}} + 4 - \frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$= -2\, f(n) + 4 - \frac{4}{\sqrt{n}}$$

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt = -2\lim\limits_{n\infty} f(n)+4-4\lim\limits_{n\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$= -2\times 0+4-4\times 0 = 4$$

و كذلك :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\lim_{n\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt\right)$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)+4$$

$$= \lim_{n\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{-\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right)+4$$

$$= \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\ln n\right)+4$$

$$= 2\lim_{n\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)+4$$

$$= 2\left(\lim_{\substack{m\infty \\ m=\sqrt{n}}}\left(\frac{\ln m}{m}\right)\right)+4$$

$$= 2\times 0+4 = 4$$

و بذلك نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt}_{\substack{tend\ vers\ 4 \\ en\ +\infty}} \leq u_n \leq \underbrace{\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt}_{\substack{tend\ vers\ 4 \\ en\ +\infty}}}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim(u_n) = 4$

إضافة : بإمكاننا حساب النهاية $\lim(u_n)$ بالإستعانة بتقنية بسيطة .

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال $]a,b]$. فإن المتتالية

$$u_n = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) \;;\; n\geq 1$$

تكون متقاربة إذا كانت النهاية : $\lim\limits_{x\to a^+}\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt = l \in \mathbb{R}$

و نكتب : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt = l \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1-0}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\left(\frac{1-0}{n}\right)\right)$$

و بما أن f متصلة على المجال $[0,1]$: فإن :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^1 f(t)\,dt\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(4-4\sqrt{x}+4\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)$$

$$= 4-\lim_{x\to 0^+}\left(4\sqrt{x}-4\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)$$

$$= 4-\lim_{x\to 0^+}\left(4t-4\,t\ln t\right)$$

$$= 4-0+0 = 4$$

إذن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة و نهايتها هي 4

و نكتب : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 4$

التمرين السادس 1 أ

لدينا : $k(\sqrt{x}) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt = -\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}\,dt = -g(x)$

التمرين السادس 1 ب

الإتصال : لدينا : $g(x) = -k(\sqrt{x}) = -k\circ J(x)$

بحيث : $J(x) = \sqrt{x}$

نلاحظ أن k و J دالتان متصلتان على المجال $[0;+\infty[$.

و جميع عناصر $\mathbb{R}^+$ تقبل صورا بالدالة J . لأن $J(\mathbb{R}^+)\subseteq\mathbb{R}$

إذن مُركَّب الدالتين k و J دالة متصلة على $[0;+\infty[$.

الإشتقاق :

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من I فإن :

$$\boxed{\begin{array}{llll} F & : & I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I و التي تنعدم في a .

لدينا $x\longrightarrow e^{-x^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بأكمله .

إذن فهي متصلة على المجال $[0;+\infty[$. و لدينا $1 \in [0;+\infty[$

إذن الدالة :

$$\boxed{\begin{array}{llll} k & : & [0;+\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt \end{array}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة $x\longrightarrow e^{-x^2}$ على المجال $[0;+\infty[$

حيث : $k(1)=0$ و $\forall x\geq 0 \;;\; k'(x) = e^{-x^2}$.

لدينا إذن : $J(x)=\sqrt{x} \;;\; g(x) = -k\circ J(x)$

و نلاحظ أن الدالة J قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$. و k قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و جميع عناصر المجال $]0;+\infty[$ تقبل صورا بالدالة J . لأن : $J(\,]0;+\infty[\,)\subseteq\mathbb{R}$.

إذن مُركب الدالتين k و J عبارة عن دالة قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

يعني أن الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

التمرين السادس 1 ج

لدينا :

$$\begin{cases} k'(x) = e^{-x^2} \;;\; \forall x\geq 0 \\ J'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \;;\; \forall x>0 \end{cases}$$

إذن :

$$g'(x) = \left(-k(J(x))\right)' = -J'(x)\,k'(J(x))$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\times\left(e^{-(J(x))^2}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\times\left(e^{-(\sqrt{x})^2}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)\times\left(e^{-x}\right) \;;\; \forall x>0$$

و نلاحظ أن : $\boxed{(\forall x>0) \;;\; \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}>0}$

و منه : $(\forall x>0) \;;\; g'(x)<0$

و هذا يعني أن الدالة g تناقصية قطعا على حيز تعريفها $[0;+\infty[$

التمرين السادس 2 أ

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . و نعتبر المجال $[0,x]$ الموجود ضمن المجال $[0,+\infty[$

لدينا g متصلة على $[0;+\infty[$ إذن فهي متصلة على $[0,x]$.

و لدينا g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ إذن فهي قابلة للاشتقاق على $]0,x[$

نستنتج إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية أن :

$$\exists\, c \in]0,x[\;;\; \left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = g'(c)$$

لنبين الآن أن الدالة g' المعرفة على $]0,+\infty[$ تزايدية على $]0,+\infty[$.

لدينا : $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}\, e^{-x}$

إذن g' قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها عبارة عن جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$.

و لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall x>0)\;;\;(g'(x))' &= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\, e^{-x}\right)' \\ &= \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)' e^{-x} + (e^{-x})'\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{4x\sqrt{x}}\, e^{-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{-x} \\ &= (1+2x)\frac{e^{-x}}{4x\sqrt{x}} > 0\end{aligned}$$

إذن الدالة g' تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

نعود إلى الوضعية التالية :

$$\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = g'(c) \\ c < x\end{cases}$$

$$\begin{aligned}c<x \;&\Longrightarrow\; g'(c) < g'(x) \\ &\Longrightarrow\; \frac{g(x)-g(0)}{x} = g'(c) < g'(x)\end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall x>0)\;;\;\dfrac{g(x)-g(0)}{x} < g'(x)$

أي :

$$\boxed{(\forall x>0)\;;\;\frac{g(x)-g(0)}{x} < \frac{-1}{2\sqrt{x}}\, e^{-x}} \quad (\star)$$

التمرين السادس 2 ب

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\, e^{-x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)(e^{-x}) \\ &= (-\infty)(1) = -\infty\end{aligned}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\boxed{\left(\frac{g(x)-g(0)}{x}\right) < \underbrace{\left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\, e^{-x}\right)}_{\substack{tend\ vers\ -\infty \\ lorsque\ \ x\ tend \\ vers\ 0^+}}}$$

إذن نستنتج حسب خاصيات النهايات و الترتيب أن :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = -\infty \notin \mathbb{R}}$$

إذن g غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر .

و نفسر النهاية : $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = -\infty$

بقولنا : منحنى الدالة g يقبل نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $(0;g(0))$ و موجه نحو الأسفل .

أجوبة امتحان مدينة بولمان 2010

التمرين الأول 1 أ

لكي يكون $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ يكفي أن يكون E جزءا غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و مستقر بالنسبة للقانونين $+$ و $\cdot$.

نلاحظ في البداية أن المجموعة E تتكون من مصفوفات مربعة من الرتبة 2 . إذن $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. و لدينا E غير فارغ لأننا نستطيع رصد عنصر واحد على الأقل في E و هو المصفوفة $M(0,0)$ أو $M(1,1)$ أو $M(2,3)$ أو $\cdots$.

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$M(a,b)+M(c,d)=\begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c+d & 3d \\ d & c-d\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a+b+c+d & 3b+3d \\ b+d & a-b+c-d\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} (a+c)+(b+d) & 3(b+d) \\ b+d & (a+c)-(b+d)\end{pmatrix}$$
$$=M(a+c\,;\,b+d)\in E$$

لأنه a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذن $(a+c)$ و $(b+d)$ عددان حقيقيان كذلك .

نستنتج إذن أن E مستقر بالنسبة لـ $+$. (1)

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E و α عدد حقيقي :

لدينا :
$$\alpha\cdot M(a,b)=\alpha\begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \alpha a+\alpha b & 3\alpha b \\ \alpha b & \alpha a-\alpha b\end{pmatrix}$$
$$=M(\alpha a\,;\,\alpha b)\in E$$

لأن a و b و α أعداد حقيقية إذن αa و αb عددان حقيقيان كذلك .

نستنتج إذن أن E مستقر بالنسبة لـ $\cdot$ (2)

خلاصة : E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و مستقر بالنسبة للقانونين $+$ و $\cdot$ و بالتالي $(E,+,\cdot)$ فضاء جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

التمرين الأول 1 ب

تكون الأسرة (I,J) أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$ إذا كان I و J عنصرين من E و إذا كانت الأسرة (I,J) حرة و تُوَلِّدُ الفضاء E .

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E .

لدينا :
$$M(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & 3b \\ b & a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 3b \\ b & -b\end{pmatrix}$$
$$=a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
$$=a\cdot I+b\cdot J$$

نستنتج إذن أن : $\forall\, M(a,b)\in E\ ;\ M(a,b)=aI+bJ$

إذن (I,J) أسرة مُوَلِّدة للفضاء المتجهي E . (3)

لتكن $(xI+yJ)$ تأليفة خطية منعدمة للمتجهتين I و J .

إذن :
$$xI+yJ=0 \implies M(x,y)=M(0,0)$$
$$\implies \begin{pmatrix} x+y & 3y \\ y & x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{cases} x+y=0 \\ 3y=0 \\ y=0 \\ x-y=0\end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} x=0 \\ y=0\end{cases}$$

إذن $\boxed{(I,J)\ \text{أسرة حرة}}$. (4)

و لدينا : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 3\times 0 \\ 0 & 1-0\end{pmatrix}=M(1,0)\in E$

و كذلك : $J=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+1 & 3\times 1 \\ 1 & 0-1\end{pmatrix}=M(0,1)\in E$

إذن I و J عنصرين من E (5) .

من النتائج (3) و (4) و (5) نستنتج أن (I,J) أساس للفضاء $(E,+,\cdot)$.

التمرين الأول 2 أ

لدينا :
$$J^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4\end{pmatrix}$$
$$=4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=4I$$

إذن : $J^2=4I$

و نعلم أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي إذن E مستقر بالنسبة للقانون $\cdot$.

يعني : $(\forall A\epsilon E),(\forall \alpha\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \alpha\cdot A\ \epsilon\ E$

و لدينا $I=M(1,0)\ \epsilon\ E$ إذن $4I$ عنصر من E .

و بالتالي : $J^2\ \epsilon\ E$.

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

لدينا :
$$M(a,b)\times M(c,d)=(aI+bJ)\times(cI+dJ)$$
$$=ac\,I+ad\,J+bc\,J+bd\,J^2$$
$$=ac\,I+(ad+bc)\,J+bd\,J^2$$

بما أن I و J و J^2 عناصر من E .

و بما أن ac و $(ad+bc)$ و bd أعداد حقيقية .

فإن : $ac\cdot I+(ad+bc)\cdot J+bd\cdot J^2\ \epsilon\ E$

يعني أن : $M(a,b)\times M(c,d)\ \epsilon\ E$.

و بالتالي E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

ملاحظة : يُمكن إتمام الحساب السابق على النحو التالي :
$$M(a,b)\times M(c,d)=acI+(ad+bc)J+bdJ^2$$
$$=ac\,I+(ad+bc)J+4bd\,I$$
$$=(ac+4bd)\,I+(ad+bc)\,J$$
$$=M(ac+4bd\,;\,ad+bc)\ \epsilon\ E$$

التمرين الأول 2 ب

لنبين أن $(E,+,\times)$ **حلقة** **تبادلية** و **واحدية** .

- $(E,+)$ زمرة تبادلية
- $\times$ تجميعي في E .
- $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E
- $\times$ تبادلي في E
- $\times$ يقبل عنصرا محايدا في E

لدينا $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

إذن $(E,+)$ زمرة تبادلية .

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ ثلاث مصفوفات من E .

من جهة أولى لدينا :
$$\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f)$$
$$=M(ac+4bd\,;ad+bc)\times M(e;f)$$
$$=M\big(e(ac+4bd)+4f(ad+bc)\ ;\ f(ac+4bd)+e(ad+bc)\big)$$
$$=M(eac+4bde+4fad+4fbc\ ;\ fac+4bdf+ead+ebc)$$

و من جهة ثانية لدينا :
$$M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big)$$
$$=M(a,b)\times M(ce+4df\,;cf+de)$$
$$=M\big(a(ce+4df)+4b(cf+de)\ ;\ a(cf+de)+b(ce+4df)\big)$$
$$=M(ace+4dfa+4bcf+4bde\ ;\ acf+ade+bce+4dfb)$$

و نلاحظ من هاتين النتيجتين أن :
$$\forall\, M(a,b),M(c,d),M(e,f)\ \epsilon\ E\ ;\ \big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f)$$
$$=M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big)$$

$\boxed{\text{و بالتالي القانون}\ \times\ \text{تجميعي في}\ E}$. (2)

لنبين الآن أن الضرب × توزيعي بالنسبة لـ + في E .

من جهة أولى لدينا: $M(a,b)\times\big(M(c,d)+M(e,f)\big)$

$$\begin{aligned}&= M(a,b)\times M(c+e\,;d+f)\\&= M\big(a(c+e)+4b(d+f)\ ;\ a(d+f)+b(c+e)\big)\\&= M(ac+ae+4bd+4bf\ ;\ ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

من جهة ثانية لدينا: $M(a,b)\times M(c,d)+M(a,b)\times M(e,f)$

$$\begin{aligned}&= M(ac+4bd\ ;\ ad+bc)+M(ae\,;\ af+be+4bf)\\&= M(ac+4bd+ae+4bf\ ;\ ad+bc+af+be)\end{aligned}$$

نلاحظ إذن أن: $\forall\, M(a,b),M(c,d),M(e,f)\in E\ ;$

$$M(a,b)\times\big(M(c,d)+M(e,f)\big) = M(a,b)\times M(c,d)+M(a,b)\times M(e,f)$$

و بنفس الطريقة نستطيع أن نبين المتساوية الثانية:

$$\big(M(c,d)+M(e,f)\big)\times M(a,b) = M(c,d)\times M(a,b)+M(c,d)\times M(a,b)$$

و يمكن كذلك أن نستخرج هذه المتساوية الثانية بعد أن نبين أن × تبادلي في E و هذا ما سنقوم به بعد الفاصل الاشهاري ، إبقو معنا .

لدينا : $M(a,b)\times M(c,d) = M(ac+4bd\ ;\ ad+bc) = M(ca+4db\ ;\ da+cb) = M(c,d)\times M(a,b)$

إذن الضرب × تبادلي في E (4) .

و منه نستخرج المتساوية الثانية .

و من المتساويتين الأولى و الثانية نستنتج أن × توزيعي بالنسبة لـ + في E

سوف نبحث الآن عن العنصر المحايد لـ × في E .

نعلم أن كل قانون تركيب داخلي في مجموعة يمتلك على الأكثر عنصرا محايدا واحدا . يعني أن العنصر المحايد إن وجد فإنه يكون وحيدا.

لدينا E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

إذن × قانون تركيب داخلي في E .

و بما أن $E\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ فإن العنصر المحايد للضرب × في E هو نفسه العنصر المحايد للضرب × في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و لدينا $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد لـ × في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

إذن $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـ × في E

و بالتالي $M(1,0)$ هو العنصر المحايد لـ × في E (5) .

خلاصة : من (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية وحدتها المصفوفة $M(1,0)$ و صفرها المصفوفة $M(0,0)$.

التمرين الأول 2 ج

تذكير : لتكن $(A,*,\top)$ حلقة عنصرها المحايد e (يعني e هو العنصر المحايد لـ $*$ في A). نقول أن العنصر a من A قاسم للصفر في الحلقة $(A,*,\top)$ إذا وفقط إذا كان : $a\neq e$ و يوجد b من A حيث $b\neq e$ و $a\top b=e$ و $b\top a=e$.(إنتهى التذكير)

نضع : $E^*=E\backslash\{M(0,0)\}$.

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E و نفترض أنها قاسم للصفر في الحلقة $(E,+,\times)$.

إذن حسب التذكير توجد مصفوفة $M(x,y)$ من E^* حيث

$M(a,b)\times M(x,y)=M(0,0)$ و $M(x,y)\times M(a,b)=M(0,0)$

نشتغل بإحدى المتساويتين لأن × تبادلي في E^* .

لدينا: $M(a,b)\times M(x,y)=M(0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+b&3b\\b&a-b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x+y&3y\\y&x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}(a+b)(x+y)+3by&3y(a+b)+3b(x-y)\\b(x+y)+y(a-b)&3yb+(a-b)(x-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+b)(x+y)+3by=0 & (1)\\3y(a+b)+3b(x-y)=0 & (2)\\b(x+y)+y(a-b)=0 & (3)\\3yb+(a-b)(x-y)=0 & (4)\end{cases}$$

نجمع المعادلتين (2) و (3) طرفا بطرف . و بعد النشر و التبسيط نحصل على $ya+xb=0$. يعني : $ya=-xb$ (5) .

ننجز بعد ذلك عملية الطرح بين المعادلتين (1) و (3) نجد :

$$\begin{aligned}(1)-(3)\ &\Rightarrow\ ax+4yb=0\\&\Rightarrow\ -b(ax+4yb)=0\ ;\ b\neq0\\&\Rightarrow\ a(-xb)-4b^2\,y=0\\&\Rightarrow\ a(ay)-4b^2\,y=0\ ;\ d'après(5)\\&\Rightarrow\ a^2y-4b^2y=0\\&\Rightarrow\ (a^2-4b^2)y=0\\&\Rightarrow\ (a^2-4b^2)=0\ ;\ car\ y\neq0\end{aligned}$$

عكسيا : لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E^* حيث $a^2-4b^2=0$.

و لنبين أن المصفوفة $M(a,b)$ قاسم للصفر في الحلقة $(E,+,\times)$.

يكفي أن نبين وجود مصفوفة $M(x,y)$ من E^* حيث :

$M(a,b)\times M(x,y)=M(0,0)$ و $M(x,y)\times M(a,b)=M(0,0)$.

$$\begin{aligned}a^2-4b^2=0\ &\Rightarrow\ a^2=4b^2\\&\Rightarrow\ a=\pm2b\\&\Rightarrow\ \begin{cases}M(a,b)=M(2b,b)\\M(a,b)=M(-2b,b)\end{cases}\end{aligned}$$

نختار الحالة $a=2$ و الحالة الأخرى تخضع لنفس المراحل.

لنبحث عن مصفوفة $M(x,y)$ من E^* حيث $M(2b,b)\times M(x,y)=M(0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3b&3b\\b&b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x+y&3y\\y&x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3b(x+y)+3by&9yb+3b(x-y)\\b(x+y)+by&b(x+y)+by\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3bx+3by+3by=0\\9yb+3bx-3by=0\\xb+by+by=0\\bx+by+by=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3b(x+2y)=0\\3b(3y+x-y)=0\\b(x+2y)=0\\b(x+2y)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{(x+2y)=0\ ;\ car\ b\neq0}$$

للحصول على المصفوفة $M(x,y)$ يكفي أن نختار x و y من $\mathbb{R}$ حيث $(x,y)\neq(0,0)$ و $x+2y=0$.

و بصفة عامة يمكن أن نقول أن جميع المصفوفات التي تُكتبُ على شكل $M(-2y,y)$ حيث $y\neq0$ تحقق الشرطين $M(2b,b)\times M(-2y,y)=M(0,0)$ و $M(-2y,y)\times M(2b,b)=M(0,0)$.

و بالتالي المصفوفة $M(a,b)$ حيث $a^2-4b^2=0$ قاسم للصفر في الحلقة $(E,+,\times)$

ملاحظة : لدينا : $M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b&3b\\b&a-b\end{pmatrix}$

إذن:

$$\begin{aligned}det\big(M(a,b)\big)&=(a+b)(a-b)-3b^2\\&=(a^2-b^2)-3b^2\\&=a^2-4b^2\end{aligned}$$

إذن يمكن أن نقول أن المصفوفة $M(a,b)$ تكون قاسما للصفر في E إذا و فقط إذا كانت غير قابلة للقلب .

la matrice $M(a,b)$ de E est diviseur de zéro si et seulement si elle n'est pas inversible

التمرين الثاني 1

بصفة عامة : إذا كانت $az^2+bz+c=0$ معادلة من الدرجة الثانية بمجهول عقدي واحد z $(a\neq0)$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين z_0 و z_1 حيث $z_0+z_1=\frac{-b}{a}$ و $z_0z_1=\frac{c}{a}$.

لدينا : $(E):\ z^2-az+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt3}{2}$

ليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E) .

إذن:

$$z_0z_1=\frac{\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}}{1}=\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}=e^{\frac{i\pi}{3}}\ \Rightarrow\ \begin{cases}|z_0z_1|=|z_0||z_1|=\left|e^{\frac{i\pi}{3}}\right|=1\\\arg(z_0z_1)\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_0|\cdot|z_1| = 1 \\ \arg(z_0)+\arg(z_1) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

التمرين الثاني 2 أ

بما أن z_0 حل للمعادلة (E) . فإن : $z_0^2 - az_0 + e^{\frac{i\pi}{3}} = 0$

يعني : $\left(e^{i\theta}\right)^2 - a\left(e^{i\theta}\right) + e^{\frac{i\pi}{3}} = 0$

يعني : $e^{2i\theta} - a\left(e^{i\theta}\right) + e^{\frac{i\pi}{3}} = 0$

يعني : $a\left(e^{i\theta}\right) = e^{2i\theta} + e^{\frac{i\pi}{3}}$ يعني : $a = \dfrac{e^{2i\theta}}{e^{i\theta}} + \dfrac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{i\theta}}$

يعني : $a = e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$

فيما يلي سوف نستعين بالخاصية المهمة التالية :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} a &= e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\right)} \\ &= 2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$

في حالة جهلنا بالخاصية المذكورة . يمكن أن نجيب كما يلي :

$$\begin{aligned} a = e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} &= e^{i\theta} + e^{-i\theta} e^{\frac{i\pi}{3}} \\ &= e^{i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right) \\ &= \left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)} + e^{-i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}\right) \\ &= \left(e^{\frac{i\pi}{6}}\right)\left(2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} \end{aligned}$$

التمرين الثاني 2 ب

نفترض أن $z_0 = i$ إذن : $z_0 = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$

و منه :

$$\begin{aligned} a &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{6}} \end{aligned}$$

إذن : $ai = i\, e^{\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{2}}\cdot e^{\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

أثناء الحساب سوف نستعمل الخاصية التالية :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} 1 + i\,a - a^2 - i\,a^3 + a^4 + i\,a^5 &= (ai)^0 + (ai)^1 + (ai)^2 + (ai)^3 + (ai)^4 + (ai)^5 \\ &= \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^0 + \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^1 + \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 + \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 + \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^4 + \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^5 \\ &= 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} + 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}} \\ &= 2 + 2e^{\frac{2i\pi}{3}} + 2e^{\frac{4i\pi}{3}} \\ &= 2 + 2\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) \\ &= 2 + 2\left(2\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}}{2}\right) e^{\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}}{2}\right)}\right) \\ &= 2 + 2\left(2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) e^{i\pi}\right) \\ &= 2 + 2\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)\right) = 0 \end{aligned}$$

التمرين الثاني 3 أ

نفترض أن : $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

لكي نكتب z_1 على شكل المثلثي (أو الأسي) نحدد $|z_1|$ و $\arg(z_1)$.

لدينا : $z_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i = e^{\frac{i\pi}{4}} = \left[1, \dfrac{\pi}{4}\right]$

و نعلم أن $|z_0|\cdot|z_1| = 1$ إذن $\left|e^{\frac{i\pi}{4}}\right|\cdot|z_1| = 1$. أي : $|z_1| = 1$

و نعلم كذلك أن : $\arg(z_1)+\arg(z_0) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

إذن : $\arg(z_1) + \arg\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

يعني : $\arg(z_1) + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

إذن : $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

و بالتالي نكتب z_1 في شكليه الأسي و المثلثي كما يلي :

$$\boxed{z_1 = e^{\frac{i\pi}{12}} = \left[1, \frac{\pi}{12}\right]} \quad (1)$$

لنكتب الآن z_1 على شكل الجبري .

و من أجل ذلك نستغل العلاقة التالية : $z_0 \times z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z_1 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad z_1 &= \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)} \quad (2)$$

نستغل إذن النتيجتين (1) و (2) لتحديد قيمتي $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

لدينا : $z_1 = e^{\frac{i\pi}{12}}$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \end{cases}$$

التمرين الثاني 3 ب

لكتابة a على شكل المثلثي نستغل نتيجة السؤال 2) أ) لدينا : $z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$\begin{aligned} a &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} = \left[\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} ; \frac{\pi}{6}\right] \end{aligned}$$

و لكتابة a على شكل الجبري نستغل القاعدة بين جذري ثلاثية الحدود $z_0 + z_1 = a$

إذن :

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \end{aligned}$$

التمرين الثاني 4 أ

لدينا R تحويل مُعرف بما يلي :

$$\begin{aligned} R \,:\, (\mathcal{P}) &\longrightarrow (\mathcal{P}) \\ M(z) &\longrightarrow M'\left(iz+\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}}\right) \end{aligned}$$

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى و $M'(z')$ صورتها بالتحويل R .

$$R(M)=M' \Leftrightarrow z' = iz+\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}}$$

لكي يكون R دوراناً وجب علينا البحث عن عدد عقدي ω و زاوية θ حيث $(z'-\omega)=e^{i\theta}(z-\omega)$.

و سوف نستعمل أثناء الحساب القاعدة التالية :

$$e^{ix}+e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = iz+\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}} \\ z' = e^{i\theta}\cdot z - e^{i\theta}\omega+\omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i \\ \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}} = -e^{i\theta}\omega+\omega \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}} = \omega(1-i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}} = \omega\left(e^{i0}-e^{-i\pi}e^{\frac{i\pi}{2}}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}} = \omega\left(e^{i0}-e^{\frac{-i\pi}{2}}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}} = \omega\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)e^{\frac{-i\pi}{4}}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{i\theta} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}} = \omega\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{4}}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \omega = \left(\dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{6}}}{\sqrt{2}\,e^{\frac{-i\pi}{4}}}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ \omega = e^{\frac{-i\pi}{6}+\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{12}} = a \end{cases}$$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه $a=e^{i\frac{\pi}{12}}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

التمرين الثاني 4 ب

$$R(B)=C \Leftrightarrow (z_C-a) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B-a)$$
$$\Leftrightarrow (c-a) = i(b-a)$$

التمرين الأول 4 ج

$$R(C)=D \Leftrightarrow (z_D-a) = i(z_C-a)$$
$$\Leftrightarrow z_D = i(c-a)+a$$
$$\Leftrightarrow \frac{z_B+z_D}{2} = \frac{b+i(c-a)+a}{2} = \frac{(b+a)+i(c-a)}{2} = \frac{(b+a)+i(\,i(b-a)\,)}{2} = \frac{(b+a)-(b-a)}{2} = a$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{z_B+z_D}{2} = z_A} \Leftrightarrow \boxed{\text{le point } A \text{ est le milieu du segment } [BD]}$$

التمرين الثالث I

تذكير : تكون المعادلة $ax+by=c$ قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$ إذا و فقط إذا كان c يقسم $(a\wedge b)$.

مراحل الحل سوف تكون على الشكل التالي :

- تحديد $a\wedge b$ باستعمال $(Algorithme\ d'Euclide)$.
- تحديد حل خاص باستعمال الخوارزمية السابقة عكسيا
- استعمال مبرهنة $Gauss$ لتحديد صيغة الحل العام .

لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)\ :\ 27x-31y=1$.

$$\begin{array}{c|c} 31 & 27 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{4 = 31-1\times 27}\ (1)$$

$$\begin{array}{c|c} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array} \Rightarrow \boxed{3 = 27-6\times 4}\ (2)$$

$$\begin{array}{c|c} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{1 = 4-3\times 1}\ (3)$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Rightarrow \boxed{Stop\ it\ right\ now}$$

نستنتج إذن أن : $31\wedge 27 = 1$.

لأن القاسم المشترك الأكبر هو آخر باقي غير منعدم في القسمات المتتالية لخوارزمية أقليدس .

نلاحظ بسذاجة أن 1 يقسم 1 . إذن حسب التذكير نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

لنحدد الآن حلا خاصا أو بديهيا للمعادلة باستعمال المتساويات (1) و (2) و (3)

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 1 = 3-3\times 1 \\ &\Leftrightarrow 1 = 4-1(27-6\times 4)\ ;\ d'après(2) \\ &\Leftrightarrow 1 = 4-27-6\times 4 \\ &\Leftrightarrow 1 = 7\times 4-27 \\ &\Leftrightarrow 1 = 7\times(31-27)-27\ ;\ d'après(1) \\ &\Leftrightarrow 1 = 7\times 31-7\times 27-27 \\ &\Leftrightarrow 1 = 7\times 31-8\times 27 \\ &\Leftrightarrow 1 = 27\times(-8)-31\times(-7) \end{aligned}$$

إذن الزوج $(-8;-7)$ حل خاص للمعادلة السابقة (E) .

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) و ننطلق من النظمة التالية :

$$\begin{cases} (x,y)\ est\ solution \\ (-8;-7)\ est\ solution \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 27x-31y=1 \\ 27(-8)-31(-7)=1 \end{cases}$$

ننجز عملية الطرح بين هاتين المتساويتين نجد :

$$27(x+8) - 31(y+7) = 0$$

يعني : $\boxed{27(x+8) = 31(y+7)}$ $(*)$

نستنتج إذن أن 27 يقسم الجداء $31(y+7)$.

و بما أن 27 و 31 أوليان فيما بينهما $(31 \wedge 27 = 1)$.

فإنه حسب $Gauss$ نستنتج أن 27 يقسم $(y+7)$.

يوجد إذن $k \in \mathbb{Z}$ بحيث : $(y+7) = 27k$.

و منه : $y = 27k - 7$

نعوض y بـ $(27k-7)$ في الكتابة $(*)$ نحصل على :

$$27(x+8) = 31(27k)$$

يعني : $(x+8) = 31k$. إذن : $x = 31k - 8$.

و بالتالي نستنتج أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة في $\mathbb{Z}^2$ ، فإنه بالضرورة سوف يُكتب على شكل $(31k-8\,;27k-7)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

عكسيا : لنبين أن جميع الأزواج من $\mathbb{Z}^2$ المكتوبة على شكل $(31k-8\,;27k-7)$ هي حلول للمعادلة (E) . و من أجل ذلك يكفي أن نعوض x و y على التوالي بكلٍ من $(31k-8)$ و $(27k-7)$ في (E)

(you can check that, they really satisfys it)

لدينا : $27(31k-8) - 31(27k-7)$

$$= 837k - 216 - 837k + 217$$
$$= 217 - 216$$
$$= 1$$

إذن بالفعل ، كل زوج $(31k-8\,;27k-7)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ هو حل للمعادلة (E) .

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$\boxed{S = \{(31k-8\,;\,27k-7)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}}$$

التمرين الثاني II 1

لدينا : $E = \{0;1;2;\cdots;30\}$.

لتحديد a من E حيث $27a \equiv 1\,[31]$ أقترح طريقتين إحداهما صحيحة لكنها غبية و الأخرى صحيحة و ذكية .

الطريقة الغبية : بالاستعانة بالآلة الحاسبة لدينا :

$27\times0\equiv0\,[31]$	$27\times16\equiv29\,[31]$
$27\times1\equiv27\,[31]$	$27\times17\equiv25\,[31]$
$27\times2\equiv23\,[31]$	$27\times18\equiv21\,[31]$
$27\times3\equiv19\,[31]$	$27\times19\equiv17\,[31]$
$27\times4\equiv15\,[31]$	$27\times20\equiv13\,[31]$
$27\times5\equiv11\,[31]$	$27\times21\equiv9\,[31]$
$27\times6\equiv7\,[31]$	$27\times22\equiv5\,[31]$
$27\times7\equiv3\,[31]$	$\boxed{27\times23\equiv1\,[31]}$
$27\times8\equiv30\,[31]$	$27\times24\equiv28\,[31]$
$27\times9\equiv26\,[31]$	$27\times25\equiv24\,[31]$
$27\times10\equiv22\,[31]$	$27\times26\equiv20\,[31]$
$27\times11\equiv18\,[31]$	$27\times27\equiv16\,[31]$
$27\times12\equiv14\,[31]$	$27\times28\equiv12\,[31]$
$27\times13\equiv10\,[31]$	$27\times29\equiv8\,[31]$
$27\times14\equiv6\,[31]$	$27\times30\equiv4\,[31]$
$27\times15\equiv2\,[31]$	

إذن العدد a من E الذي يُحقق $27a\equiv1\,[31]$ هو العدد 23 .

هذه الطريقة رغم غبائها فهي تُعطينا صورة واضحة للتقابل f من E نحو E المعرف في الأسئلة الموالية .

الطريقة الذكية : ليكن a عنصرا من E حيث $27a\equiv 1\,[31]$.

إذن العدد 31 يقسم الفرق $(27a-1)$.

يوجد إذن b من $\mathbb{Z}$ بحيث : $27a - 1 = 31b$.

أي أن $27a - 31b = 1$.

يعني أن الزوج (a,b) حل للمعادلة (E) .

يوجد إذن k من $\mathbb{Z}$ بحيث : $a = 31k-8$ و $b = 27k-7$.

سوف نهتم فقط بالمتساوية $a = 31k-8$.

بما أن $a\in E$ فإن $0\le a\le 30$.

و منه : $0 \le 31k-8 \le 30$ و $k\in\mathbb{Z}$.

أي : $8\le 31k\le 38$ و $k\in\mathbb{Z}$.

أي : $\frac{8}{31}\le k\le\frac{38}{31}$ و $k\in\mathbb{Z}$.

أي : $0{,}25 \le k \le 1{,}22$ و $k\in\mathbb{Z}$.

إذن العدد الوحيد الذي يحقق هذين الشرطين في آن واحد هو $k=1$.

و منه : $a = 31k-8 = 31-8 = 23$

إذن العدد a من E الذي يحقق $27a\equiv1\,[31]$ هو العدد 23 .

التمرين الثالث II 2 أ

لدينا التطبيق f مُعرف بما يلي :

$$\begin{array}{llll} f : & E & \longrightarrow & E \\ & n & \longrightarrow & f(n)\,;\ 27n+4 \equiv f(n)\,[31] \end{array}$$

لنبين أن : $\forall (m,n)\in E^2\ ;\ f(m)=f(n) \Leftrightarrow m=n$.

أو بتعبير آخر لنبين أن التطبيق f تبايني .

ليكن m و n عنصرين من E .

في البداية نلاحظ أن $m\le30$ و $n\le30$.

إذن $(m-n)\le30$ يعني $(m-n)<31$ $(*)$.

نفترض أن : $f(m)=f(n)$. لدينا : $\begin{cases} 27n+4\equiv f(n)\,[31] \\ 27m+4\equiv f(m)\,[31] \end{cases}$

بما أن : $f(m)=f(n)$ فإن : $27m+4\equiv27n+4\,[31]$

و منه : $27m\equiv27n\,[31]$.

يعني أن 31 يقسم الجداء $27(m-n)$.

و بما أن $1 = 31\wedge27$ فإنه حسب $Gauss$ نستنتج أن 31 يقسم $(m-n)$

نلاحظ أن 31 يقسم عدداً أصغر منه و هو العدد $(m-n)$ حسب $(*)$

إذن بالضرورة : $(m-n)=0$ أي $m=n$.

نتمكن بذلك من الحصول على الإستلزام التالي :

$(\blacksquare)$ $\boxed{\forall(m,n)\in E^2\ ;\ f(m)=f(n)\Rightarrow m=n}$

عكسيا : ليكن m و n عنصرين من E حيث $m=n$.

إذن : $m\equiv n\,[31]$. و منه : $27m\equiv27n\,[31]$.

يعني : $27m+4\equiv27n+4\,[31]$.

إذن : $f(m)\equiv f(n)[31]$.

يعني أن 31 يقسم الفرق $(f(m)-f(n))$.

من جهة أخرى f تطبيق من E نحو E .

إذن : $f(n)\in E$ و $f(m)\in E$.

أي : $f(n)\le30$ و $f(m)\le30$.

و منهما نستنتج أن $f(m)-f(n)<31$.

نلاحظ أن 31 يقسم عددا أصغر منه و هو العدد $(f(m)-f(n))$.

إذن : $(f(m)-f(n))=0$. أي : $f(m)=f(n)$.

و بذلك نحصل على الإستلزام التالي :

$(\blacksquare\blacksquare)$ $\boxed{\forall(m,n)\in E^2\ ;\ m=n \Rightarrow f(m)=f(n)}$

و من الإستلزامين $(\blacksquare\blacksquare)$ و $(\blacksquare)$ نستنتج التكافؤ التالي :

$$\boxed{\forall(m,n)\in E^2\ ;\ f(m)=f(n)\Leftrightarrow m=n}$$

و بالتالي f تطبيق تبايني من E نحو E .

التمرين الثالث — II 2 ب

ليكن m عنصرا من E .

و لنحل في E المعادلة $f(n) = m$ ذات المجهول n .

لدينا : $\begin{cases} f(n) = m \\ 27n + 4 \equiv f(n)\,[31] \end{cases}$ إذن : $27n + 4 \equiv m\,[31]$.

أي : $27n \equiv (m-4)\,[31]$.

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد a نجد :

$$\boxed{27an \equiv a(m-4)\,[31]} \quad (1)$$

من جهة أخرى لدينا : $27a \equiv 1\,[31]$.

إذن : $\boxed{(\forall n\epsilon E)\ ;\ 27an \equiv n\,[31]}$ (2) .

من المتوافقتين (1) و (2) نستنتج أن : $n \equiv a(m-4)\,[31]$.

أي : $n \equiv 23(m-4)\,[31]$ لأن $a = 23$.

نستنتج إذن أن : $(\forall m\epsilon E), (\exists n\epsilon E)\ ;\ \begin{cases} n \equiv 23(m-n)\,[31] \\ f(n) = m \end{cases}$

و هذا يعني أن التطبيق f شمولي من E نحو E .

التمرين الثالث — II 2 ج

رأينا فيما سبق أن التطبيق f تبايني و شمولي من E نحو E .

إذن f تقابل من E نحو E و تقابله العكسي f^{-1} نستنتجه من حل المعادلة $f(m) = n$.

f^{-1} سوف يكون إذن معرفا بما يلي :

$$\begin{array}{lcl} f^{-1} : E & \longrightarrow & E \\ \quad m & \longrightarrow & f^{-1}(m)\ ;\ 23(m-4) \equiv f^{-1}(m)\,[31] \end{array}$$

خلاصة التمرين :

$$\boxed{\begin{array}{l} (\forall n\epsilon E), (\exists!\, m\epsilon E)\ :\ 27n + 4 \equiv m\,[31] \\ \qquad \Leftrightarrow\ 23(m-4) \equiv n\,[31] \end{array}}$$

فيما يلي أمثلة لصور بعض عناصر المجموعة E بالتطبيقين f و f^{-1} (للاستئناس فقط)

$$\left|\begin{array}{ccc} & f & \\ 8 & \longrightarrow & 3 \\ 11 & \longrightarrow & 22 \\ 13 & \longrightarrow & 14 \end{array}\right| \quad et \quad \left|\begin{array}{ccc} & f^{-1} & \\ 6 & \longrightarrow & 15 \\ 19 & \longrightarrow & 4 \\ 23 & \longrightarrow & 3 \end{array}\right|$$

التمرين الرابع — I 1 أ

ليكن x عنصرا من $]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} = e^{\ln(x+1)} \cdot e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$
$$= e^{\left(\ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x}\right)} = e^{\frac{x\ln(x+1) + \ln(x+1)}{x}}$$
$$= e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}$$

التمرين الرابع — I 1 ب

لندرس اتصال الدالة f في الصفر . من جهة أولى لدينا :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \lim_{\substack{t\to1 \\ t=x+1}}\left(\frac{\ln t}{t-1}\right) = \lim_{t\to1}\left(\frac{\ln t - \ln 1}{t-1}\right)$$
$$= (\ln t)'_{/t=1} = \frac{1}{1} = 1$$

إذن :

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}$$
$$= \lim_{x\to0} exp\left((x+1)\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)\right)$$
$$= e^{(0+1)(1)} = e = f(0)$$

إذن f متصلة في الصفر .

لندرس اتصال الدالة f على يمين -1 . من جهة أولى لدينا :

$$\lim_{t\to0^+}\left(\frac{t\ln t}{t-1}\right) = \lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t-1}\right)(t\ln t) = (-1)(0) = 0$$

إذن :

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} exp\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to0^+ \\ t=x+1}} exp\left(\frac{t\ln t}{t-1}\right)$$
$$= e^0 = 1 = f(-1)$$

إذن f دالة متصلة على يمين -1 .

التمرين الرابع — I 2 أ

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} exp\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x+1}} exp\left(\frac{t\ln t}{t-1}\right)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} exp\left(\left(\frac{t}{t-1}\right)(\ln t)\right) = +\infty$$

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) exp\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) exp\left(\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x+1}{x+1}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x+1}}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) exp\left(\left(1+\frac{1}{t-1}\right)\frac{\ln t}{t}\right)$$
$$= (1+0)e^{(1+0)(0)} = 1$$

التمرين الرابع — I 2 ب

سوف نستعمل الصيغة الأولى للدالة f .

ليكن x عنصرا من $]-1;0[\,\cup\,]0;+\infty[$.

$$f(x) - x = (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - x$$
$$= x\,e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - x$$
$$= x\left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1\right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

التمرين الرابع — I 2 ج

من جهة أولى لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x+1}{x+1}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x+1}}\left(\frac{\ln t}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$
$$= (0)(1+0) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1\right) + e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right)\ln(x+1) + \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \left(\lim_{\substack{t\to 0\\ t=\frac{\ln(x+1)}{x}}} \left(\frac{e^t-1}{t}\right)\right) \times \left(\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1)\right) + e^0$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{e^t-e^0}{t-0}\right) \times \left(\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1)\right) + 1$$

$$= (e^t)'_{/t=0} \times (+\infty) + 1$$

$$= e^0(+\infty) + 1 = +\infty$$

ملاحظة : ربما سلكت طريقا طويلا لحساب النهاية $\lim (f(x)-x)$ و قد توجد طريقة أسهل مما اقترحته سابقا . إبحث عن تلك الطريقة و أرسلها عبر رسالة قصيرة للفوز بسيارة رائعة . هاهاهاهاها

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1x = +\infty \end{cases}}$$

نستنتج إذن أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أي المُنَصِّف الأول للمعلم (la première bissectrice) بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع I 3

في البداية لدينا :

$$\lim_{t\to0^+}\left(\frac{t\ln t}{t-1}\right) = \lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t-1}\right)(t\ln t) = \left(\frac{1}{0-1}\right)(0) = 0$$

إذن :

$$\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}-1}{x+1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=x+1}}\left(\frac{e^{\left(\frac{t\ln t}{t-1}\right)}-1}{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to0^+}\left(\frac{e^{\left(\frac{t\ln t}{t-1}\right)}-1}{\left(\frac{t\ln t}{t-1}\right)}\right)\left(\frac{\ln t}{t-1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{m\to0\\ m=\left(\frac{t\ln t}{t-1}\right)}}\left(\frac{e^m-1}{m}\right) \times \lim_{t\to0^+}\left(\frac{\ln t}{t-1}\right)$$

$$= \lim_{m\to0}\left(\frac{e^m-e^0}{m-0}\right) \times \lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t-1}\right)(\ln t)$$

$$= (e^m)'_{/m=0} \times \left(\frac{1}{0-1}\right)(-\infty)$$

$$= e^0 \times (-1)(-\infty) = +\infty$$

و تأويل ذلك هندسيا هو أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $(-1,1)$ موجه نحو الأعلى .

التمرين الرابع I 4 أ

ليكن x عنصرا من المجال $\left[\frac{-1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

$$\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt = \int_0^x \left(\frac{t^2-1+1}{1+t}\right)dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{t^2-1}{t+1}\right)dt + \int_0^x \left(\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \int_0^x \frac{(t-1)(t+1)}{t+1}dt + \int_0^x \left(\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \int_0^x (t-1)\,dt + \int_0^x \left(\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^x + [\ln(1+t)]_0^x$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)}$$

التمرين الرابع I 4 ب

ليكن t عنصرا من المجال $\left[\frac{-1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

$$t \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow (t+1) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{t+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{t^2}{t+1} \leq 2t\ ;\ avec\ t^2 > 0$$

التمرين الرابع I 4 ج

ليكن x و t عنصرين من المجال $\left[\frac{-1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

$$t \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{t^2}{1+t} \leq 2t^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt \leq \int_0^x 2t^2\,dt$$

$car\ ces\ fonctions\ sont\ continues\ et\ 0 \leq x$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt \leq 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt \leq \frac{2x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt\right| \leq \frac{2}{3}|x^3|$$

التمرين الرابع I 4 د

من خلال نتيجة السؤال 4) أ) لدينا :

$$\left(\forall x \geq \frac{-1}{2}\right)\ ;\ \int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

$$\left(\forall x \geq \frac{-1}{2}\right)\ ;\ \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt - \frac{1}{2}$$

و لدينا كذلك حسب نتيجة السؤال 4) ج) :

$$\boxed{\frac{1}{x^2}\left|\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt\right| \leq \underbrace{\frac{2}{3}|x^3|}_{\xrightarrow[x\to0]{}\ 0}}$$

إذن :

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}\left|\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt\right| = 0$$

يعني :

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt = 0$$

و بالتالي :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt - \frac{1}{2}$$

$$= \boxed{\frac{-1}{2}}$$

التمرين الرابع I 4 ه

لنبين في البداية أن :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1 \quad et \quad \lim_{x\to0}\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}=1$$

تذكير : إذا كانت g دالة مُعرفة على مجال I و قابلة للاشتقاق في عنصر x_0 من I ، و كانت f دالة معرفة على مجال J يضم $g(x_0)$ ، و قابلة للاشتقاق في $g(x_0)$ فإن الدالة $f\circ g$ قابلة للاشتقاق في x_0 و نكتب :

$$\left(f(g(x))\right)'_{/x=x_0} = g'(x_0)\times f'\left(g(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\right)$$

سوف نستغل هذا التذكير لحساب النهاية التالية : $\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$

نضع : $f:x\longrightarrow\ln x$ و $g:x\longrightarrow x+1$.

لدينا g دالة حدودية مُعرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق في 0 .

و لدينا الدالة ln معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ الذي يضم $g(0)=1$.

و هي قابلة للاشتقاق في $g(0)=1$.

إذن حسب التذكير : الدالة $f\circ g$ قابلة للاشتقاق في 0 و نكتب :

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)-\ln(0+1)}{x-0}\right) = (\ln(x+1))'_{/t=0} = \left(\frac{1}{1+x}\right)_{/t=0} = 1$$

لنحسب بعد ذلك النهاية الأخرى :

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{x\ln(x+1)-\ln(x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to0}\left(\ln(x+1)+\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = 0+1=1$$

نستعمل إذن هاتين النهايتين و النهاية المحصل عليها من خلال نتيجة السؤال 4) د) للإجابة على السؤال المطروح .

لدينا :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}-e}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{e^{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}-e^1}{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}-1}\right)\left(\frac{\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to1\\ t=\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}}}\left(\frac{e^t-e^1}{t-1}\right)\times\lim_{x\to0}\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}\right)$$

$$= e^1\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\right)$$

$$= e\times\left(\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}+\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\right)\right)$$

$$= e\times\left(1+\frac{-1}{2}\right)=\frac{e}{2}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\frac{e}{2}}$

و هذا يعني أن f قابلة للاشتقاق في الصفر و العدد المشتق عند 0 هو $f'(0)=\frac{e}{2}$

أو بتعبير آخر : منحنى الدالة f يقبل ، عند النقطة ذات الأفصول 0 ، مماسا ميله $\frac{e}{2}$

ملاحظة : قد تبدو بعض الطرق التي أسلكها في حساب بعض النهايات طويلة . لكن هذا لا يمنع من وجود طرق بسيطة للحساب و التي أجهلها حاليا . أو بتعبير واضح : this is my best .

التمرين الرابع I 5 أ

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يلي :

$g(x)=x-\ln(x+1)$

رأينا من خلال ما سبق أن الدالة $x\longrightarrow\ln(x+1)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ لأنها قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقطه

إذن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]-1;+\infty[$. و لدينا :

$$(\forall x>-1)\ ;\ g'(x) = (x-\ln(x+1))' = 1-(\ln(x+1))' = 1-\frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

من أجل $x>-1$ لدينا $x+1>0$.

إذن إشارة $g'(x)$ متعلقة بإشارة $x+1>0$.

إذا كان $x=0$ فإن $g'(x)=0$.

إذا كان $x>0$ فإن $g'(x)>0$.

إذا كان $x<0$ فإن $g'(x)<0$.

نضيف نهايتي الدالة g عند -1 و عند $+\infty$.

لدينا :

$$\lim_{x\to(-1)^+}g(x) = \lim_{x\to(-1)^+}(x-\ln(x+1)) = \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=x+1}}\left((t-1)-\ln t\right) = 0-1-\left(\lim_{t\to0^+}\ln t\right) = -1+\infty=+\infty$$

و لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-\ln(x+1)) = \lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=x+1}}(t-1)\left(1-\frac{\ln t}{t-1}\right)$$

$$= \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=x+1}}(t-1)\left(1-\left(\frac{\ln t}{t}\right)\left(\frac{t}{t-1}\right)\right) \text{"="} (+\infty-1)(1-(0)(1)) = +\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

و من خلال هذا الجدول الجميل نلاحظ أن 0 قيمة دنوية للدالة g على المجال $]-1,+\infty[$. لأن g تناقصية على المجال $]-1,0]$ و تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ و $g(0)=0$.

إذن : $(\forall x\in]-1,+\infty[)\ ;\ g(x)\geq0$

توجد طريقة أخرى للجواب و هي كالآتي :

على المجال $]-1,0]$ ، لدينا g دالة تناقصية .

إذن : $x\leq0 \Longrightarrow g(x)\geq g(0) \Longrightarrow g(x)\geq0$

و على المجال $[0;+\infty[$ ، لدينا g دالة تزايدية .

إذن: $x\geq0 \Longrightarrow g(x)\geq g(0) \Longrightarrow g(x)\geq0$

و بالتالي : $\forall x\in]-1,+\infty[\ ;\ g(x)\geq0$

التمرين الرابع I 5 ب

ليكن x عنصرا من $]-1;0[\cup]0,+\infty[$.

$$f'(x) = \left((x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right)' = (x+1)'\left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right) + (x+1)\left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right)'$$

$$= \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right) + (x+1)\left(\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)'\right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right) + (x+1)\left(\frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}\right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \left(e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right) + \left(\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}\right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \left(1 + \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}\right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \left(\frac{x^2+x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}\right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \left(\frac{x(x+1)-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}\right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \frac{(x+1)(x-\ln(x+1))}{x^2} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

$$= \left(\frac{(x+1)g(x)}{x^2}\right) e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$$

التمرين الرابع — I 5 ج

نعلم أن : $e^x > 0 \;;\; (\forall x \epsilon \mathbb{R})$

إذن : $\forall\, x \,\epsilon\,]-1;0[\, \cup\,]0,+\infty[\;;\; e^x > 0$

و لدينا كذلك : $x^2 > 0 \;;\; (\forall x \epsilon \mathbb{R})$

و لدينا كذلك : $(x+1) > 0 \;;\; (\forall x > -1)$

و كذلك : $g(x) \geq 0 \;;\; (\forall x > -1)$

يعني : $\forall\, x \,\epsilon\,]-1,0[\, \cup\,]0;+\infty[\;;\; g(x) > 0$

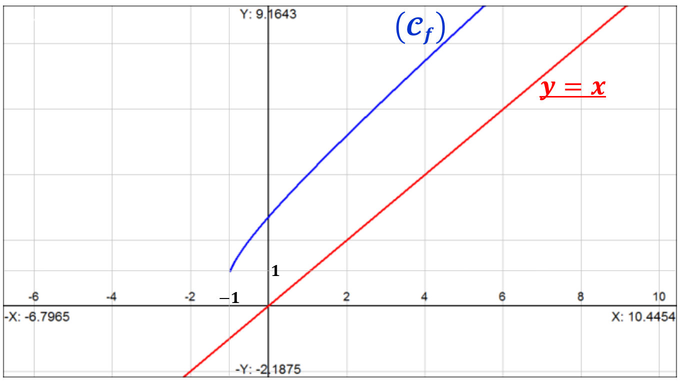
إذن $\frac{(x+1)g(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}$ كمية موجبة قطعا على $]-1;0[\, \cup\,]0;+\infty[$

يعني : $\forall\, x \,\epsilon\,]-1,0[\, \cup\,]0;+\infty[\;;\; f'(x) > 0$

أي أن الدالة f تزايدية قطعا على حيز تعريفها

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
f	1 ↗	e ↗	$+\infty$

التمرين الرابع — I 6



التمرين الرابع — II 1 أ

يكفي أن ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ على المجال $[0;+\infty[$.

في البداية لدينا لكل x من $[0;+\infty[$:

$$f(x) - x = (x+1)e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - x$$

$$= (x+1)\, e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} - x\, e^{\frac{\ln(x+1)}{x}} e^{\frac{-\ln(x+1)}{x}}$$

$$= e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\left((x+1) - x\, e^{\frac{-\ln(x+1)}{x}}\right)$$

$$= x\, e^{\frac{\ln(x+1)}{x}}\left(1 - e^{\frac{-\ln(x+1)}{x}}\right)$$

إذن :

$$x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1$$
$$\Rightarrow \ln(x+1) \geq 0$$
$$\Rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} \geq 0 \quad et \quad \frac{-\ln(x+1)}{x} \leq 0$$
$$\Rightarrow e^{\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)} \geq 1 \quad et \quad e^{\left(\frac{-\ln(x+1)}{x}\right)} \leq 1$$
$$\Rightarrow e^{\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)} \geq 1 \quad et \quad 1 - e^{\left(\frac{-\ln(x+1)}{x}\right)} \geq 0$$
$$\Rightarrow x\, e^{\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)}\left(1 - e^{\left(\frac{-\ln(x+1)}{x}\right)}\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow f(x) - x \geq 0 \;;\; (\forall x \geq 0)$$
$$\Rightarrow \boxed{(\forall x \geq 0) \;;\; f(x) \geq x} \quad (*)$$

التمرين الرابع — II 1 ب

ليكن t عددا حقيقيا من $[0;1]$. « t *est une variable muette* »

$$x \geq 0 \Rightarrow xt \geq 0 \;;\; car\; t \geq 0$$
$$\Rightarrow f(xt) \geq xt \;;\; d'après\; (*)$$
$$\Rightarrow \int_0^1 f(xt)\, dt \geq \int_0^1 (xt)\, dt$$
$$\Rightarrow F(x) \geq x\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$
$$\Rightarrow F(x) \geq \frac{x}{2}$$

التمرين الرابع — II 1 ج

لدينا : $(\forall x \geq 0) \;;\; F(x) \geq \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{x \to +\infty}$

$$+\infty$$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

التمرين الرابع — II 2 أ

سوف نستعمل مكاملة بتغيير المتغير .

$$F(x) = \int_0^1 f(xu)\, du \;;\; x \geq 0$$

نضع : $t = xu$ إذن : $dt = x\, du$

إذا كان $u = 0$ فإن $t = 0$.

إذا كان $u = 1$ فإن $t = x$.

إذن :

$$F(x) = \int_0^1 f(xu)\, du \;;\; x \geq 0$$
$$= \int_0^x f(t) \cdot \frac{1}{x} \cdot dt \;;\; x > 0$$
$$= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt \;;\; x > 0$$

و بالتالي :

$$\boxed{\forall\, x \,\epsilon\,]0;+\infty[\;;\; F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt}$$

التمرين الرابع — II 2 ب

تذكير : إذا كانت g دالة متصلة على مجال I و $a \in I$ فإن الدالة .

$$G : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \int_a^x g(t)\,dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة g على المجال I .

رأينا حسب ما سبق أن الدالة f متصلة على $[0,+\infty[$ و $0 \in [0,+\infty[$

إذن الدالة :

$$G : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \int_a^x g(t)\,dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

و هذا يعني أن الدالة G قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$.

و لدينا : $(\forall x \geq 0)\ ;\ G'(x) = f(x)$.

الدالة F مُعرفة بما يلي : $\boxed{(\forall x > 0)\ ;\ F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}$

يعني : $(\forall x > 0)\ ;\ F(x) = \frac{1}{x} \cdot G(x)$

إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$.

و لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall x > 0)\ ;\ F'(x) &= \left(\frac{1}{x} \cdot G(x)\right)' \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)' G(x) + \frac{1}{x} G'(x) \\ &= \left(\frac{-1}{x^2}\right) G(x) + \left(\frac{1}{x}\right) f(x) \\ &= \frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{1}{x} G(x)\right) \\ &= \frac{1}{x}\big(f(x) - F(x)\big)\end{aligned}$$

التمرين الرابع — II 2 ج

ليكن t عددا حقيقيا من المجال $[0;1]$ و x عدد حقيقي موجب .

$$\begin{aligned} t \in [0,1] \ &\Rightarrow\ 0 \leq t \leq 1 \\ &\Rightarrow\ 0 \leq xt \leq x \quad ;\ car\ \ x \geq 0 \\ &\Rightarrow\ f(0) \leq f(xt) \leq f(x) \quad ;\ car\ f\ est\ \nearrow \\ &\Rightarrow\ e \leq f(xt) \leq f(x) \\ &\Rightarrow\ \int_0^1 e\,dt \leq \int_0^1 f(xt)\,dt \leq \int_0^1 f(x)\,dt \\ &\quad car\ ces\ fonctions\ sont\ continues\ et\ 0 < 1 \\ &\Rightarrow\ e\,[t]_0^1 \leq F(x) \leq f(x)\,[t]_0^1 \\ &\Rightarrow\ e \leq F(x) \leq f(x) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x \geq 0)\ ;\ e \leq F(x) \leq f(x)}$

التمرين الرابع — II 2 د

لدينا : $(\forall x > 0)\ ;\ F'(x) = \frac{1}{x}\big(f(x) - F(x)\big)$

و نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ F(x) \leq f(x)$.

إذن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ f(x) - F(x) \geq 0$.

يعني : $(\forall x > 0)\ ;\ \frac{1}{x}\big(f(x) - F(x)\big) \geq 0$.

يعني : $(\forall x > 0)\ ;\ F'(x) \geq 0$.

يعني أن الدالة F تزايدية على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين الرابع — III 1 أ

ليكن t عددا حقيقيان من المجال $[0;1]$. و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

$$\begin{aligned}(n+1) > n \ &\Leftrightarrow\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad ;\ (\forall n \geq 1) \\ &\Leftrightarrow\ \frac{t}{n+1} \leq \frac{t}{n} \quad ;\ car\ t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow\ f\left(\frac{t}{n+1}\right) \leq f\left(\frac{t}{n}\right) \quad ;\ car\ f\ est\ \nearrow \\ &\Rightarrow\ \int_0^1 f\left(\frac{t}{n+1}\right) dt \leq \int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right) dt \\ &\quad car\ ces\ fonctions\ sont\ continues\ et\ 0 < 1 \\ &\Rightarrow\ \boxed{u_{n+1} \leq u_n \quad ;\ (\forall n \geq 1)} \\ &\Rightarrow\ (u_n)_{n \geq 1}\ est\ une\ suite\ décroissante\end{aligned}$$

التمرين الرابع — III 1 ب

ليكن t عددا حقيقيان من المجال $[0;1]$. و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

$$\begin{aligned}\begin{cases} t \geq 0 \\ n \geq 1 \end{cases} \ &\Rightarrow\ \frac{t}{n} \geq 0 \\ &\Rightarrow\ f\left(\frac{t}{n}\right) \geq f(0) \quad ;\ car\ f\ est\ \nearrow \\ &\Rightarrow\ f\left(\frac{t}{n}\right) \geq e \\ &\Rightarrow\ \int_0^1 f\left(\frac{t}{n}\right) dt \geq \int_0^1 e\,dt \\ &\quad car\ ces\ fonctions\ sont\ continues\ et\ 0 < 1 \\ &\Rightarrow\ u_n \geq e\,[t]_0^1 \quad ;\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\ &\Rightarrow\ u_n \geq e \quad ;\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n \geq e}$

التمرين الرابع — III 2 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . و سوف نستعمل تقنية المكاملة بتغيير المتغير .

$$\boxed{u_n = \int_0^1 f\left(\frac{y}{n}\right) dy} \ ;\ \begin{pmatrix} y\ est\ une \\ variable \\ muette \end{pmatrix}$$

نضع : $\frac{y}{n} = t$. إذن : $dy = n\,dt$.

إذا كان $y = 0$ فإن $t = 0$.

إذا كان $y = 1$ فإن $t = \frac{1}{n}$.

إذن :

$$\begin{aligned}u_n &= \int_0^1 f\left(\frac{y}{n}\right) dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) \cdot n \cdot dt \\ &= n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt\end{aligned}$$

التمرين الرابع — III 2 ب

نعلم أن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ e \leq F(x) \leq f(x)$

و نعلم أن : $(\forall x > 0)\ ;\ F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

لدينا $n \geq 1 > 0$ إذن $\frac{1}{n} \geq 0$. نستطيع إذن تعويض x بـ $\frac{1}{n}$ نجد :

$$(\forall n \geq 1)\ ;\ \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)}\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

يعني : $(\forall n \geq 1)\ ;\ n\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$

و منه حسب نتيجة السؤال 2) أ) نستنتج أن :

$$(\forall n \geq 1)\ ;\ u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

التمرين الرابع — III 2 ج

لدينا حسب السؤال1) ب) : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n \geq e$

و لدينا حسب السؤال2) ب) : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n \geq f\left(\frac{1}{n}\right)$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ e \leq u_n \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$

On fait tendre n vers l'infini on obtient

$$\boxed{e \leq u_n \leq \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} e}}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى العدد الجميل e .

أجوبة امتحان مدينة بني ملال 2008

التمرين الأول 1 أ

ليكن t عددا حقيقيا مخالفا للعدد -1 . أقترح طريقتين في الجواب.

الطريقة الأولى : استعمال القسمة الإقليدية.

$$\begin{array}{l|l} t^3+t & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & t^2-t+2 \\ \quad t-t^2 & \\ \quad \underline{-t^2-t} & \\ \qquad 2t & \\ \qquad \underline{2t+2} & \\ \qquad -2 & \end{array}$$

إذن : $$\frac{t^3+t}{t+1}=(t^2-t+2)-\frac{2}{t+1}$$

الطريقة الثانية : ننطلق من الطرف الأيمن و نحاول الوصول إلى الطرف الأيسر.

لدينا : $$(t^2-t+2)-\frac{2}{t+1}=\frac{(t+1)(t^2-t+2)-2}{(t+1)}=\frac{t^3+t}{t+1}$$

التمرين الأول 1 ب

لنحسب التكامل التالي : $I=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}\right)dx$

نستعين بتقنية تغيير المتغير و نضع : $t=\sqrt{x-1}$.

إذن : $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ و منه : $dx=2t\ dt$.

إذا كان : $t=\sqrt{x-1}$. فإن : $x=t^2+1$.

إذا كان : $x=1$. فإن : $t=0$.

إذا كان : $x=2$. فإن : $t=1$.

إذن التكامل يصبح :

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{t^2+1}{1+t}\right)(2t\ dt)\\&=\int_0^1\left(\frac{t^3+t}{1+t}\right)dt\\&=\int_0^1\left((t^2-t+2)-\frac{2}{t+1}\right)dt\\&=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1+2[t]_0^1-2[\ln|1+t|]_0^1\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-2\ln 2\\&=\frac{11}{6}-\ln 4\approx 0{,}45\end{aligned}$$

التمرين الأول 2

الخاصية التي سوف نستعملها هي التالية :

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a,b]$ و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم. المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و تقبل التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ كنهاية عندما يؤول n إلى $+\infty$.

$$S_n=\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\quad ;\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*$$

لدينا : $$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}\right)$$

سوف نحاول إذن إعادة هيكلة هذه المتتالية و إظهار الدالة $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}$ لأنها واردة في السؤال السابق .

$$\begin{aligned}u_n&=\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}\right)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+\sqrt{n}\sqrt{k}}\right)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\\&=\left(\frac{2-1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n\left(1+\sqrt{\frac{k}{n}}\right)}\right)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\\&=\left(\frac{2-1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}\right)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\\&=\left(\frac{2-1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n}-1}}\right)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\\&=\left(\frac{2-1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\\&=\left(\frac{2-1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}f\left(1+k\left(\frac{2-1}{n}\right)\right)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\end{aligned}$$

الدالة f متصلة على المجال $[1;2]$ لأنها عبارة عن خارج دالتين متصلتين على المجال $[1;2]$.

إذن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و نهايتها هي التكامل $\int_1^2 f(x)\,dx$

$$\begin{aligned}\lim_{n\infty}(u_n)&=\lim_{n\infty}\left(\frac{2-1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}f\left(1+k\left(\frac{2-1}{n}\right)\right)\\&=\int_1^2 f(x)\,dx\\&=\int_1^2\left(\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}\right)dx\\&=2I=2\left(\frac{11}{6}-\ln 4\right)\approx 0{,}9\end{aligned}$$

التمرين الثاني 1

لنحل المعادلة التفاضلية التالية (F) : $(F):y''+2y'+2y=0$

و من أجل ذلك نحل معادلتها المميزة $r^2+2r+2=0$.

لدينا $\Delta=(2i)^2$ إذن لهذه المعادلة حلين عقديين مترافقين $r_1=-1-i$ و $r_2=-1+i$.

و بالتالي المعادلة (F) تقبل حلا و هو جميع الدوال المكتوبة على شكل :

$$y_F(x)=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$$

حيث A و B ثابتتين حقيقيتين يتم تحديد قيمتيهما العدديتين بالاستعانة بالشروط البدئية إن وجدت .

التمرين الثاني 2 أ

نستعين بتقنية المكاملة بالأجزاء لإيجاد التعبير الصريح للدالة f .

$$(\forall\, x>0)\ ;\ f(x)=\int_1^x \underbrace{t}_{u'}\cdot\underbrace{\ln t}_{v}\,dt$$
$$=[uv]-\int_1^x uv'$$
$$=\left[\frac{t^2\ln t}{2}\right]_1^x-\int_1^x\left(\frac{t^2}{2}\right)\left(\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int_1^x t\,dt$$
$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x$$
$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}$$

لنحدد الآن صيغتي $f'(x)$ و $f''(x)$.

لدينا : $(\forall\, x>0)\ ;\ f(x)=\int_1^x(t\ln t)\,dt$

نلاحظ أن الدالة $\varphi: t\longrightarrow t\ln t$ متصلة على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن f عبارة عن دالة أصلية للدالة φ على المجال $]0,+\infty[$.

أو بتعبير آخر : $(\forall\, x>0)\ ;\ f'(x)=x\ln x$.

و نلاحظ كذلك أن الدالة φ قابلة للاشتقاق بدورها على المجال $]0,+\infty[$ لأنها عبارة عن جداء دالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و منه : $(\forall\, x>0)\ ;\ f''(x)=(x\ln x)'=1+\ln x$.

و بذلك نحصل على التعابير التالية :
$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\\ f'(x)=x\ln x\\ f''(x)=1+\ln x\end{cases}$$

نعوض إذن هذه التعابير في أمكنة y و y' و y'' في المعادلة (E) نحصل على :
$$f''(x)+2\,f'(x)+2\,f(x)$$
$$=(1+\ln x)+2x\ln x+x^2\ln x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$
$$=(1+2x+x^2)\ln x-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$$
$$=(x+1)^2\ln x-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}$$

إذن الدالة f حل خاص للمعادلة التفاضلية (E) .

التمرين الثاني 2 ب

لنبين صحة التكافؤ التالي :

$$\boxed{(y-f)\ est\ solution\ de\ (F)\iff y\ est\ solution\ de\ (E)}$$

ننطلق إذن من إحدى العبارتين و نحاول الوصول إلى العبارة الثانية .

نفترض أن y حل للمعادلة F .

$$\iff\ (\forall\, x>0)\ ;\ (y-f)''(x)+2(y-f)'(x)+2(y-f)(x)=$$
$$=y''(x)-f''(x)+2y'(x)-2f''(x)+$$
$$+2y(x)-2f(x)$$
$$=\left(\underbrace{y''(x)+2y'(x)+2y(x)}_{\substack{=0\ ;\ car\ \ y\ est\ solu\ de\ (E)\\ d'apr\grave{e}s\ l'hypoth\grave{e}se}}\right)-\left(\underbrace{f''(x)+2f''(x)+2f(x)}_{\substack{=0\ car\ ;\ f\ est\ solu\ particuliere\\ de\ l'\acute{e}quation\ (E)}}\right)$$
$$=0-0=0$$

إذن الدالة $(y-f)$ حل للمعادلة (F) .

و بالتالي نحصل على التكافؤ التالي :

$$\boxed{(y-f)\ est\ solution\ de\ (F)\iff y\ est\ solution\ de\ (E)}$$

التمرين الثاني 2 ج

الحل العام للمعادلة (E) تُكتب على شكل (y_H+y_P) حيث y_H هو حل المعادلة (F) و y_P هو حل خاص للمعادلة (E) .

من خلال الأسئلة السابقة نأخذ :

$$\boxed{y_H=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)\ ;\ (A,B)\in\mathbb{R}^2}$$

لدينا $y_H=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ حل للمعادلة (F) .

إذن حسب تكافؤ السؤال ب) نستنتج أن الدالة (y_H+f) حل خاص للمعادلة (E) . نأخذ إذن :

$$y_H(x)=y_H(x)+f(x)$$
$$=e^{-x}(a\cos x+B\sin x)+f(x)$$

و بالتالي الحل العام للمعادلة (E) هو جميع الدوال y التي تُكتب على شكل :

$$y(x)=y_P(x)+y_H(x)$$
$$=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)+f(x)+e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$$
$$=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)+f(x)\ ;\ (A,B)\in\mathbb{R}^2$$

التمرين الثالث 1 أ

ليكن x عنصرا من المجال $[1,2]$.

$$f'(x)=\left(\sqrt{x+2}\right)'\left(\frac{1}{1+\left(\sqrt{x+2}\right)^2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{1}{1+\left(\sqrt{x+2}\right)^2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

نلاحظ أن الكمية $\sqrt{x+2}$ موجبة على المجال $[1,2]$.

إذن : $\forall\, x\in[1,2]\ ;\ f'(x)>0$.

يعني أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[1,2]$.

التمرين الثالث 1 ب

$$x\in[1,2]\iff 1\le x\le 2\iff\begin{cases}3\le x+2\le 4\\ 4\le x+3\le 5\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}2\sqrt{3}\le 2\sqrt{x+2}\le 4\\ \frac{1}{5}\le\frac{1}{x+3}\le\frac{1}{4}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}\le\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\le\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{5}\le\frac{1}{x+3}\le\frac{1}{4}<\frac{1}{3}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{20}\le\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{1}{x+3}\right)\le\frac{1}{6\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow\frac{-1}{6\sqrt{3}}<\frac{1}{20}\le\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)\left(\frac{1}{x+3}\right)\le\frac{1}{6\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow\frac{-1}{6\sqrt{3}}<f'(x)\le\frac{1}{6\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow|f'(x)|\le\frac{1}{6\sqrt{3}}$$

إذن : $\boxed{(\forall\, x\in[0,2])\ ;\ |f'(x)|\le\frac{1}{6\sqrt{3}}}$

التمرين الثالث | 1 | ج

الخاصية التي سوف نستعملها هي التالية :

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال $[a,b]$
- و f و g قابلتين للاشتقاق على المجال $]a,b[$.
- و $f(a) = g(a)$
- و $\forall x \in [a,b] \; ; \; f'(x) \leq g'(x)$.

فإن : $\forall x \in [a,b] \; ; \; f(x) \leq g(x)$.

نعتبر الدالتين $\varphi(x) = x$ و $\psi(x) = Arctan(x)$.

لدينا φ و ψ متصلتين على المجال $[0,2]$ (ليس المجال $[1,2]$)

و φ و ψ قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,2[$.

و $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

و $\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \; ; \; (\forall x \in I)$. لأن : $\frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1+x^2} \leq 0$

إذن : $(\forall x\in[0,2]) \; ; \; \psi'(x) \leq \varphi'(x)$.

من النتائج الأربعة نستنتج حسب الخاصية المذكورة

أن : $(\forall x\in[0,2]) \; ; \; \psi(x) \leq \varphi(x)$

يعني : $(\forall x\in[0,2]) \; ; \; Arctan(x) \leq x$.

و بالتالي : $(\forall x\in[1,2]) \; ; \; Arctan(x) \leq x$ لأن $[1,2] \subset [0,2]$

التمرين الثالث | 1 | د

نعتبر الدالة h على المجال $[1,2]$ بما يلي : $h(x) = f(x) - x$

h دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[1,2]$ باعتبارها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[1,2]$.

و لدينا :
$$\forall x \in [1,2] \; ; \; h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1-2(x+3)\sqrt{x+2}}{2(x+3)\sqrt{x+2}}$$

لدينا $1 \leq x \leq 2$. إذن : $4 \leq (x+3) \leq 5$.

لدينا $1 \leq x \leq 2$. إذن : $\sqrt{3} \leq \sqrt{x+2} \leq 2$.

إذن : $\underbrace{-19}_{\text{عدد سالب}} \leq 1-2(x+3)\sqrt{x+2} \leq \underbrace{1-8\sqrt{3}}_{\text{عددسالب}} < 0$.

و بالتالي : $\forall x \in [1,2] \; ; \; h'(x) < 0$.

يعني أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $[1,2]$.

و بما أنها متصلة على $[1,2]$ فهي تقابل من $[1,2]$ نحو $h([1,2])$.

و لدينا :
$$h([1,2]) = [h(2);h(1)] = \left[Arctan(2)-2 \; ; Arctan(\sqrt{3})-1\right]$$

إذن h تقابل من $[1,2]$ نحو $\left[Arctan(2)-2 \; ; \; Arctan(\sqrt{3})-1\right]$

نعلم أن : $(\forall x\in[1,2]) \; ; \; Arctan(x) \leq x$

إذن : $Arctan(2) - 2 \leq 0$

و لدينا : $Arctan(\sqrt{3}) - 1 > 0$ (حسب الآلة الحاسبة)

إذن : $Arctan(2) - 2 \leq 0 < Arctan(\sqrt{3}) - 1$.

يعني أن : $0 \in \left[Arctan(2)-2 \; ; \; Arctan(\sqrt{3})-1\right]$.

إذن الصفر يمتلك سابقا واحدا α في المجال $[1,2]$ بالتقابل h .

و ذلك لأن h تقابل من $[1,2]$ نحو $\left[Arctan(2)-2 \; ; Arctan(\sqrt{3}) - \right.$

أو بتعبير آخر : $\exists! \; \alpha \in [1;2] \; ; \; h(\alpha) = 0$.

أي : $\exists! \; \alpha \in [1;2] \; ; \; f(\alpha) - \alpha = 0$.

أي : $\exists! \; \alpha \in [1;2] \; ; \; f(\alpha) = \alpha$.

يعني أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,2]$.

التمرين الثالث | 2 | أ

سوف نستعمل البرهان بالترجع . و من أجل ذلك نعتبر العبارة المنطقية (P_n) المعرفة بما يلي : $(P_n) \; : \; u_n \in [\alpha,2]$.

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 2 \in [\alpha,2]$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن العبارة (P_n) صحيحة .

$$\begin{aligned}
(P_n) \; est \; vraie \; &\Rightarrow u_n \in [\alpha\,;2] \\
&\Rightarrow \alpha \leq u_n \leq 2 \\
&\Rightarrow f(\alpha) \leq f(u_n) \leq f(2) \; ; \; car \; f \; est \; \nearrow \; sur \; [1,2] \\
&\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq Arctan(2) \\
&\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq \underbrace{Arctan(2) \leq 2}_{selon \; (\text{ج}1} \\
&\Rightarrow \alpha \leq u_{n+1} \leq 2 \\
&\Rightarrow u_{n+1} \in \,]\alpha,2] \subset [\alpha,2] \\
&\Rightarrow u_{n+1} \in [\alpha,2] \\
&\Rightarrow (P_{n+1}) \; est \; vraie
\end{aligned}$$

لقد حصلنا على الوضعية الترجعية التالية : $\begin{cases} (P_0) \; est \; vraie \\ (P_n) \; \Rightarrow \; (P_{n+1}) \; ; \; \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(P_n) \; est \; toujours \; vraie}$.

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; u_n \in [\alpha,2]$.

التمرين الثالث | 2 | ب

لدينا الدالة $h(x) = f(x) - x$ دالة تناقصية قطعا على المجال $[1,2]$.

إذن h تناقصية قطعا على المجال $[\alpha\,,2]$ لأن $[\alpha,2] \subset [1,2]$

ليكن x عنصرا من $[\alpha,2]$: $x \in [\alpha,2]$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \geq \alpha \\
&\Rightarrow h(x) \leq h(\alpha) \; ; \; car \; h \searrow \; sur \; [\alpha,2] \\
&\Rightarrow f(x) - x \leq 0 \; ; \; car \; f(\alpha) = \alpha \\
&\Rightarrow f(x) \leq x \quad ; \; \forall x \in [\alpha,2] \\
&\Rightarrow f(u_n) \leq u_n \quad ; \; car \; u_n \in [\alpha,2] \; ; \; \forall n\in\mathbb{N} \\
&\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n \quad ; \; \forall n\in\mathbb{N} \\
&\Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \; est \; une \; suite \; décroissante
\end{aligned}$$

التمرين الثالث | 2 | ج

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; u_n \in [\alpha,2]$.

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; u_n \geq \alpha$.

نعتبر إذن المجال $[\alpha\,,u_n]$ المتواجد ضمن $[1,2]$.

لدينا f متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $[1,2]$.

إذن f متصلة على المجال $[\alpha\,,u_n]$ و قابلة للاشتقاق على $]\alpha\,,u_n[$.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة f في المجال $[\alpha\,,u_n]$ نستنتج أن $\exists \, c \in \,]\alpha\,,u_n[\; ; \; \frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$

$$\Rightarrow \exists \, c \in \,]\alpha\,,u_n[\; ; \; \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| = |f'(c)|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(u_n)-f(\alpha)| = |f'(c)| \times |u_n - \alpha| \\ \alpha < c < u_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} |u_{n+1}-\alpha| = |f'(c)| \times |u_n - \alpha| \\ \alpha < c < u_n \end{cases}} \quad (1)$$

لدينا حسب السؤال 1) ب) : $\boxed{\forall x \in [1,2] \; ; \; |f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}}$

إذن : $\forall x \in \,]\alpha\,,u_n[\; ; \; |f'(x)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$.

و ذلك لأن : $]\alpha\,,u_n[\subset [1,2]$.

لدينا $c \in \,]\alpha\,,u_n[$ إذن $|f'(c)| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}$.

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|u_n - \alpha|$ نجد :

$$(2) \quad \boxed{|f'(c)| \times |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}|u_n - \alpha|}$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) \; ; \; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{3}}|u_n - \alpha|}$$

التمرين الأول
2 د

من نتيجة السؤال ج) نستنتج أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le \frac{1}{6\sqrt3}|u_{n-1}-\alpha|$$
$$\le \left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)|u_{n-2}-\alpha|$$
$$\le \left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)|u_{n-3}-\alpha|$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$\le \left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n|u_{n-n}-\alpha|$$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le \left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n|u_0-\alpha|$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le \left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n|2-\alpha|$

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6\sqrt3}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1 إذن : $\lim\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n=0$

و منه : $\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n|2-\alpha|=0$

و بذلك نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le \underbrace{\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n|2-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}0}$$

أو بتعبير آخر نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{-\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n|2-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}0}\le(u_n-\alpha)\le\underbrace{\left(\frac{1}{6\sqrt3}\right)^n|2-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}0}$$

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n\infty}(u_n-\alpha)=0\ \Leftrightarrow\ \lim_{n\infty}(u_n)=\alpha$$

و هذا يعني أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و تؤول إلى العدد α .

إضافة : لتحديد قيمة عددية للعدد α باستعمال الآلة الحاسبة نتبع المراحل التالية :

- إظبط الآلة على الراديان rad .
- إضغط على $\boxed{2}$ ثم $\boxed{=}$ (لأن $u_0=2$)
- أكتب على الآلة التعبير التالي : $tan^{-1}\left(\sqrt{(Ans+2)}\right)$.
- بعد ذلك إضغط على الزر $\boxed{=}$ مرات عديدة و متوالية حتى يستقر العدد الظاهر على الشاشة . و سوف تحصل على ما يلي :

$\boxed{=}$ المرة الأولى : 1,107148718
$\boxed{=}$ المرة الثانية : 1,054761932
$\boxed{=}$ المرة الثالثة : 1,051105133
$\boxed{=}$ المرة الرابعة : 1,050846941
$\boxed{=}$ المرة الخامسة : 1,050828696
$\boxed{=}$ المرة السادسة : 1,050827407
$\boxed{=}$ المرة السابعة : 1,050827316
$\boxed{=}$ المرة الثامنة : 1,050827310
$\boxed{=}$ المرة التاسعة : $\boxed{1,050827309}$
$\boxed{=}$ المرة العاشرة : $\boxed{1,050827309}$
$\boxed{=}$ المرة الحادية ع : $\boxed{1,050827309}$

و نلاحظ أن هذا العدد قد استقر.

إذن : $\alpha\approx 1,0508827309$.

التمرين الرابع
1 أ

الطريقة الأولى : نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)=e^x-x-1$

لدينا φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله باعتبارها مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $\varphi'(x)=e^x-1$.

إذا كان : $x=0$ فإن : $\varphi'(x)=0$.
إذا كان : $x>0$ فإن : $\varphi'(x)>0$.
إذا كان : $x<0$ فإن : $\varphi'(x)<0$.

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-x-1)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

و لدينا كذلك :
$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-x-1)$$
$$=0+\infty-1=+\infty$$

و لدينا كذلك : $\varphi(0)=0$

نلخص إذن دراسة الدالة φ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

من خلال هذا الجدول نلاحظ أن 0 قيمة دنوية للدالة φ على $\mathbb{R}$ بأكمله .

يعني : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)\ge0$.

يعني : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x-x-1\ge0$.

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ ;\ e^x\ge x+1$.

الطريقة الثانية : نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي
$u(x)=e^x$ و $v(x)=x+1$.

لدينا u و v دالتان متصلتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ لأنهما دالتان اعتياديتين.

و لدينا : $u(0)=v(0)=1$.

$$x\ge0\ \Rightarrow\ e^x\ge e^0$$
$$\Rightarrow\ e^x\ge1$$
$$\Rightarrow\ u'(x)\ge v'(x)$$

نستنتج إذن من هذه الأشياء و باستعمال إحدى خاصيات مبرهنة التزايدات المنتهية التي تم التذكير بها في التمرين 3) نستنتج أن :

$\forall\ x\in[0;+\infty[\ ;\ u(x)\ge v(x)$

يعني : $\forall x \in [0;+\infty[\; ; \; e^x \geq x+1$ (1) .

و بنفس الطريقة نبين أن : $\forall t \in [0;+\infty[\; ; \; e^{-t} \geq -t+1$

و ذلك بوضع $u(t) = e^{-t}$ و $v(t) = -t+1$.

نضع $t = -x$ فنحصل على النتيجة التالية :

$$(2)\quad \boxed{\forall x \in]-\infty,0] \; ; \; e^x \geq x+1}$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; e^x \geq x+1$

التمرين الرابع 1 ب

ليكن t عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لدينا :

$$t>0 \Rightarrow -t^2<0$$
$$\Rightarrow e^{-t^2}<1$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{e^{-t^2}}{t} < \frac{1}{t}}\;(3) \; ; \; avec \; t>0$$

من جهة أخرى لدينا :

$$t>0 \Rightarrow t \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow -t^2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow -t^2+1 \leq e^{-t^2} \; ; \; d'après \;(1\text{أ})$$
$$\Rightarrow \frac{-t^2+1}{t} \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \; ; \; avec \; t>0$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{t} - t \leq \frac{e^{-t^2}}{t}} \quad (4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t>0) \; ; \; \left(\frac{1}{t}-t\right) \leq \frac{e^{-t^2}}{t} \leq \left(\frac{1}{t}\right)} \quad (\blacksquare)$$

التمرين الرابع 1 ج

ليكن x و t عددان حقيقيان موجبان قطعا .

$$t>0 \Rightarrow \left(\frac{1}{t}-t\right) \leq \frac{1}{t}\, e^{-t^2} \leq \frac{1}{t} \; ; \; d'après (\blacksquare)$$
$$\Rightarrow \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}-t\right)dt \leq \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}\, e^{-t^2}\right)dt \leq \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

$car \; ces \; fonctions \; sont \; toutes \; continues \; et \; x<2x$

$$\Rightarrow \left[\ln|t| - \frac{t^2}{2}\right]_x^{2x} \leq f(x) \leq [\ln|t|]_x^{2x}$$
$$\Rightarrow \left[\ln(t) - \frac{t^2}{2}\right]_x^{2x} \leq f(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x} \; ; \; car \; t>0$$
$$\Rightarrow \left(\ln(2x) - \frac{4x^2}{2}\right) - \left(\ln(x) - \frac{x^2}{2}\right) \leq f(x) \leq \ln(2x) - \ln x$$
$$\Rightarrow \left(\ln\left(\frac{2x}{x}\right) - \frac{3x^2}{2}\right) \leq f(x) \leq \ln\left(\frac{2x}{x}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\ln 2 - \frac{3x^2}{2}\right) \leq f(x) \leq \ln 2$$

التمرين الرابع 1 د

لدراسة اتصال الدالة f على يمين 0 نحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$x>0 \Rightarrow \ln 2 - \frac{3}{2}x^2 \leq f(x) \leq \ln 2$$
$$\Rightarrow \underbrace{\left(\ln 2 - \frac{3}{2}x^2\right)}_{x \to 0^+ \;\to\; \ln 2} \leq f(x) \leq \underbrace{(\ln 2)}_{x \to 0^+ \;\to\; \ln 2}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln 2 = f(0)$$
$$\Rightarrow f \; est \; continue \; à \; droite \; en \; 0$$

لدراسة اشتقاق الدالة f على يمين الصفر 0 نحسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$

ليكن t و x عددان حقيقيان موجبان قطعا .

$$x>0 \Rightarrow \ln 2 - \frac{3x^2}{2} \leq f(x) \leq \ln 2$$
$$\Rightarrow \frac{-3x^2}{2} \leq f(x) - \ln 2 \leq 0$$
$$\Rightarrow \frac{-3x}{2} \leq \frac{f(x)-\ln 2}{x} \leq 0 \; ; \; x>0$$
$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{-3x}{2}\right)}_{x\to 0^+ \;\to\; 0} \leq \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) \leq \underbrace{0}_{x\to 0^+ \;\to\; 0}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 0 = f'_d(0)$$
$$\Rightarrow f \; est \; dérivable \; à \; droite \; en \; 0$$

التمرين الرابع 2 أ

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من المجال I . فإن f تقبل عدة دوال أصلية على المجال I . و بالخصوص f تقبل دالة أصلية F التي تنعدم في a و تحقق ما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} F \; : \; I \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longrightarrow \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}} \quad \text{و} \quad \boxed{\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}}$$

في هذا التمرين، ليكن a عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

نعتبر الدالة العددية u المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\boxed{u(t) = \frac{e^{-t^2}}{t} \; ; \; \forall t>0}$$

نلاحظ أن الدالة u معرفة و متصلة على المجال $]0,+\infty[$ لأنها خارج دالتين متصلتين على المجال $]0,+\infty[$ و $t \neq 0$.

إذن حسب التذكير : u تقبل عدة دوال أصلية على المجال $]0,+\infty[$.

و بالخصوص u تقبل دالة أصلية v على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في a و تحقق ما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} v \; : \;]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \quad x \longrightarrow \displaystyle\int_a^x u(t)\,dt \end{array}} \quad \text{و} \quad \boxed{\begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases}}$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة f نكتب :

$$f(x) = \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-t^2}}{t}\right)dt$$
$$= \int_x^{a}\left(\frac{e^{-t^2}}{t}\right)dt + \int_a^{2x}\left(\frac{e^{-t^2}}{t}\right)dt$$
$$= -\int_a^{x}\left(\frac{e^{-t^2}}{t}\right)dt + \int_a^{2x}\left(\frac{e^{-t^2}}{t}\right)dt$$
$$= -v(x) + v(2x)$$

نحصل إذن على العلاقة التالية : $(\forall x>0) \; ; \; f(x) = v(2x) - v(x)$

نلاحظ أن الدوال $x \longrightarrow x$ و $x \longrightarrow 2x$ و v دوال معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

إذن الدالة $x \longrightarrow v(2x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مُركب دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و منه f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ باعتبارها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

و لدينا : $(\forall\, x>0)\ ;\ f(x) = \left(v(2x)-v(x)\right)'$

$$= 2\,v'(2x) - v'(x)$$
$$= 2\,u(2x) - u(x)$$
$$= 2\left(\frac{e^{-(2x)^2}}{2x}\right) - \frac{e^{-x^2}}{x}$$
$$= \frac{e^{-4x^2}}{x} - \frac{e^{-x^2}}{x}$$
$$= \frac{e^{-4x^2}}{x}\left(1-e^{3x^2}\right)$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall\, x>0)\ ;\ f'(x) = \dfrac{e^{-4x^2}}{x}\left(1-e^{3x^2}\right)}$

التمرين الرابع ب 2

لدينا : $(\forall\, x>0)\ ;\ f'(x) = \dfrac{e^{-4x^2}}{x}\left(1-e^{3x^2}\right)$

نلاحظ أن : $(\forall\, x>0)\ ;\ f'(x) = \dfrac{e^{-4x^2}}{x} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة الكمية $\left(1-e^{3x^2}\right)$.

و لدينا كذلك : $x>0 \Rightarrow 3x^2>0$

$$\Rightarrow e^{3x^2} > 1$$
$$\Rightarrow 1-e^{3x^2} < 0$$
$$\Rightarrow \frac{e^{-4x^2}}{x}\left(1-e^{3x^2}\right) < 0$$
$$\Rightarrow f'(x) < 0\ ;\ x>0$$
$$\Rightarrow f \ est\ \searrow\ sur\ ]0,+\infty[$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$
f	$\ln 2$	$\searrow\ 0$

التمرين الرابع أ 3

من خلال جدول تغيرات الدالة f .

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

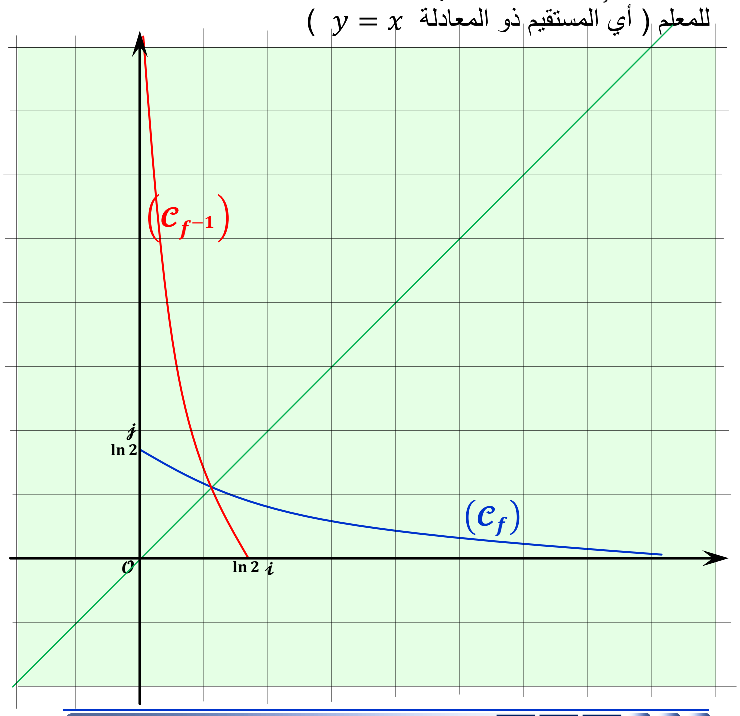
إذن f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $f(]0,+\infty[)$.

و لدينا : $f(]0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ;\ f(0)\right[=]0\,;\ln 2[$

إذن f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $]0,\ln 2[$.

التمرين الرابع ب 3

لرسم $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ نرسم أولا $(\mathcal{C}_f)$ ثم نرسم مماثله بالنسبة للمُنَصِّف الأول للمعلم (أي المستقيم ذو المعادلة $y=x$)



التمرين الخامس أ 1

ليكن ai عددا تخيليا صرفا حيث $a\in\mathbb{R}^*$.

$ai\ est\ solution\ de\ (E)$

$$\Leftrightarrow (ai)^3-(4+i)(ai)^2+(13+4i)(ai)-13i=0$$
$$\Leftrightarrow -a^3i+a^2(4+i)+13\,ai-4a-13i=0$$
$$\Leftrightarrow (4a^2-4a)+(a^2-a^3+13a-13)i=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}4a^2-4a=0\\ a^2-a^3+13a-13=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}4a(a-1)=0\\ a^2-a^3+13a-13=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\ ;\ car\ a\neq 0\\ a^2-a^3+13a-13=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a=1}$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا و هو العدد i .

التمرين الخامس ب 1

في البداية ننجز القسمة الأقليدية للحدودية $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i$ على الحدودية $(z-i)$ كما يلي :

$$\begin{array}{l|l}
z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i & z-i \\ \cline{2-2}
\underline{z^3-i\,z^2} & z^2-4z+13 \\
\quad -4z^2+(13+4i)z-13i & \\
\quad \underline{-4z^2+4iz} & \\
\qquad\quad 13z-13i & \\
\qquad\quad \underline{13z-13i} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

إذن من هذه القسمة الأقليدية نستنتج أن :

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(z^2-4z+13)$$

و بذلك المعادلة (E) تُصبح : $(E)\ :\ \ (z-i)(z^2-4z+13)=0$

$\Leftrightarrow\ (z-i)=0$ أو $(z^2-4z+13)=0$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+13=0$.

لدينا $\Delta=(6i)^2$ إذن المعادلة $z^2-4z+13=0$ تقبل حلين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي : $\begin{cases}z_1=2+3i\\ z_2=2-3i\end{cases}$

التمرين الخامس — 1 ج

لتكن F مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $(z_1 - z_0)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

يعني :
$$F = \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ (z_1 - z_0)^n \in \mathbb{R}^- \}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ (2+3i-i)^n \in \mathbb{R}^- \}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ (2+2i)^n \in \mathbb{R}^- \}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ 2^n(1+i)^n \in \mathbb{R}^- \}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ (1+i)^n \in \mathbb{R}^- \}$$
$$= \left\{ n \in \mathbb{N} \ ; \ \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \in \mathbb{R}^- \right\}$$
$$= \left\{ n \in \mathbb{N} \ ; \ \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n \in \mathbb{R}^- \right\}$$
$$= \left\{ n \in \mathbb{N} \ ; \ e^{\frac{in\pi}{4}} \in \mathbb{R}^- \right\}$$
$$= \left\{ n \in \mathbb{N} \ ; \ \frac{n\pi}{4} \equiv \pi \ [2\pi] \right\}$$
$$= \left\{ n \in \mathbb{N} \ ; \ \frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{N} \right\}$$
$$= \{ n \in \mathbb{N} \ ; \ n = (4+8k) \ ; \ k \in \mathbb{N} \}$$
$$= \{ 4+8k \ ; \ k \in \mathbb{N} \}$$

إذن : $\boxed{F = \{ 4+8k \ ; \ k\in\mathbb{N} \}}$

أو بتعبير آخر : $\boxed{(\forall k\in\mathbb{N}) \ ; \ (z_1 - z_0)^{4+8k} \in \mathbb{R}^-}$.

التمرين الخامس — 2 أ

لدينا r هو الدوران المعرف بما يلي :

$$r_B\left(\frac{\pi}{4}\right) : (\mathcal{P}) \longrightarrow (\mathcal{P})$$
$$M(z) \longrightarrow M'(z')$$

$$r(A) = A' \iff (z_{A'} - z_B) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_A - z_B)$$
$$\iff z_{A'} - (2+3i) = e^{\frac{i\pi}{2}}(i - 2 - 3i)$$
$$\iff z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-2-2i) + (2+3i)$$
$$\iff z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-2)(1+i)^2 + 2 + 3i$$
$$\iff z_{A'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-2)(2i) + 2 + 3i$$
$$\iff z_{A'} = -2\sqrt{2}\,i + 2 + 3i$$
$$\iff z_{A'} = 2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)i$$

التمرين الخامس — 2 ب

لدينا :
$$\frac{z_{A'} - z_B}{z_{A'} - z_C} = \frac{2+3i-2\sqrt{2}\,i-2-3i}{2+3i-2\sqrt{2}\,i-2+3i}$$
$$= \frac{-2\sqrt{2}\,i}{6i - 2\sqrt{2}\,i} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-6} = k \in \mathbb{R}$$

إذن : $\boxed{\frac{z_{A'} - z_B}{z_{A'} - z_C} = k}$

يعني : $(z_{A'} - z_B) = k(z_{A'} - z_C)$

أي باستعمال الترجمة المتجهية نكتب : $\overrightarrow{BA'} = k\,\overrightarrow{CA'}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

و هذا يعني أن النقط B و A' و C نقط مستقيمية .

التمرين الخامس — 2 ج

ليكن h التحاكي الذي مركزه B و يُحول C إلى A' .

و ليكن t نسبة هذا التحاكي . $h(C) = A' \iff \overrightarrow{BA'} = t\,\overrightarrow{BC}$

$$\iff (z_{A'} - z_B) = t\,(z_C - z_B)$$
$$\iff (2+3i-2\sqrt{2}\,i-2-3i) = t\,(2-3i-2-3i)$$
$$\iff -2\sqrt{2}\,i = -6t\,i$$
$$\iff t = \frac{-2\sqrt{2}\,i}{-6i} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

بعد إيجادنا لنسبة هذا التحاكي نبحث إذن عن صيغته العقدية كما يلي :

نعتبر النقطتين $M(z)$ و $M'(z')$.

$$h(M) = M' \iff \overrightarrow{BM'} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\overrightarrow{BM}$$
$$\iff z_{M'} - 2 - 3i = \frac{\sqrt{2}}{3}(z_M - 2 - 3i)$$
$$\iff z' - 2 - 3i = \frac{\sqrt{2}}{3}(z - 2 - 3i)$$
$$\iff z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2}\,i + 2 + 3i$$
$$\iff z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z + \left(3 - \sqrt{2}\right)i + 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

و بالتالي h تحاكي مُعرف بما يلي :

$$h_B\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) : (\mathcal{P}) \longrightarrow (\mathcal{P})$$
$$M(z) \longrightarrow M'\left(\frac{\sqrt{2}}{3}z + \left(3-\sqrt{2}\right)i + 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

التمرين الخامس — 2 د

لدينا $r(A) = A'$ و $h(C) = A'$ إذن : $r(A) = h(C)$.

نُدخل التطبيق h^{-1} نجد : $h^{-1}\big(r(A)\big) = h^{-1}\big(h(C)\big)$

يعني : $(h^{-1} \circ r)(A) = C$.

إذن $h^{-1} \circ r$ تطبيق في المستوى العقدي. و يُحوِّل النقطة A إلى النقطة C .

و لدينا : $z_A = i$ و $z_C = 2 - 3i$.

يعني أن : $z_C = 2 - 3\,z_A$.

و بالتالي التطبيق $h^{-1} \circ r$ معرف بما يلي :

$$h^{-1} \circ r : (\mathcal{P}) \longrightarrow (\mathcal{P})$$
$$M(z) \longrightarrow M'(2 - 3z)$$

أجوبة امتحان مدينة كلميم 2010

التمرين الأول 1

تكون المجموعة M غير فارغة إذا تمكنا من رصد عنصر واحد على الأقل في المجموعة M ، و في حالتنا هذه الأمر سهل جدا لأن كل قيمة لـ n تعطينا مصفوفة A_n من الرتبة 3.

و بذلك إذا كان $n=0$ نحصل على $A_1=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

في بعض الأحيان و في بعض المجموعات نجد عادة صعوبة في تحديد عنصر واحد على الأقل ينتمي إلى المجموعة المدروسة .

التمرين الأول 2

تكون المجموعة M جزءا مستقرا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});\times)$ إذا كانت M مجموعة غير فارغة و تُحقق ما يلي :

$$\boxed{\forall\,(A_n\,,A_m)\in M^2\;;\;A_n\times A_M\in M}$$

لتكن A_m و A_n مصفوفتين من M حيث m و n عددان نسبيان .

لدينا :

$$\begin{aligned}A_m\times A_n&=\begin{pmatrix}2^m&0&2^m\\0&1&0\\2^m&0&2^m\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2^n&0&2^n\\0&1&0\\2^n&0&2^n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^m\times2^n+2^m\times2^n&0&2^m\times2^n+2^m\times2^n\\0&1&0\\2^m\times2^n+2^m\times2^n&0&2^m\times2^n+2^m\times2^n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\times2^{m+n}&0&2\times2^{m+n}\\0&1&0\\2\times2^{m+n}&0&2\times2^{m+n}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2^{m+n+1}&0&2^{m+n+1}\\0&1&0\\2^{m+n+1}&0&2^{m+n+1}\end{pmatrix}=A_{m+n+1}\in M\end{aligned}$$

لأن : $(m,n)\in\mathbb{Z}^2\;\Longrightarrow\;(m+n+1)\in\mathbb{Z}$

إذن : $\forall\,(A_m\,,A_n)\in M^2\;;\;A_m\times A_n\in M$

و بالتالي M جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول 3

نعلم أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية

وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و صفرها $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

إذن $\times$ تبادلي في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

و لدينا M جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

إذن $\times$ قانون تركيب داخلي في M .

و منه $\times$ تبادلي كذلك في M . لأن $M\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

التمرين الأول 5

سوف نستعمل تجميعية القانون $\times$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

أو بالأخص تجميعية القانون $\times$ في M لأن $M\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

و سوف نستعمل كذلك النتيجة التالية : $A_m\times A_n=A_{m+n+1}$.

$$\begin{aligned}(A_2)^3&=A_2\times A_2\times A_2=(A_2\times A_2)\times A_2\\&=A_{2+2+1}\times A_2=A_5\times A_2\\&=A_{5+2+1}=A_8\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(A_2)^3=A_8}$

التمرين الأول 5

ليكن m و n عددان صحيحان طبيعيان.

سوف نستعمل في هذا السؤال تجميعية القانون $\times$ في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

و بالأخص تجميعية القانون $\times$ في M لأن $M\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

و سوف نستعمل كذلك النتيجة التالية : $A_m\times A_n=A_{m+n+1}$

لدينا :

$$\begin{aligned}(A_m)^n&=\overbrace{(A_m\times A_m)\times A_m\times\cdots\times A_m}^{n\,fois}\\&=A_{2m+1}\times\overbrace{A_m\times\cdots\times A_m}^{(n-2)\,fois}\\&=A_{3m+2}\times\overbrace{A_m\times\cdots\times A_m}^{(n-3)\,fois}\\&=A_{4m+3}\times\overbrace{A_m\times\cdots\times A_m}^{(n-4)\,fois}\\&=A_{(n-1)m+(n-2)}\times A_m\\&=A_{(n-1)m+(n-2)+m+1}\\&=A_{mn+n-1}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\forall\,(m,n)\in\mathbb{N}^2\;;\;(A_m)^n=A_{mn+n-1}$

و نستنتج من ذلك أن : $(A_2)^3=A_{2\times3+3-1}=A_8$

التمرين الثاني 1

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي (P) .

$$\begin{aligned}M \text{ صامدة بالدالة } f&\iff f(M)=M\\&\iff z=\frac{z-a}{z-1}\\&\iff z(z-1)=z-a\\&\iff z^2-2z+a=0\end{aligned}$$

التمرين الثاني 2

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(G)\;:\;z^2-2z+\left(1+e^{i\theta}\right)$

بحيث: $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta=(-2)^2-4\left(1+e^{i\theta}\right)&=4\left(1-\left(1+e^{i\theta}\right)\right)\\&=-4\,e^{i\theta}=\left(2i\,e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^2\end{aligned}$$

إذن G تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 معرفين بما يلي :

$$\boxed{\begin{aligned}z_1&=\frac{2-2i\,e^{\frac{i\theta}{2}}}{2}=1-i\,e^{\frac{i\theta}{2}}\\z_2&=\frac{2+2i\,e^{\frac{i\theta}{2}}}{2}=1+i\,e^{\frac{i\theta}{2}}\end{aligned}}$$

و لكي نكتب z_1 و z_2 على شكليهما المثلثي نستعين بالقاعدة التالية :

$$\boxed{e^{ix}+e^{iy}=2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\,e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$$

التي يجب التذكير بها أولا ثم تطبيقها .

إذن :

$$\begin{aligned}z_1=1-i\,e^{\frac{i\theta}{2}}&=e^{i0}+e^{\frac{-i\pi}{2}}e^{\frac{i\theta}{2}}=e^{i0}+e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\\&=2\cos\left(\frac{0-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)\,e^{i\left(\frac{0+\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)}\\&=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)\,e^{i\left(\frac{\theta}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}\\&=\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)\,,\left(\frac{\theta}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\end{aligned}$$

و كذلك : $z_2 = 1 + i\, e^{\frac{i\theta}{2}} = e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}} = e^{i0} + e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$= 2\cos\left(\frac{0-\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right) e^{i\left(\frac{0+\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)}$$
$$= 2\cos\left(-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right)\right) e^{i\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= 2\cos\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}\right) , \left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

التمرين الثاني 3 أ

لدينا : $M' = f(M) \iff z' = \dfrac{z+1}{z-1}$

$$\iff z'-1 = \frac{z+1}{z-1} - 1$$
$$\iff z'-1 = \frac{z+1-(z-1)}{z-1}$$
$$\iff z'-1 = \frac{2}{z-1}$$
$$\Rightarrow \arg(z'-1) \equiv \arg\left(\frac{2}{z-1}\right) [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg(z'-1) \equiv \arg(2) - \arg(z-1) \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg(z'-1) \equiv 0 - \arg(z-1) \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg(z'-1) \equiv -\arg(z-1) \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg(z'-1) + \arg(z-1) \equiv 0 \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z'-1}{1-0}\right) + \arg\left(\frac{z-1}{1-0}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'}-z_B}{z_{\vec{e_1}}-z_O}\right) + \arg\left(\frac{z_M-z_B}{z_{\vec{e_1}}-z_O}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \overline{(\vec{e_1}, \overrightarrow{BM'})} + \overline{(\vec{e_1}, \overrightarrow{BM})} \equiv 0 \ [2\pi]$$

التمرين الثاني 3 ب

لنبين التكافؤ التالي : $(z' \in i\mathbb{R}) \iff |z| = 1$

نطلق من الطرف الأيسر و نحاول إيجاد الطرف الأيمن .

$$z' \in i\mathbb{R} \iff z' = iy \ ; \ y \in \mathbb{R}$$
$$\iff \frac{z+1}{z-1} = iy$$
$$\iff iy(z-1) = z+1$$
$$\iff iyz - iy = z+1$$
$$\iff z(iy-1) = 1+iy$$
$$\iff z = \frac{iy+1}{iy-1} \ ; \ y \in \mathbb{R}$$
$$\iff z = \frac{iy+1}{iy-1} \times \frac{iy+1}{iy+1}$$
$$\iff z = \frac{(iy+1)^2}{-y^2-1} = \left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right) - i\left(\frac{2y}{y^2+1}\right)$$
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2y}{y^2+1}\right)^2}$$
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{y^4-2y^2+1+4y^2}{(y^2+1)^2}}$$
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{y^2+1}{y^2+1}\right)^2} = 1$$

لم نتمكن من إتمام هذا البرهان بالتكافؤات و لقد حصلنا فقط على الإستلزام التالي : $\boxed{z' \in i\mathbb{R} \Rightarrow |z| = 1}$

عكسيا : لنبين الاستلزام : $|z| = 1 \Rightarrow z' \in i\mathbb{R}$

نفترض أن $|z| = 1$ و سوف نستعمل أثناء الحساب الأشياء التالية .

$$\begin{cases} e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ 1 = e^{i0} = e^{2i\pi} \\ -1 = e^{-i\pi} = e^{i\pi} \end{cases}$$

$$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta} \ ; \ \theta \neq 0$$
$$\Rightarrow z' = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} \ ; \ \theta \neq 0$$
$$= \frac{e^{i\theta}+e^{i0}}{e^{i\theta}+e^{-i\pi}} \ ; \ \theta \neq 0$$
$$= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{\frac{i\theta}{2}}}{2\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}} \ ; \ \theta \neq 0$$
$$= \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} \ ; \ \theta \neq 0$$
$$= \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}\right) e^{\frac{i\pi}{2}} \ ; \ \theta \neq 0$$
$$= \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}\right) i \ ; \ avec \ \left(\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \boxed{z' \in i\mathbb{R}}$$

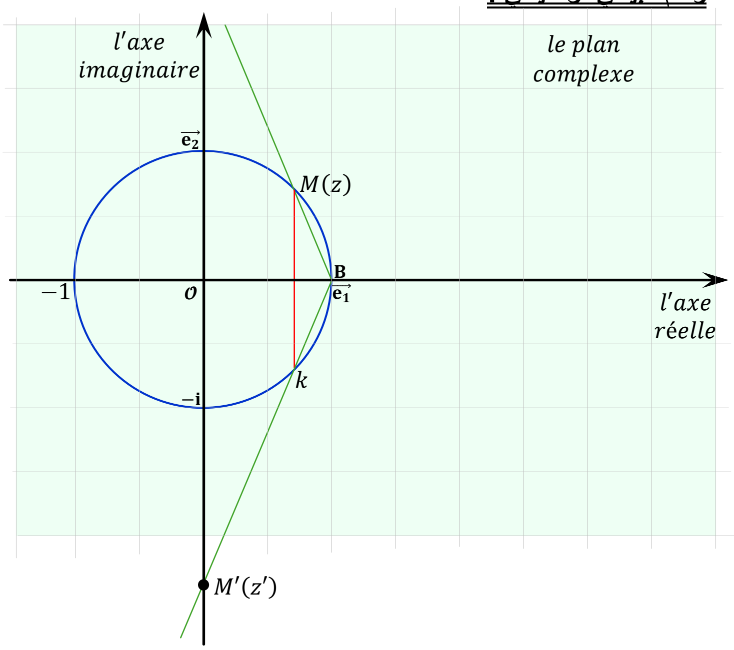
الخلاصة : $\boxed{z' \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1}$

التمرين الثاني 3 ج

طريقة إنشاء M' صورة نقطة M من الدائرة المثلثية حيث $M \neq B$.

1) ننطلق من النقطة M كمعطى بدئي حيث M تنتمي إلى الدائرة المثلثية و $M \neq B$
2) B نقطة من المحور الحقيقي معلومة و لحقها هو $z_B = 1$.
3) نرسم المستقيم (Δ) المار من M و العمودي على المحور الحقيقي
4) (Δ) يقطع الدائرة المثلثية في نقطة نسميها K .
5) المستقيم (BK) يقطع المحور التخيلي في نقطة M' و هي صورة النقطة M بالتحويل f .

رسم مبياني توضيحي :



تعليل الطريقة :

أولا هذه الطريقة تصلح فقط لرسم صور نقط الدائرة المثلثية المحرومة من النقطة B . لأن : $\binom{le\ cercle}{unité} = \{M(z)\ \epsilon\ (\mathcal{P})\ ;\ |z|=1\}$

و كذلك لأنه حسب تكافؤ السؤال 3) ب) لدينا : $|z|=1 \iff z'\ \epsilon\ i\mathbb{R}$

و من هذا التكافؤ نستنتج أنه إذا كانت M نقطة من الدائرة المثلثية المحرومة من B فإن صورتها M' تنتمي إلى المحور التخيلي لأن $z'\ \epsilon\ i\mathbb{R}$

يكفي الآن تحديد موقع النقطة M' على المحور التخيلي و سوف نستعمل من أجل ذلك النتيجة التالية : $\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM}\right) + \left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM'}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

يعني : $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM'}}\right)\ [2\pi]$

يعني في الشكل لدينا : $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM'}}\right)$

و تتحقق هذه النتيجة إذا كانت صورة الزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BM}}\right)$

بالتماثل المحوري (ذو المحور الحقيقي) هي الزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{BK}}\right)$.

النقطة M' تحقق إذن الشرطين التاليين : $\left\{\begin{array}{l} M' \text{ تنتمي إلى المحور التخيلي} \\ M' \text{ تنتمي إلى المستقيم } (BK) \end{array}\right.$

إذن M' هي نقطة تقاطع المستقيم (BK) و المحور التخيلي .

التمرين الثالث 1 أ

ليكن a عددا صحيحا نسبيا . و نَفصِلُ بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $a \equiv 0\ [3]$.

فإن : $a^2 \equiv 0\ [3]\quad (triviale)$

الحالة الثانية : إذا كان $a \not\equiv 0\ [3]$.

إذن : $(\exists r\ \epsilon\ \mathbb{Z}^*), (|r|<3)\ ;\ a \equiv r\ [3]$.

يعني : $\exists\ r\ \epsilon\ \{-2;-1;1;2\}\ ;\ a \equiv r\ [3]$.

إذا كان $a \equiv \pm 2\ [3]$ فإن $a^2 \equiv 4\ [3]$.

و لدينا : $4 \equiv 1\ [3]$ إذن $a^2 \equiv 1\ [3]$.

إذا كان : $a \equiv \pm 1\ [3]$ فإن $a^2 \equiv 1\ [3]$.

نستنتج إذن ما يلي : $\boxed{(\forall a \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ \left\{\begin{array}{l} a^2 \equiv 0\ [3] \\ ou\ bien \\ a^2 \equiv 1\ [3] \end{array}\right.}$

التمرين الثالث 1 ب

ليكن a و b عددين نسبيين . و نفصل بين أربع حالات و ذلك انطلاقا من نتيجة السؤال 4) :

الحالة الأولى : إذا كان $a^2 \equiv 0\ [3]$ و $b^2 \equiv 0\ [3]$.

إذن : $(a^2+b^2) \equiv 0\ [3]$

الحالة الثانية : إذا كان $a^2 \equiv 0\ [3]$ و $b^2 \equiv 1\ [3]$.

إذن : $(a^2+b^2) \equiv 1\ [3]$.

الحالة الثالثة : إذا كان $a^2 \equiv 1\ [3]$ و $b^2 \equiv 1\ [3]$.

إذن : $a^2+b^2 \equiv 2\ [3]$.

الحالة الرابعة : إذا كان $a^2 \equiv 1\ [3]$ و $b^2 \equiv 0\ [3]$.

فإن : $(a^2+b^2) \equiv 1\ [3]$.

من خلال هذه الحالات الأربع نلاحظ أنه للحصول على النتيجة $(a^2+b^2) \equiv 0\ [3]$ توجد حالة واحدة يتحقق فيها مُرادنا و هي الحالة التي يكون فيها $a^2 \equiv 0\ [3]$ و $b^2 \equiv 0\ [3]$.

و في هذه الحالة نجد أن a و b مضاعفان للعدد 3 .

يعني : $a \equiv 0\ [3]$ و $b \equiv 0\ [3]$. و منه : $a \equiv b \equiv 0\ [3]$.

و بالتالي نحصل على الاستلزام التالي :

$$\boxed{(a^2+b^2) \equiv 0\ [3] \implies a \equiv b \equiv 0\ [3]}$$

التمرين الثالث 2 أ

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد صحيحة نسبية حيث $x^2+y^2 = 3z^2$.

نلاحظ في البداية أن : $3 \equiv 0\ [3]$.

إذن : $(\forall z \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ 3z^2 \equiv 0\ [3]$.

و منه : $(x^2+y^2) \equiv 0\ [3]$.

و منه حسب نتيجة السؤال 1) ب) نستنتج أن : $x \equiv y \equiv 0\ [3]$.

يعني : $x \equiv 0\ [3]$ و $y \equiv 0\ [3]$.

أي : $x = 3k$ و $y = 3k'$ و $(k,k')\ \epsilon\ \mathbb{Z}^2$.

يعني : $(x^2+y^2) = 9(k^2+k'^2)$.

يعني أن 9 قاسم للعدد (x^2+y^2) .

و منه : $x^2+y^2 \equiv 0\ [9]$.

يعني : $3\,z^2 \equiv 0\ [9]$.

التمرين الثالث 2 ب

لدينا : $3\,z^2 \equiv 0\ [9]$. إذن يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث $3z^2 = 9k$.

و منه : $z^2 = 3k$. أي 3 قاسم للعدد z^2 . أي : $z^2 \equiv 0\ [3]$

و منه حسب ما سبق : $z \equiv 0\ [3]$.

لقد حصلنا لحد الآن على ما يلي : $x \equiv y \equiv 0\ [3]$ و $z \equiv 0\ [3]$

إذن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0\ [3]$.

التمرين الثالث 3 أ

ليكن m عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . و نفصل بين 3 حالات :

الحالة الأولى : إذا كان $m \equiv 0\ [3]$.

فإن : $m^2 \equiv 0\ [3]$. و منه : $(m^2-1) \equiv -1\ [3]$.

إذن عند المرور إلى الجداء نحصل على : $m^2(m^2-1) \equiv 0\ [3]$.

الحالة الثانية : إذا كان $m \equiv 1\ [3]$.

فإن : $m^2 \equiv 1\ [3]$. و منه : $(m^2-1) \equiv 0\ [3]$.

إذن عند المرور إلى الجداء نحصل على : $m^2(m^2-1) \equiv 0\ [3]$.

الحالة الثالثة : إذا كان $m \equiv 2\ [3]$.

فإن : $m^2 \equiv 4\ [3]$. و منه : $(m^2-1) \equiv 3\ [3]$.

إذن عند المرور إلى الجداء نحصل على : $m^2(m^2-1) \equiv 12\ [3]$.

و نعلم أن : $12 \equiv 0\ [3]$.

إذن : $m^2(m^2-1) \equiv 0\ [3]$.

خلاصة : $\boxed{(\forall m \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ a_m \equiv 0[3]}$.

التمرين الثالث 3 ب

نعلم أن كل عددين صحيحين نسبيين متتابعين يكون جداؤهما زوجيا دائما لأن أحدهما فردي و الآخر زوجي .

لدينا $(m-1)$ و m عددان متتابعان .

إذن $m(m-1)$ عدد زوجي .

يعني : $(\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ m(m-1) = 2k$.

و لدينا كذلك m و $(m+1)$ عددان متتابعان .

إذن $m(m+1)$ عدد زوجي .

يعني : $(\exists k' \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ m(m+1) = 2k'$.

و بالتالي : $m(m-1)m(m+1) = 4kk'$.

يعني : $m^2(m^2-1) = 4kk'$.

و منه 4 قاسم للعدد $m^2(m^2-1)$.

و بالتالي : $m^2(m^2-1) \equiv 0\ [4]$.

أي : $a_m \equiv 0\ [4]$.

التمرين الثالث 3 ج

تذكير بخاصية مهمة في الحسابيات $\boxed{\left\{\begin{array}{l} a/m \\ b/m \\ a \wedge b = 1 \end{array}\right. \implies (ab)/m}$

لدينا حسب ما سبق : $\left\{\begin{array}{l} a_m \equiv 0\ [3] \\ a_m \equiv 0\ [4] \\ 3 \wedge 4 = 1 \end{array}\right.$. إذن : $\left\{\begin{array}{l} 3/a_m \\ 4/a_m \\ 3 \wedge 4 = 1 \end{array}\right.$

إذن حسب الخاصية المذكورة نستنتج أن : $(3 \times 4)/a_m$

يعني أن 12 يقسم a_m و بالتالي : $\boxed{(\forall m \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ a_m \equiv 0\ [12]}$

التمرين الرابع I 1

$$\lim_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim_{x\to+\infty} (2m\,e^x - e^{2x} - 2m)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(\frac{2m}{e^x} - 1 - \frac{2m}{e^{2x}}\right)$$
$$= (+\infty)(0-1-0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2m\,e^x - e^{2x} - 2m}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{2m}{x} - \frac{e^x}{x} - \frac{2m}{e^x}\right)$$
$$= (+\infty)(0-(+\infty)-0)$$
$$= (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim_{x\to-\infty} (2m\,e^x - e^{2x} - 2m)$$
$$= 2m(0) - 0 - 2m = -2m$$

التمرين الرابع I 2

ليكن m و m' عددان حقيقيان بحيث $m < m'$.

لدينا : $f_m(x) - f_{m'}(x)$

$$= (2me^x - e^{2x} - 2m) - (2m'e^x - e^{2x} - 2m')$$
$$= 2e^x(m-m') - 2(m-m')$$
$$= (2e^x - 2)(m-m')$$

لدينا $m < m'$ إذن $(m-m')$ كمية سالبة قطعا .

إذن إشارة $f_m(x) - f_{m'}(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(2e^x - 2)$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. و نَفصِل بين حالتين :

الحالة الأولى : إذا كان $x \geq 0$.

$$x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1$$
$$\Rightarrow 2e^x \geq 2$$
$$\Rightarrow 2e^x - 2 \geq 0$$
$$\Rightarrow (m-m')(2e^x-2) \leq 0$$
$$\Rightarrow f_m(x) - f_{m'}(x) \leq 0$$
$$\Rightarrow f_m(x) \leq f_{m'}(x)$$
$$\Rightarrow (\mathcal{C}_m) \text{ se situe au dessous de } (\mathcal{C}_{m'})$$

الحالة الثانية : إذا كان $x \leq 0$.

$$x \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 1$$
$$\Rightarrow 2e^x \leq 2$$
$$\Rightarrow 2e^x - 2 \leq 0$$
$$\Rightarrow (m-m')(2e^x-2) \geq 0$$
$$\Rightarrow f_m(x) - f_{m'}(x) \geq 0$$
$$\Rightarrow f_m(x) \geq f_{m'}(x)$$
$$\Rightarrow (\mathcal{C}_m) \text{ se situe au dessus de } (\mathcal{C}_{m'})$$

التمرين الرابع I 3

لكي نبين أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_m)_{m\in\mathbb{R}}$ تمر كلها من نقطة ثابتة ، ننطلق من منحنيين $(\mathcal{C}_m)$ و $(\mathcal{C}_{m'})$ من هذه المجموعة .

و لتكن $A(x_0, y_0)$ نقطة مشتركة بينهما .

إذن : $f_m(x_0) = y_0$ و $f_{m'}(x_0) = y_0$.

يعني أن : $f_m(x_0) = f_{m'}(x_0)$.

يعني : $2m\,e^{x_0} - e^{2x_0} - 2m = 2m'\,e^{x_0} - e^{2x_0} - 2m'$.

يعني : $2m\,e^{x_0} - 2m = 2m'\,e^{x_0} - 2m'$.

يعني : $(2m-2m')e^{x_0} = (2m-2m')$.

يعني : $e^{x_0} = \frac{2m-2m'}{2m-2m'} = 1$.

يعني : $\ln(e^{x_0}) = \ln 1 = 0$. يعني : $x_0 = 0$.

يعني : $f_{m'}(0) = f_m(0) = 2me^0 - e^0 - 2m$.

إذن المنحنيين $(\mathcal{C}_m)$ و $(\mathcal{C}_{m'})$ يمران معا من النقطة $A(0,-1)$.

و بالتالي : $\forall\, m \neq m' \; ; \; (\mathcal{C}_m) \cap (\mathcal{C}_{m'}) = A(0,-1)$.

يعني أن جميع المنحنيات $(\mathcal{C}_m)_{m\in\mathbb{R}}$ تتلاقى في نقطة واحدة : A .

التمرين الرابع I 4

ليكن m عددا حقيقيا سالبا . و ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث $x \leq y$

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} e^x \leq e^y \\ e^{2x} \leq e^{2y} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2m\,e^x \geq 2m\,e^y \; ; \; car\ \ m \leq 0 \\ -e^{2x} \geq -e^{2y} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2m\,e^x - 2m \geq 2m\,e^y - 2m \\ -e^{2x} \geq -e^{2y} \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2m\,e^x - e^{2x} - 2m \geq 2m\,e^y - e^{2y} - 2m$$
$$\Rightarrow f_m(x) \geq f_m(y)$$

حصلنا إذن على الاستلزام التالي : $\boxed{x \leq y \;\Rightarrow\; f_m(x) \geq f_m(y)}$

و هذا يعني أن الدالة f_m تناقصية في حالة $m \leq 0$.

التمرين الرابع I 5 أ

نفترض فيما يلي أن : $m > 0$.

لدينا : $f_m(x) = 2m\,e^x - e^{2x} - 2m$.

نلاحظ أن f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله ، لأنها عبارة عن مجموع دوال اعتيادية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. و لدينا :

$$f_m'(x) = 2m\,e^x - 2\,e^{2x} = 2e^x(m - e^x)$$

إذا كان : $x = \ln m$. فإن : $f_m'(x) = 0$.

إذا كان : $x > \ln m$. فإن : $f_m'(x) < 0$.

إذا كان : $x < \ln m$. فإن : $f_m'(x) > 0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_m كما يلي :

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$
$f_m'(x)$	$+$		$-$
f_m	$-2m$ ↗	β_m	↘ $-\infty$

نلاحظ أن $f_m'(x)$ تنعدم في $\ln m$ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن f_m تقبل مطرافا β_n عند النقطة $\alpha_m = \ln m$.

حيث $\beta_m = f_m(\alpha_m) = m^2 - 2m$.

التمرين الرابع I 5 ب

نضع :
$$(\Gamma) = \{I_m(\alpha_m, \beta_m) \; ; \; m > 0\}$$
$$= \{(\ln m \; ; \; m^2 - 2m) \; ; \; m > 0\}$$
$$= \{(\ln m \; ; \; e^{2\ln m} - 2e^{\ln m}) \; ; \; m > 0\}$$
$$= \{(x, y) \; ; \; y = e^{2x} - 2e^x \; , x\epsilon\mathbb{R}\}$$

أو بتعبير آخر ، لكي تكون (Γ) هي المنحنى الممثل للدالة g حيث $g(x) = e^x - 2e^x$ ، يكفي أن نتحقق من أن :

$$(\forall m > 0) \; ; \; g(\ln m) = e^{2\ln m} - 2e^{\ln m}$$

و بالفعل لدينا : $g(\ln m) = e^{2\ln m} - 2e^{\ln m} = m^2 - 2m$.

التمرين الرابع I 5 ج

ليكن x عددا حقيقيا
$$-2 - f_1(x) = -2 - (2e^x - e^{2x} - 2)$$
$$= -2 - 2e^x + e^{2x} + 2$$
$$= e^{2x} - 2e^x = g(x)$$

لدينا : $g(x) = -2 - f_1(x)$.

إذن : $g(x) - (-1) = -1 - f_1(x)$.

أي : $(g(x) + 1) = -(f_1(x) + 1)$.

و هذا يعني أن (Γ) و $(\mathcal{C}_1)$ متماثلان بالنسبة للمستقيم $(D) : y = -1$.

التمرين الرابع I 6

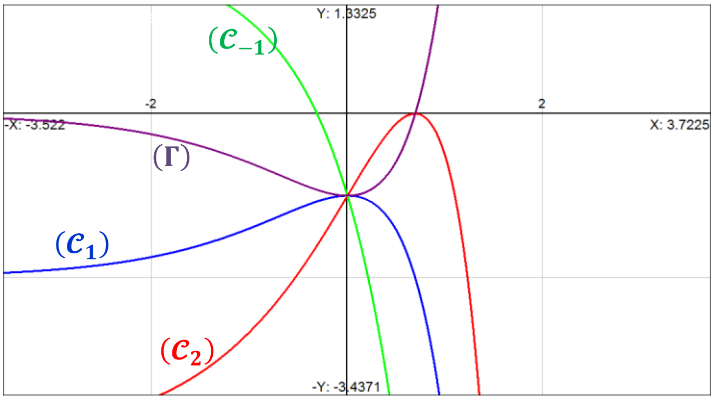
لتحديد نقط تقاطع $(\mathcal{C}_2)$ و (D) ، نحل المعادلة $f_2(x) = -1$.

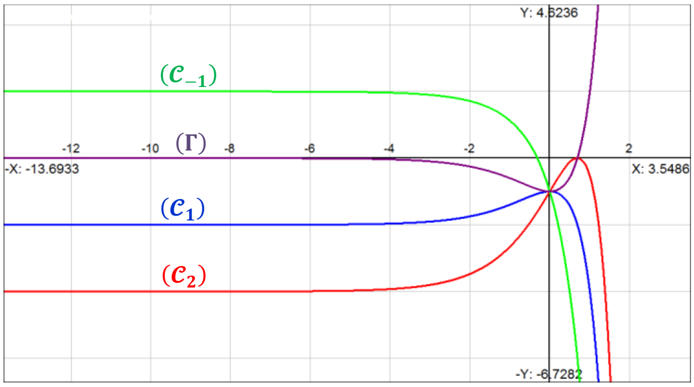
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 4e^x - e^{2x} - 4 = -1\\
&\Leftrightarrow\ 4e^x - e^{2x} - 3 = 0\\
&\Leftrightarrow\ e^{2x} - 4e^x + 3 = 0\\
&\Leftrightarrow\ y^2 - 4y + 3 = 0\ ;\ y = e^x\\
&\Leftrightarrow\ y_1 = 1\ et\ y_2 = 3\ avec\ \Delta = 4\\
&\Leftrightarrow\ y_1 = e^{x_1} = 1\ \ et\ \ y_2 = e^{x_2} = 3\\
&\Leftrightarrow\ x_1 = 0\ \ et\ \ x_2 = \ln 3
\end{aligned}$$

و لدينا $f_2(0) = -1$ و $f_2(\ln 3) = -1$.

إذن $(\mathcal{C}_2)$ و (D) يتقاطعان في : $(0,-1)$ و $(-1, \ln 3)$.

التمرين الرابع I 7





التمرين الرابع I 8

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_2)$ و (D) و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = 0$ و $x = \ln 3$.

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_0^{\ln 3} |f_2(x) + 1|\, dx \quad (unité)^2}$$

لدينا :

$$\begin{aligned}
f_2(x) + 1 &= 4e^x - e^{2x} - 3\\
&= -(e^{2x} - 4e^x + 3)\\
&= -(e^x - 1)(e^x - 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \le x \le \ln 3 &\Rightarrow\ x \ge 0\ \ et\ \ x \le \ln 3\\
&\Rightarrow\ e^x \ge 1\ \ et\ \ e^x \le 3\\
&\Rightarrow\ (e^x - 1) \ge 0\ \ \ et\ \ \ (e^x - 3) \le 0\\
&\Rightarrow\ -(e^x - 3)(e^x - 1) \ge 0\\
&\Rightarrow\ f_2(x) + 1 \ge 0\\
&\Rightarrow\ |f_2(x) + 1| = f_2(x) + 1
\end{aligned}$$

إذن بالرجوع إلى المساحة $\mathcal{A}$ تُكتبُ على شكل :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\ln 3} |f_2(x) + 1|\, dx \quad (unité)^2\\
&= \int_0^{\ln 3} (4e^x - e^{2x} - 3)\, dx \quad (unité)^2\\
&= 4\,[e^x]_0^{\ln 3} - \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 3} - 3\,[x]_0^{\ln 3}\\
&= 4(3-1) - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) - 3(\ln 3 - 0)\\
&= (8 - 4 - 3\ln 3)\ \ unité^2\\
&= (4 - 3\ln 3)\ \ (2\ cm)^2\\
&= (4 - 3\ln 3)\ \ (4cm^2)\\
&= (16 - 12\ln 3)\ \ cm^2
\end{aligned}$$

التمرين الرابع II 1

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . في البداية نلاحظ أن :

$$\begin{aligned}
g(x) + 1 &= e^{2x} - 2e^x + 1\\
&= (e^x - 1)^2 \ge 0
\end{aligned}$$

إذن : $g(x) + 1 \ge 0$; $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$.

و منه : $\boxed{(\forall x > 0)\ ;\ \dfrac{g(x)+1}{x} > 0}$ (1)

من جهة ثانية، لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله لأنها عبارة عن فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$. نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة g في أي مجال على شكل $[0, x]$ حيث $x > 0$.

g متصلة على $[0, x]$
g ق ش $]0, x[$ $\Rightarrow\ \exists\ c\ \epsilon\ ]0, x[\ ;\ \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(c)$

و منه :
$$\begin{cases} \dfrac{g(x) - (-1)}{x} = g'(c)\\ 0 < c < x \end{cases}$$

يعني :
$$\begin{cases} \dfrac{g(x) + 1}{x} = 2(e^{2c} - e^c) = 2e^c(e^c - 1)\\ 0 < c < x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
0 < c < x &\Rightarrow \begin{cases} 2e^c < 2e^x\\ (e^c - 1) < (e^x - 1) \end{cases}\\
&\Rightarrow\ 2e^c(e^c - 1) < 2e^x(e^x - 1)\\
&\Rightarrow\ g'(c) < g'(x)
\end{aligned}$$

و بالتالي : $\dfrac{g(x) + 1}{x} = g'(c) < g'(x)$

يعني : $\boxed{\dfrac{g(x) + 1}{x} < g'(x)}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x > 0)\ ;\ 0 < \frac{g(x) + 1}{x} < g'(x)}$$

التمرين الرابع II 2

نستنتج بكل بساطة من نتيجة السؤال 2) ما يلي : $\dfrac{g(x) + 1}{x} < g'(x)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعا x نحصل على :

$$\boxed{g(x) + 1 < x\, g'(x)}$$

إذن : $\boxed{(\forall x > 0)\ ;\ x\, g'(x) - g(x) > 1}$.

التمرين الرابع II 3

في البداية نلاحظ أن الدالة $x \longrightarrow \frac{g(x)}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ، لأنها عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$. و لدينا :

$$\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = \frac{x\, g'(x) - g(x)}{x^2} > 0$$

و ذلك لأن : $x^2 > 0 \;;\; (\forall x \in \mathbb{R}^*)$.

و كذلك لأن : $x\, g'(x) - g(x) > 1 \;;\; (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$.

و بالتالي : $x \longrightarrow \frac{g(x)}{x}$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

التمرين الرابع II 4 أ

سوف نستعمل في هذا السؤال 1) من الجزء الثاني :

$$t \geq 0 \;\Longrightarrow\; 0 < \frac{g(t)}{t} + \frac{1}{t} < g'(t)$$

$$\Longrightarrow \int_x^{2x} 0\, dt < \int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t} + \frac{1}{t}\right) dt < \int_x^{2x} g'(t)\, dt$$

car ces fonctions sont continues et $x < 2x$

$$\Longrightarrow 0 < G(x) + [\ln|t|]_x^{2x} < [g(t)]_x^{2x}$$

$$\Longrightarrow 0 < G(x) + \ln\left(\frac{2x}{x}\right) < g(2x) - g(x)$$

$$\Longrightarrow 0 < G(x) + \ln 2 < g(2x) - g(x)$$

التمرين الرابع II 4 ب

نحن الآن أمام الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{0}_{\substack{tend\ vers\ 0\\ lorsque\ \ x\\ tend\ vers\ 0\\ à\ droite}} < G(x) + \ln 2 < \underbrace{g(2x) - g(x)}_{\substack{tend\ vers\ 0\\ lorsque\ \ x\\ tend\ vers\ 0\\ à\ droite}}}$$

إذن : $\lim_{x \to 0^+} (G(x) + \ln 2) = 0$

يعني : $\lim_{x \to 0^+} G(x) = -\ln 2 = G(0)$

إذن G متصلة على اليمين في الصفر .

بنفس الطريقة لدينا : $0 < G(x) + \ln 2 < g(2x) - g(x)$

إذن بعد ضرب جميع الأطراف في العدد الموجب $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\boxed{0 < \frac{G(x) + \ln 2}{x} < \frac{g(2x)}{x} - \frac{g(x)}{x}}$$

يعني : $0 < \left(\frac{G(x) - G(0)}{x - 0}\right) < \left(\frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}\right)$

لنحسب النهاية : $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}\right)$

و من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على φ بما يلي :

$(\forall x \in \mathbb{R}) \;;\; \varphi(x) = e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x$

φ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكملها لأنها عبارة عن مجموع دوال اعتيادية كلها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

نستغل إذن قابلية اشتقاق الدالة φ على يمين الصفر نجد :

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}\right) \;;\; car\ \ \varphi(0) = 0$$

$$= \varphi'(x)_{/x=0} = (e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x)'_{/x=0}$$

$$= (4e^{4x} - 6e^{2x} + 2e^x)_{/x=0}$$

$$= 4e^0 - 6e^0 + 2e^0 = 0 = \varphi'(0)$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\underbrace{0}_{x \to 0^+ \,\to\, 0} < \left(\frac{G(x) - G(0)}{x - 0}\right) < \underbrace{\left(\frac{e^{4x} - 3e^{2x} + 2e^x}{x}\right)}_{x \to 0^+ \,\to\, 0}$$

نستنتج إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب أن :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{G(x) - G(0)}{x - 0}\right) = 0}$$

و هذا يعني أن G قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و العدد المشتق هو 0 .

التمرين الرابع II 5

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا و t عدد حقيقي من المجال $[x, 2x]$.

(t sera la variable muette pour l'intégration)

$$t \geq x \;\Longrightarrow\; \frac{g(t)}{t} \geq \frac{g(x)}{x} \;;\; car\ \ \frac{g(t)}{t}\ \ est\ \nearrow\ sur\ \mathbb{R}_+^*$$

$$\Longrightarrow \frac{g(t)}{t} \geq \frac{g(x)}{x} \geq \frac{g(x)}{t} \;;\; car\ \left(\frac{1}{x} \geq \frac{1}{t}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{g(t)}{t} \geq \frac{g(x)}{t}$$

$$\Longrightarrow \int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt \geq \int_x^{2x} \left(\frac{g(x)}{t}\right) dt$$

car ces fonctions sont continues et $x < 2x$

$$\Longrightarrow G(x) \geq g(x) \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$\Longrightarrow G(x) \geq g(x) [\ln|t|]_x^{2x}$$

$$\Longrightarrow G(x) \geq g(x) \cdot (\ln 2x - \ln x)$$

$$\Longrightarrow G(x) \geq g(x) \cdot \ln 2$$

$$\Longrightarrow G(x) \geq (e^{2x} - 2\, e^x) \ln 2$$

$$\Longrightarrow G(x) \geq \underbrace{e^x (e^{2x} - 2) \ln 2}_{x \to +\infty \,\to\, +\infty}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty}$$

و بنفس الطريقة لدينا : $G(x) \geq e^x (e^{2x} - 2) \ln 2$

$$\Longrightarrow \frac{G(x)}{x} \geq \underbrace{\left(\frac{e^x}{x}\right)(e^{2x} - 2) \ln 2}_{x \to +\infty \,\to\, +\infty} \;;\; x > 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty}$$

التمرين الرابع II 6

ليكن $a > 0$ و لتكن ψ الدالة العددية المعرفة على $[a, +\infty[$ بما يلي :

$$\boxed{\psi(x) = \frac{g(x)}{x}}$$

نلاحظ أن ψ متصلة على المجال $[a, +\infty[$ لأنها عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a, +\infty[$.

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من I .

فإن الدالة :

$$\boxed{\begin{array}{llll} F & : & I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x & \longrightarrow \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt \end{array}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I . و التي تحقق :

$$\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \;;\; (\forall x \in I) \end{cases}$$

لدينا ψ دالة متصلة على المجال $[a,+\infty[$. و لدينا كذلك $a \in [a,+\infty[$

إذن الدالة :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} J : [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \displaystyle\int_a^x \psi(t)\,dt \end{array}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة ψ على المجال $[a,+\infty[$.

و منه : $(\forall x \geq a)\ ;\ J'(x) = \psi(x)$. و $J(a) = 0$.

لدينا :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_x^{2x} \left(\frac{g(t)}{t}\right) dt = \int_x^{2x} \psi(t)\,dt \\ &= \int_x^{a} \psi(t)\,dt + \int_a^{2x} \psi(t)\,dt \\ &= \int_a^{2x} \psi(t)\,dt - \int_a^{x} \psi(t)\,dt \\ &= \boxed{J(2x) - J(x)} \end{aligned}$$

بما أن الدالتين J و $x \longrightarrow 2x$ قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.
فإن الدالة $x \longrightarrow J(2x) - J(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$
و ذلك حسب خاصية اشتقاق مُركب دالتين و مجموع دالتين .

إذن :

$$\begin{aligned} (\forall x > 0)\ ;\ G'(x) &= \big(J(2x) - J(x)\big)' \\ &= \big(J(2x)\big)' - J'(x) \\ &= 2\,J'(2x) - J'(x) \\ &= 2\,\psi(2x) - \psi(x) \\ &= \frac{2\,g(2x)}{2x} - \frac{g(x)}{x} = \frac{g(2x) - g(x)}{x} \end{aligned}$$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall x > 0)\ ;\ G'(x) = \frac{g(2x) - g(x)}{x}}$$

II 7 التمرين الرابع

لدينا :

$$\begin{aligned} (\forall x > 0)\ ;\ G'(x) &= \frac{g(2x) - g(x)}{x} \\ &= \frac{(e^{4x} - 2\,e^{2x}) - (e^{2x} - 2\,e^{x})}{x} \\ &= \frac{e^{4x} - 3\,e^{2x} + 2\,e^{x}}{x} \\ &= \frac{e^{x}\big((e^{x})^3 - 3\,(e^{x})^2 + 2\,(e^{x})\big)}{x} \\ &= \frac{e^{x}(e^{x} - 1)(e^{2x} - 2)}{x} \end{aligned}$$

إذن إشارة $G'(x)$ متعلقة فقط بإشارة الكمية $(e^{2x} - 2)$

و ذلك لأن : $\dfrac{e^{x}(e^{x} - 1)}{x} > 0\ ;\ (\forall x > 0)$

إذا كان : $x = \frac{\ln 2}{2}$. فإن : $G'(x) = 0$

إذا كان : $x > \frac{\ln 2}{2}$. فإن : $G'(x) > 0$.

إذا كان : $x < \frac{\ln 2}{2}$. فإن : $G'(x) < 0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة G كما يلي .

x	0		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$G'(x)$	‖	$-$		$+$	
G	$-\ln 2$	↘	$G\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$	↗	$+\infty$

أجوبة امتحان مدينة أكادير 2009

التمرين الأول 1 أ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E . لدينا :

$$\begin{aligned} M(a,b)\times M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ac-bd) & (ad+bc) \\ -(bc+ad) & (ac-bd) \end{pmatrix} \\ &= M(ac-bd\ ;\ ad+bc) \end{aligned}$$

التمرين الأول 1 ب

في البداية نلاحظ أن E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
لأنه يضم مصفوفات $M(a,b)$ من الرتبة 2 .
لكي يكون E مستقرا من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ يكفي أن نبين أن :

$$\forall\, M(a,b), M(c,d)\,\epsilon\, E\ ;\ M(a,b)\times M(c,d)\,\epsilon\, E$$

من أجل ذلك ، لدينا حسب السؤال أ) :

$$\boxed{M(a,b)\times M(c,d) = M(ac-bd\ ;\ ad+bc)}$$

و لدينا $a^2+b^2=1$ و $c^2+d^2=1$.
لأن $(a,b)\,\epsilon\, E$ و $M(c,d)\,\epsilon\, E$.
إذن :

$$\begin{aligned} (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 &= (ac)^2+(bd)^2-2(ac)(bd)+(ad)^2+(bc)^2+2(ad)(bc) \\ &= c^2(a^2+b^2)+d^2(a^2+b^2)+0 \\ &= c^2\times 1 + d^2\times 1 \\ &= c^2+d^2 = 1 \end{aligned}$$

إذن المصفوفة $M(ac-bd\ ;\ ad+bc)$ تنتمي إلى المجموعة E .
و بالتالي : $\forall\, M(a,b), M(c,d)\,\epsilon\, E\ ;\ M(a,b)\times M(c,d)\,\epsilon\, E$
و هذا يعني أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول 2 أ

لنبين الآن أن f تشاكل .
ليكن $(a+ib)$ و $(c+id)$ عددين عقديين معيارهما 1 .
لدينا :

$$\begin{aligned} f\big((a+ib)\times(c+id)\big) &= f\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big) \\ &= M(ac-bd\ ;\ bc+ad) \\ &= M(a,b)\times M(c,d) \\ &= f(a+ib)\times f(c+id) \end{aligned}$$

إذن f تشاكل من $(U,\times)$ نحو $(E,\times)$.
لنبين الآن أن f تقابل .
لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E (يعني $a^2+b^2=1$)
و لنحل في U المعادلة $M(a,b)=(x+iy)$ ذات المجهول $x+iy$.

$$\begin{aligned} f(x+iy)=M(a,b) &\Leftrightarrow M(x,y)=M(a,b) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases} \end{aligned}$$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا في U و هو العدد العقدي $(a+ib)$
و هو ينتمي إلى U لأن $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1}=1$.
أو بتعبير آخر :

$$(\forall\, M(a,b)\,\epsilon\, E), (\exists!\,(x+iy)\epsilon U)\ :\ f(x+iy)=M(a,b)$$

إذن f تقابل من U نحو E .
و بالتالي نستنتج أن f تشاكل تقابلي من $(U,\times)$ نحو $(E,\times)$.

التمرين الأول 2 ب

لدينا f تشاكل من $(U,\times)$ نحو $(E,\times)$.
إذن صورة الزمة التبادلية $(U,\times)$ بالتشاكل f هي الزمرة التبادلية $(f(U),\times)$
و بما أن f تقابلي فإن $f(U)=E$.
إذن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .
نستنتج إذن مميزات الزمرة $(E,\times)$ انطلاقا من مميزات الزمرة $(U,\times)$
و ذلك عبر التطبيق f .
لدينا 1 هو العنصر المحايد لـ $\times$ في U .
إذن $f(1)$ هو العنصر المحايد لـ $\times$ في E . $(\ I=M(1,0)=f(1)\ )$
و لدينا $x-iy$ هو مماثل كل عدد $x+iy$ بالنسبة لـ $\times$ في U .
إذن $M(x,-y)$ هي مماثلة $M(x,y)$ بالنسبة لـ $\times$ في E

التمرين الأول 3

نلاحظ في البداية أن : $A=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = M\left(\frac{-1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\epsilon\, E$

لأن : $\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$

و نلاحظ كذلك أن :

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2} &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{aligned}$$

سوف نستعمل هاتين الملاحظتين أثناء الحساب ، إضافة إلى التشاكل التقابلي f .
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$\begin{aligned} A^n &= A\times A\times\cdots\times A\quad ;\ n\ fois \\ &= M\left(\tfrac{-1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times M\left(\tfrac{-1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cdots\times M\left(\tfrac{-1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad ;\ n\ fois \\ &= f\left(\tfrac{-1}{2}+i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cdots\times f\left(\tfrac{-1}{2}+i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad ;\ n\ fois \\ &= f\left(\left(\tfrac{-1}{2}+i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cdots\times\left(\tfrac{-1}{2}+i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\quad ;\ n\ fois \\ &= f\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\times e^{\frac{2i\pi}{3}}\times\cdots\times e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\quad ;\ n\ fois \\ &= f\left(\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^n\right)\quad ;\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \\ &= f\left(e^{\frac{2ni\pi}{3}}\right)\quad ;\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \\ &= f\left(\cos\left(\tfrac{2n\pi}{3}\right)+i\sin\left(\tfrac{2n\pi}{3}\right)\right)\quad ;\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \\ &= M\left(\cos\left(\tfrac{2n\pi}{3}\right)\ ;\ \sin\left(\tfrac{2n\pi}{3}\right)\right)\quad ;\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \end{pmatrix}\quad ;\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}^* \end{aligned}$$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall\, n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*)\quad ;\quad A^n=\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \end{pmatrix}}$$

أو بتعبير أوضح نكتب :

$$\boxed{(\forall\, n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*)\quad ;\quad \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \\ -\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \end{pmatrix}}$$

التمرين الأول 4

لنحل في E المعادلة $X^4 = A$.

و من أجل ذلك نضع : $X = M(a,b)$ و $a + ib = e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned}
X^4 = A &\Leftrightarrow \left(M(a,b)\right)^4 = A \\
&\Leftrightarrow M(a,b)\times M(a,b)\times M(a,b)\times M(a,b) = A \\
&\Leftrightarrow \underbrace{f(a+ib)\times\cdots\times f(a+ib)}_{4\ fois} = M\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow f\Big(\underbrace{(a+ib)\times\cdots\times(a+ib)}_{4\ fois}\Big) = f\left(\frac{-1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow f\left((a+ib)^4\right) = f\left(\frac{-1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow f\left(\left(e^{i\theta}\right)^4\right) = f\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) \\
&\Leftrightarrow f\left(e^{4i\theta}\right) = f\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) \\
&\Leftrightarrow f^{-1}\left(f\left(e^{4i\theta}\right)\right) = f^{-1}\left(f\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow e^{4i\theta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow 4\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \theta = \left(\frac{2\pi}{12}+\frac{2k\pi}{4}\right)\ ;\ k\in\{0,1,2,3\} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{6} \\ \theta_1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \\ \theta_2 = \frac{7\pi}{6} \\ \theta_3 = \frac{10\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow S = \left\{ \begin{matrix} M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) & ; & M\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right) & ; & M\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \end{matrix} \right\}
\end{aligned}$$

التمرين الثاني 1 أ

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1-i)^2(1+ia)^2 - 4i\,(a^2-1) \\
&= -2i\,(1+2ai-a^2) - 4i\,(a^2-1) \\
&= -2i\,(1-a^2) - 2i\,(2ai) + 4i\,(1-a^2) \\
&= 2i\,(1-a^2) - 2i\,(2ai) \\
&= (-2i)\,(a^2+2ai+i^2) \\
&= (-2i)\,(a+i)^2
\end{aligned}$$

التمرين الثاني 1 ب

لاحظ في البداية أن : $-2i = (1-i)^2$.

إذن : $\Delta = (-2i)(a+i)^2 = \left((1-i)(a+i)\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين u و v معرفين كما يلي :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{(i-1)(1+ia)+(i-1)(i+a)}{2i} \\
&= \frac{(i-1)(1+ia+i+a)}{2i} \\
&= \frac{(i-1)(1+a)(1+i)}{-(i-1)^2} \\
&= (1+a)\left(\frac{1+i}{1-i}\right) \\
&= (1+a)\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right) \\
&= (1+a)\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right) \\
&= (1+a)\left(\frac{2i}{2}\right) = \boxed{i(1+a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v &= \frac{(i-1)(1+ia)-(i-1)(i+a)}{2i} \\
&= \frac{(i-1)\left((1-i)-a(1-i)\right)}{2i} \\
&= \frac{(i-1)(1-i)(1-a)}{-(i-1)^2} \\
&= \frac{-(i-1)^2(1-a)}{-(i-1)^2} = \boxed{(1-a)}
\end{aligned}$$

التمرين الثاني 2 أ

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(a)$ بحيث تكون O و B و C نقط مستقيمية .

$$\begin{aligned}
(\Gamma) &= \{\, M(a)\ ;\ O, B\ et\ C\ sont\ colinéaires \,\} \\
&= \left\{ M(a)\ ;\ \left(\frac{z_B-z_O}{z_C-z_O}\right)\in\mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ M(a)\ ;\ \left(\frac{u}{v}\right)\in\mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ M(a)\ ;\ \overline{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{u}{v} \right\} \\
&= \left\{ M(a)\ ;\ \overline{\left(\frac{i(1+a)}{(1-a)}\right)} = \frac{i(1+a)}{(1-a)} \right\} \\
&= \left\{ M(a)\ ;\ \frac{-i(1+\bar{a})}{1-\bar{a}} = \frac{i(1+a)}{(1-a)} \right\} \\
&= \left\{ M(a)\ ;\ \frac{1+\bar{a}}{\bar{a}-1} = \frac{1+a}{1-a} \right\} \\
&= \{\, M(a)\ ;\ (1+\bar{a})(1-a) = (1+a)(\bar{a}-1) \,\} \\
&= \{\, M(a)\ ;\ 2-2\,a\bar{a} = 0 \,\} \\
&= \{\, M(a)\ ;\ a\bar{a} = 1 \,\} \\
&= \{\, M(a)\ ;\ \sqrt{a\bar{a}} = 1 \,\} \\
&= \{\, M(a)\ ;\ |a| = 1 \,\} \\
&= le\ \ Cercle\ \ unité
\end{aligned}$$

و بالتالي مجموعة النقط $M(a)$ التي من أجلها تكون النقط O و B و C مستقيمية هي الدائرة التي مركزها O و شعاعها 1 .

التمرين الثاني 2 ب

ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يُحقق $R(A) = C$.

$$\begin{aligned}
R(A) = C &\Leftrightarrow (z_c-\omega) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_A-\omega) \\
&\Leftrightarrow (v-\omega) = i(ia-\omega) \\
&\Leftrightarrow i\omega-\omega = i(ia)-v \\
&\Leftrightarrow \omega(i-1) = -a-1+a \\
&\Leftrightarrow \omega(i-1) = -1 \\
&\Leftrightarrow \omega(i-1)(i+1) = -(i+1) \\
&\Leftrightarrow \omega(-2) = -(i+1) \\
&\Leftrightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{2}(i+1)}
\end{aligned}$$

التمرين الثاني 3 أ

لنبين أن : $A \neq D$.

لدينا : $aff(D) - aff(A) = u^2 - ia$

$$\begin{aligned} &= \left(i(1+a)\right)^2 - ia \\ &= -(1+a^2+2a) - ia \\ &= -(a^2+2a+ia+1) \\ &= -(a^2+(2+i)a+1) \neq 0 \;; (\text{حسب المعطيات}) \end{aligned}$$

إذن : $aff(D) - aff(A) \neq 0$.

يعني : $aff(D) \neq aff(A)$. **و منه : $D \neq A$** .

لنبين أن $A \neq E$.

بالخلف، نفترض أن : $A = E$.

إذن : $aff(A) = aff(E)$. يعني : $ia = \frac{-(1+a)^2+a}{1-i}$.

يعني : $ia + a = -(1+a)^2 + a$.

يعني : $a^2 + 2a + ia + 1 = 0$.

أي : $a^2 + (2+i)a + 1 = 0$.

و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة للتمرين .

إذن : $A \neq E$.

لنبين الآن أن : $D \neq E$.

بالخلف ، نفترض أن $D = E$.

إذن : $aff(E) = aff(D)$. يعني : $\frac{u^2+a}{1-i} = u^2$.

يعني : $u^2 + a = u^2 - i\,u^2$

أي : $a = -i\,u^2$. و منه : $ai = u^2$.

أي : $ai = \left(i(1+a)\right)^2$. أي : $ai = -a^2 - 1 - 2a$.

أي : $a^2 + (2+i)a + 1 = 0$.

و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة للتمرين .

إذن ما افترضناه كان خاطئا .

إذن : $D \neq E$.

التمرين الثاني 3 ب

لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{z_E - z_D}{z_E - z_A} &= \frac{\frac{u^2+a}{1-i} - u^2}{\frac{u^2+a}{1-i} - ai} \\ &= \frac{u^2 + a - u^2 + i\,u^2}{1-i} \times \frac{1-i}{u^2 + a - ai - a} \\ &= \frac{i\,u^2 + a}{u^2 - ai} = \frac{i(u^2 - ai)}{(u^2 - ai)} = i = \boxed{e^{\frac{i\pi}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{z_E - z_D}{z_E - z_A} = e^{\frac{i\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right| = \left|e^{\frac{i\pi}{2}}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) \equiv \arg\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right) \;[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z_E - z_D| = |z_E - z_A| \\ \overline{(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DE})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ED = EA \\ \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

و هذا يعني أن المثلث ADE مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في E .

التمرين الثاني 3 ج

لدينا : $|a| = 1$. إذن يمكن وضع $a = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$.

و سوف نستعمل أثناء الحساب القاعدة التالية :

$$\boxed{e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$$

لدينا :

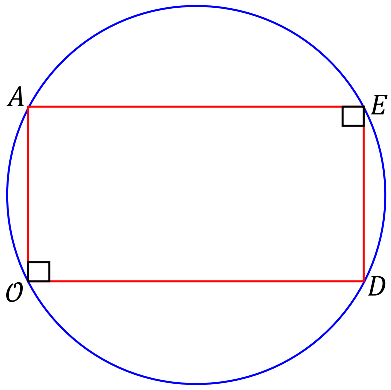
$$\begin{aligned} \left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) \times \left(\frac{z_O - z_D}{z_O - z_A}\right) &= i \times \left(\frac{u^2}{ia}\right) = \frac{u^2}{a} \\ &= \frac{\left(i(1+a)\right)^2}{a} = \frac{-(1+a)^2}{a} = \frac{-\left(1+e^{i\theta}\right)^2}{e^{i\theta}} \\ &= \frac{-\left(e^{i0} + e^{i\theta}\right)^2}{e^{i\theta}} = \frac{-\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\, e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^2}{e^{i\theta}} \\ &= \frac{-4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\, e^{i\theta}}{e^{i\theta}} = -4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

إذن :

$$\boxed{\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) \times \left(\frac{z_O - z_D}{z_O - z_A}\right) \in \mathbb{R}^-}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \arg\left(\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) \times \left(\frac{z_O - z_D}{z_O - z_A}\right)\right) \equiv \pi\,[2\pi] \\ &\Rightarrow \arg\left(\frac{z_E - z_D}{z_E - z_A}\right) + \arg\left(\frac{z_O - z_D}{z_O - z_A}\right) \equiv \pi\,[2\pi] \\ &\Rightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_E}{z_A - z_E}\right) - \arg\left(\frac{z_A - z_O}{z_D - z_O}\right) \equiv \pi\,[2\pi] \\ &\Rightarrow \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})} - \overline{(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})} = \pi + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})} - \overline{(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})} = (1+2k)\pi \;;\; (1+2k) \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \overline{(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED})} \equiv \overline{(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{aligned}$$

و هذا يعني أن النقط O و A و D و E متداورة .



التمرين الثالث 1

سوف نستعمل البرهان بالترجع . و من أجل ذلك نعتبر العبارة (P_n) المعرفة بما يلي : $a_n \in \mathbb{N}^*$: (P_n) .

من أجل $n = 0$ لدينا $a_0 = 17 \in \mathbb{N}^*$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن (P_n) صحيحة .

$$\begin{aligned} (P_n)\ est\ vraie &\Rightarrow a_n \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow a_n \geq 1 \\ &\Rightarrow (a_n - 1)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow 1 + (a_n - 1)^2 \geq 1 \\ &\Rightarrow a_{n+1} \geq 1 \\ &\Rightarrow a_{n+1} \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow (P_{n+1})\ est\ vraie \end{aligned}$$

لقد حصلنا إذن على الوضعية الترجعية التالية :

$$\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n)\ \Rightarrow\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$.

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ a_n \in \mathbb{N}^*$.

التمرين الثالث 2

سوف نُجيب باستعمال البرهان بالترجع (again)

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ a_n \equiv 7\ [10]$

من أجل $n=0$ لدينا : $a_0 = 17 \equiv 7\ [10]$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (P_0) عبارة صحيحة .

$$\begin{aligned}(P_n)\ est\ vraie\ &\Rightarrow\ a_n \equiv 7\ [10]\\ &\Rightarrow\ a_n - 1 \equiv 6\ [10]\\ &\Rightarrow\ (a_n-1)^2 \equiv 36\ [10]\\ &\Rightarrow\ 1+(a_n-1)^2 \equiv 37\ [10]\\ &\Rightarrow\ a_{n+1} \equiv 37 \equiv 7\ [10]\\ &\Rightarrow\ a_{n+1} \equiv 7\ [10]\\ &\Rightarrow\ (P_{n+1})\ est\ vraie\end{aligned}$$

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية :

$$\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n)\ \Rightarrow\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$.

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ a_n \equiv 7\ [10]$.

التمرين الثالث 3 أ

سوف نستعمل من جديد البرهان بالترجع (it's a shame)

نعتبر العبارة (Q_n) التالية : $(Q_n)\ :\ a_n = 2^{2^{n+2}}+1$.

من أجل $n=0$ ، لدينا $a_0 = 2^{2^2}+1 = 17$.

إذن العبارة (Q_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (Q_n) عبارة صحيحة .

$$\begin{aligned}(Q_n)\ est\ vraie\ &\Rightarrow\ a_n = 2^{2^{n+2}}+1\\ &\Rightarrow\ a_n - 1 = 2^{2^{n+2}}\\ &\Rightarrow\ (a_n-1)^2 = 2^{2^{n+3}}\\ &\Rightarrow\ 1+(a_n-1)^2 = 2^{2^{n+3}}+1\\ &\Rightarrow\ a_{n+1} = 2^{2^{(n+1)+2}}+1\\ &\Rightarrow\ (Q_{n+1})\ est\ vraie\end{aligned}$$

و بذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية :

$$\begin{cases}(Q_0)\ est\ vraie\\ (Q_n)\ \Rightarrow\ (Q_{n+1})\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(Q_n)\ est\ toujours\ vraie$.

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ a_n = 2^{2^{n+2}}+1$.

التمرين الثالث 3 ب

بإمكانك استعمال البرهان بالترجع مرة أخرى دون أن تخجل من ذلك .

أما أنا فلا (that's enough, it's too bad)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا :

$$\begin{aligned}(a_n-1)^{16}+1 &= \left(2^{2^{n+2}}+1-1\right)^{16}+1\\ &= \left(2^{2^{n+2}}\right)^{16}+1 = 2^{16\cdot 2^{n+2}}+1\\ &= 2^{(2^4\cdot 2^{n+2})}+1 = 2^{2^{(n+4)+2}}+1 = a_{n+4}\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ a_{n+4} = (a_n-1)^{16}+1}$

التمرين الثالث 4 أ

لقد حاولت أن أبين لكم أن $36^{16} \equiv 36\ [100]$ و ذلك باستعمال النتائج السابقة فلم أُفلح في ذلك، و ما توصلت إليه هو فقط أن $36^{16} \equiv 36\ [10]$

و لقد حصلت عليها من خلال النتائج السابقة كما يلي :

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ a_n \equiv 7\ [10]$.

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ (a_n-1) \equiv 6\ [10]$.

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ (a_n-1)^{16} \equiv 6^{16}\ [10]\quad (1)$.

من جهة أخرى لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ a_n \equiv 7\ [10]$.

إذن : $a_{n+4} \equiv 7\ [10]$ لأن $(n+4) \in \mathbb{N}$.

و منه : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ (a_{n+4}-1) \equiv 6\ [10]$.

و منه حسب 3) ب) نستنتج أن :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ (a_{n+4}-1) = (a_n-1)^{16} \equiv 6\ [10]$$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ (a_n-1)^{16} \equiv 6\ [10]\quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $6^{16} \equiv 6\ [10]$.

التي تُصبح : $(6^{16})^2 \equiv 6^2\ [10]$.

يعني : $6^{2\cdot 16} \equiv 36\ [10]$.

يعني : $(6^2)^{16} \equiv 36\ [10]$.

يعني : $36^{16} \equiv 36\ [10]\quad (3)$.

و المشكل الكبير هو أنني لم أتمكن من المرور من (3) إلى $36^{16} \equiv 36\ [100]$

و هذا لا يعني أنه لا توجد طريقة للمرور . فكروا في ذلك و أرسلوا الجواب في حالة ما وجدتموه في رسالة قصيرة إلى الرقم +21260344136

و اربحوا سيارة فاخرة ها ها ها ها ها ها .

فيما يلي أقترح طريقة أخرى نبين من خلالها على أن $36^{16} \equiv 36\ [100]$ دون استعمال نتائج الأسئلة السابقة .

لدينا :

$$\begin{aligned}36^{16}-36 &= 36(36^{15}-1)\\ &= 36(36-1)(1+36+36^2+\cdots+36^{14})\\ &= 36\times 35\times(1+36+36^2+\cdots+36^{14})\\ &= 9\times 4\times 5\times 7\times(1+36+36^2+\cdots+36^{14})\end{aligned}$$

و نلاحظ أن :

$$\begin{cases}1 \equiv 1\ [5]\\ 36 \equiv 1\ [5]\\ 36^2 \equiv 1^2\ [5]\\ \vdots\quad \vdots\\ 36^{14} \equiv 1^{14}\ [5]\end{cases}$$

نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف فنحصل على :

$$(1+36+36^2+\cdots+36^{14}) \equiv 15\ [5]$$

و بما أن : $15 \equiv 0\ [5]$.

فإن : $(1+36+36^2+\cdots+36^{14}) \equiv 0\ [5]$.

و يوجد بذلك عنصر k من $\mathbb{N}$ حيث $(1+36+\cdots+36^{14}) = 5$.

و بالتالي نكتب :

$$\begin{aligned}36^{16}-36 &= 9\times 4\times 5\times 7\times(1+36+36^2+\cdots+36^{14})\\ &= 9\times 4\times 5\times 7\times 5\times k\\ &= (4\times 5\times 5)\times(7\times 9\times k)\\ &= 100\times(63k)\\ &= 100k'\quad ;\ k' = 63k \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

إذن العدد 100 يقسم الفرق $36^{16}-36$.

يعني : $36^{16}-36 \equiv 0\ [100]$.

و بالتالي : $\boxed{36^{16} \equiv 36\ [100]}\quad (*)$.

التمرين الثالث 4 ب

سوف نستعمل البرهان بالترجع و سوف نستعين بالنتيجة $(*)$.

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ a_{4n+2} \equiv 37\ [100]$

من أجل $n=0$ لدينا : $a_2 = 2^{2^4}+1 = 65537 \equiv 37\ [100]$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و نفترض أن (P_n) عبارة صحيحة :

$$\begin{aligned}
(P_n)\ est\ vraie &\Rightarrow a_{4n+2}\equiv 37\,[100]\\
&\Rightarrow 2^{2^{4n+2+2}}+1\equiv 37\,[100]\\
&\Rightarrow 2^{2^{4n+4}}\equiv 36\,[100]\\
&\Rightarrow \left(2^{2^{4n+4}}\right)^{16}\equiv 36^{16}\,[100]\\
&\Rightarrow \left(2^{2^{4n+4}}\right)^{16}\equiv 36\,[100]\ ;\ d'après\ (*)\\
&\Rightarrow 2^{(16\cdot 2^{4n+4})}\equiv 36\,[100]\\
&\Rightarrow 2^{(2^4\cdot 2^{4n+4})}\equiv 36\,[100]\\
&\Rightarrow 2^{2^{4n+8}}\equiv 36\,[100]\\
&\Rightarrow 2^{2^{(4(n+1)+2)+2}}+1\equiv 37\,[100]\\
&\Rightarrow a_{4(n+1)+2}\equiv 37\,[100]\\
&\Rightarrow (P_{n+1})\ est\ vraie
\end{aligned}$$

و نحصل بذلك على الوضعية الترجعية التالية :

$$\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n)\Rightarrow(P_{n+1})\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

إذن حسب مبدأ الترجع نستنتج أن : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$.

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ a_{4n+2}\equiv 37\,[100]$.

التمرين الرابع I 1 أ

على المجال $]0,+\infty[$ لدينا f عبارة عن فرق دالتين متصلتين على $]0,+\infty[$.

إذن f دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$.

لندرس الأن اتصال الدالة f في الصفر على اليمين .

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-x\ln x)=0-0=0=f(0)$

إذن f دالة متصلة على يمين 0 .

و بذلك تكون الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ قابلة للتمديد بالإتصال في الصفر و $f(0)=0$.

التمرين الرابع I 1 ب

لدينا : $(\forall x\geq 0)\ ;\ f(x)=x-x\ln x=x(1-\ln x)$.

إذن تنعدم الدالة f في نقطتين 0 و 1 .

x	0		e		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	

التمرين الرابع I 2 أ

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-\ln x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1-\ln x)=1-(-\infty)=+\infty\notin\mathbb{R}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر .

التمرين الرابع I 2 ب

لدينا $x\longrightarrow \ln x$ و $x\longrightarrow x$ دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ لأنها عبارة عن فرق دالة و جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall x>0)\ ;\ f'(x)&=(x-x\ln x)'\\&=1-(x\ln x)'=1-(\ln x+1)\\&=-\ln x\end{aligned}$$

التمرين الرابع I 3

لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=-\ln x$

إذا كان $x=1$ فإن $f'(x)=0$.

إذا كان $x>1$ فإن $f'(x)<0$.

إذا كان $x<1$ فإن $f'(x)>0$.

و لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty}(x-x\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x(1-\ln x)\\&=(+\infty)(1-(+\infty))=(+\infty)(-\infty)=(-\infty)\end{aligned}$$

إذن نرسم جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

التمرين الرابع I 4 أ

لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\frac{e^{(n-1)}}{n^n}&=n^{-n}\times e^{(n-1)}\\&=e^{-n\ln n}\times e^{(n-1)}=e^{-n\ln n+n-1}\\&=e^{(n-n\ln n)-1}=e^{(f(n)-1)}\end{aligned}$$

التمرين الرابع I 4 ب

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$.

يعني : $(\forall x,y\in[1,+\infty[)\ ;\ x>y\ \Rightarrow\ f(x)<f(y)$.

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

إذن n و $(n+1)$ عنصرين من المجال $[1,+\infty[$.

و منه :

$$\begin{aligned}(n+1)>n&\Leftrightarrow f(n+1)<f(n)\\&\Leftrightarrow f(n+1)-1<f(n)-1\\&\Leftrightarrow e^{(f(n+1)-1)}<e^{(f(n)-1)}\\&\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\&\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ est\ une\ suite\ \searrow\end{aligned}$$

و بالتالي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعا .

و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{(f(n)-1)}=\lim\limits_{\substack{n\to-\infty\\ m=f(n)-1\\ f(n)\to-\infty}}e^m=0$

التمرين الرابع I 5

لدينا f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$.

إذن f دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1,e]$.

و ذلك لأن : $[1,e]\subset[1,+\infty[$.

و منه f تقابل من $[1,e]$ نحو صورته $f([1,e])$.

و لدينا : $f([1,e])=[f(e);f(1)]=[0;1]$.

إذن f تقابل من المجال $[1,e]$ نحو المجال $[0,1]$.

أو بتعبير أوضح : $(\forall y\in[0,1]),(\exists!\,x\in[1,e])\ ;\ f(x)=y$

أو بتعبير أجمل نقول : كل عنصر y من مجموعة الوصول $[0,1]$ يقبل سابقا وحيدا x من مجموعة الانطلاق $[1,e]$.

لنبين الآن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n\in[0,1]$.

نلاحظ من خلال جدول تغيرات f أنها دالة تقبل مطراف عند النقطة 1 . و هذا المطراف هو قيمة قصوية 1 . لأن $f'(x)$ تنعدم في 1 و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ f(x)\leq 1$.

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(n)\leq 1$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(n)-1\leq 0$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ e^{(f(n)-1)}\leq 1$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n\leq 1\quad (2)$

من جهة أخرى لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x > 0$.
لكن عندما يؤول x إلى $-\infty$ تؤول الكمية e^x إلى 0 .
نستطيع إذن أن نكتب : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ e^x \geq 0$
إذن : $(\forall\, n\, \epsilon\, \mathbb{N}^*)\ ;\ e^{(f(n)-1)} \geq 0 \quad (2)$
لأن الكمية $(f(n)-1)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$.
من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall\, n\, \epsilon\, \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 \leq e^{(f(n)-1)} \leq 1$
أي : $(\forall\, n\, \epsilon\, \mathbb{N}^*)\ ;\ 0 \leq u_n \leq 1$
أي : $(\forall\, n\, \epsilon\, \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n\ \epsilon\ [0,1]$
رأينا أن f تقابل من المجال $[1,e]$ نحو المجال $[0,1]$.
بما أن u_n عنصر من المجال $[0,1]$ فإنه يمتلك سابقا وحيدا v_n من المجال $[1,e]$ بالدالة f .
أو بتعبير آخر : $\exists!\ v_n\ \epsilon\ [1,e]\ ;\ f(v_n) = u_n$.
أو بتعبير أخير نقول أن المعادلة $f(x) = u_n$ ، حيث $n \epsilon \mathbb{N}^*$ ، تقبل حلا وحيدا في المجال $[1,e]$.

التمرين الرابع I 6

$$n \geq 1 \quad \Rightarrow\ u_{n+1} < u_n\ ;\ car\ (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ \searrow$$
$$\Rightarrow\ f^{-1}(u_{n+1}) < f^{-1}(u_n)$$
$$car\ f\ et\ f^{-1}\ sont\ \nearrow\ sur\ [0,1]$$
$$et\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n\ \epsilon\ [0,1]$$
$$\Rightarrow\ f^{-1}\big(f(v_{n+1})\big) < f^{-1}\big(f(v_n)\big)$$
$$car\ (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ f(v_n) = u_n$$
$$\Rightarrow\ v_{n+1} < v_n\ \ ;\ n \epsilon \mathbb{N}^*$$
$$\Rightarrow\ (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ une\ suite\ décroissante$$
$$\Rightarrow\ (v_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}\ est\ une\ suite\ convergente$$
$$car\ elle\ est\ minorée\ par\ 1\ d'après\ 1 \leq v_n \leq e$$

$$u_n = f(v_n)\ \Rightarrow\ v_n = f^{-1}(u_n)\ avec\ f^{-1} : [0,1] \longrightarrow [1,e]$$
$$\Rightarrow\ \lim_{n\infty}(v_n) = \lim_{n\infty} f^{-1}(u_n)$$
$$\Rightarrow\ \lim_{n\infty}(v_n) = f^{-1}(0)\quad car\ \lim_{n\infty}(u_n) = 0$$
$$\Rightarrow\ \lim_{n\infty}(v_n) = 1\quad car\ f^{-1}(0) = 1$$

التمرين الرابع II 1

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و a عنصر من I فإن الدالة :

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I و التي تنعدم في a .
لدينا f متصلة على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا $1\ \epsilon\ [0,+\infty[$.
إذن الدالة :

$$F\ :\ [0,+\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \int_1^x f(t)\,dt$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $[0,+\infty[$ و التي تُحقق $F(1) = 0$ و $(\forall x \geq 0)\ ;\ F'(x) = f(x)$.
إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.
و كذلك : $\forall\ x\ \epsilon\ [0,+\infty[\ ;\ F'(x) = f(x)$

التمرين الرابع II 2 أ

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

$$F(x) = \int_1^x (t - t\ln t)\,dt$$
$$= \int_1^x t\,dt - \int_1^x (t\ln t)\,dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x - \int_1^x \underbrace{t}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{v(t)}\ dt$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\left[\frac{t^2\ln t}{2}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2t}\,dt\right)$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int_1^x t\,dt\right)$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x\right)$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{x^2\ln x}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^2-1}{2}\right) - \left(\frac{x^2\ln x}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{4}(x^2-1) - \frac{1}{2}(x^2\ln x)$$

التمرين الرابع II 2 ب

لدينا F دالة متصلة في الصفر على اليمين.

$$F(0) = \lim_{x\to0^+} F(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{3}{4}(x^2-1) - \frac{1}{2}(x^2\ln x)\right)$$
$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{3}{4}(x^2-1)\right) - \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot(x\ln x)$$
$$= \frac{3}{4}(0^2-1) - 0\times 0 = \frac{-3}{4}$$

التمرين الرابع II 3 أ

المعلومة التي سوف نحتاجها هي نهاية الدالة F عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4x^2} - \frac{\ln x}{2}\right) = -\infty$$

x	0		1		e		$+\infty$
$F'(x)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
F	$\frac{-3}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$F(e)$	$\searrow$	$-\infty$

التمرين الرابع II 3 ب

لدينا حسب ما سبق : F دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]e,+\infty[$
إذن F تقابل من المجال $]e,+\infty[$ نحو المجال $F(\,]e,+\infty[\,)$.
و لدينا :

$$F(\,]e,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} F(x)\ ,F(e)\right[$$
$$= \left]-\infty\,;\ \frac{e^2-3}{4}\right[$$
$$\approx\ ]-\infty\ ;\ 1,1[$$

إذن F تقابل من $]e,+\infty[$ نحو $]-\infty\,;\ 1,1[$.
يعني : $(\forall y \epsilon]-\infty\,;1,1[\,)(\exists!\,x\ \epsilon\ ]e,+\infty[\,)\,;f(x) = y$
يعني أن كل عنصر y من $]-\infty\,;\ 1,1[$ يقبل سابقا واحدا x من المجال $]e,+\infty[$ بالتقابل F .
بما أن 0 عنصر من المجال $]-\infty\,;\ 1,1[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا α من المجال $]e,+\infty[$ بالتقابل F .
يعني : $0\ \epsilon\ ]-\infty\,;\ 1,1[\ \Rightarrow\ \exists!\ \alpha > e\ ;\ F(\alpha) = 0$
يعني أن المعادلة $F(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]e,+\infty[$.

لنبين الآن أن $4 < \alpha < 5$.

في البداية لدينا :
$$\begin{cases} F(4) = \frac{3}{4}(4^2 - 1) - \frac{4^2}{2}\ln 4 \approx 0{,}16 \\ F(5) = \frac{3}{4}(5^2 - 1) - \frac{5^2}{2}\ln 5 \approx -2{,}11 \end{cases}$$

و نعلم أن F و F^{-1} دالتين تناقصيتين معاً حيث :
$$\boxed{\begin{array}{l} F \;:\;]e,+\infty[\;\longrightarrow\;]-\infty\;;\;1{,}1[\\ F^{-1} \;:\;]-\infty\;;\;1{,}1[\;\longrightarrow\;]e\,,+\infty[\end{array}}$$

ننطلق إذن من الملاحظة التالية : $-2{,}11 < 0 < 0{,}16$.

يعني : $F(5) < F(\alpha) < F(4)$

نُدخل الدالة التناقصية F^{-1} على هذه الأعداد المنتمية إلى $]-\infty\;;\;1{,}1[$

نحصل على : $F^{-1}\big(F(5)\big) < F^{-1}\big(F(\alpha)\big) < F^{-1}\big(F(4)\big)$

و بما أن : $F^{-1} \circ F \equiv Id_{]e,+\infty[}$

إذن نستنتج أن : $5 > \alpha > 4$.

التمرين الرابع II 4 أ

لدينا :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} F(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}(x^2-1) - \frac{x^2 \ln x}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4x^2} - \frac{\ln x}{2}\right) \\ &= (+\infty)^2\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}(0) - \frac{1}{2}(+\infty)\right) \\ &= (+\infty)(-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

و لدينا :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{x \ln x}{2}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4x^2} - \frac{\ln x}{2}\right) = -\infty \end{aligned}$$

نحن أمام الوضعية التالية :
$$\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = -\infty \end{cases}}$$

و نقول أن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب موجه نحو الأسفل بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع II 4 ب

لدراسة تقعر المنحنى $(\mathcal{C})$ و نقط الانعطاف ندرس إشارة المشتقة الثانية $F''(x)$

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$. لدينا : $F'(x) = f(x)$.

و رأينا أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

إذن : $F''(x) = f'(x) = -\ln x \;\;;\;\; (\forall x > 0)$

إذا كان : $x = 1$. فإن : $F''(x) = 0$.

إذا كان : $x > 1$. فإن : $F''(x) < 0$.

إذا كان : $x < 1$. فإن : $F''(x) > 0$.

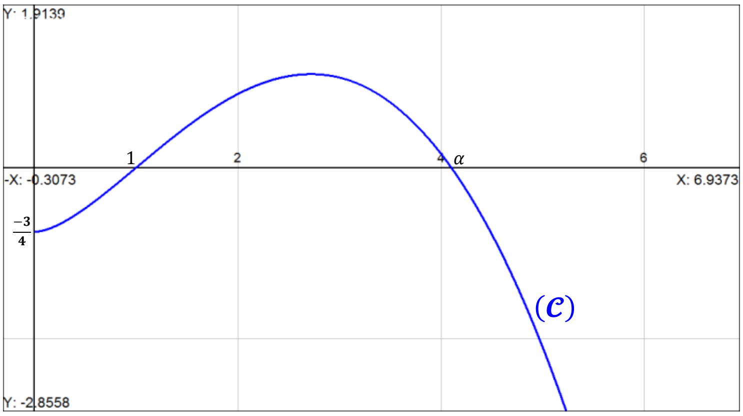
و لدينا : $F(1) = 0$

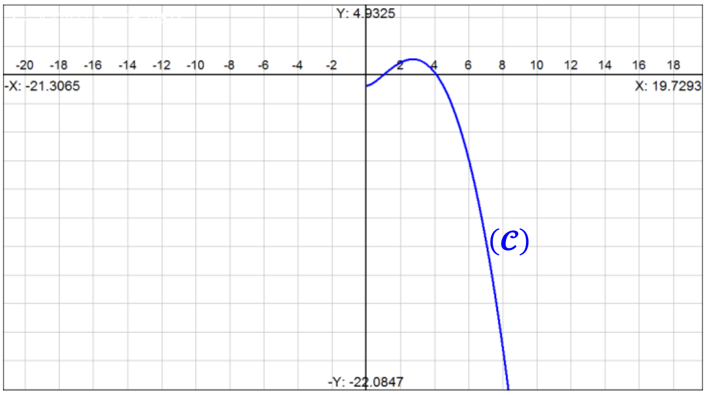
نستنتج إذن جدول تغيرات التقعر كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$F''(x)$	$+$	0	$-$
F	$(\mathcal{C})$ محدب	$(1,0)$ نقطةانعطاف لـ $(\mathcal{C})$	$(\mathcal{C})$ مقعر

لدينا $(1,0)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathcal{C})$ لأن F'' تنعدم في 1 و تتغير إشارتها بجوار هذه النقطة التي أفصولها 1 .

التمرين الرابع II 5





أجوبة امتحان مدينة فاس 2010

التمرين الأول 1

لكي يكون G جزءا مستقرا من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ يكفي أن يضم مصفوفات من الرتبة 3 و $\forall\,(M_\theta , M_{\theta'}) \in G^2 \;;\; M_\theta \times M_{\theta'} \in G$.

لتكن M_θ و $M_{\theta'}$ مصفوفتين من G .

$$M_\theta \times M_{\theta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta' & -\sin\theta' \\ 0 & \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ 0 & \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ 0 & \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

$$= M_{\theta+\theta'} \in G \;;\; car\;\; (\theta+\theta') \in \mathbb{R}$$

لقد حصلنا على ما يلي:

$$\boxed{\forall\,(M_\theta, M_{\theta'}) \in G^2 \;;\; M_\theta \times M_{\theta'} = M_{\theta+\theta'} \;\in\; G}$$

إذن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول 2

نعتبر المجموعة : $U = \{\, z \in \mathbb{C} \;;\; |z| = 1 \,\}$

U هي مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها يساوي 1 .

إذن U جزء غير فارغ من المجموعة $\mathbb{C}^*$.

ليكن z و z' عنصرين من U و لنبين أن $\frac{z}{z'}$ عنصر من U .

لدينا : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{1}{1} = 1$

لدينا : $\forall\,(z,z') \in U^2 \;;\; \left(\frac{z}{z'}\right) \in U$

نستنتج إذن حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية أن $(U,\times)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية $(\mathbb{C}^*,\times)$.

التمرين الأول 3 أ

ليكن $e^{i\theta}$ و $e^{i\theta'}$ عنصرين من U .

لدينا:

$$\begin{aligned}\varphi\left(e^{i\theta} \times e^{i\theta'}\right) &= \varphi\left(e^{i(\theta+\theta')}\right) = M_{\theta+\theta'} \\ &= M_\theta \times M_{\theta'} \;;\; d'après(1) \\ &= \varphi\left(e^{i\theta}\right) \times \varphi\left(e^{i\theta'}\right)\end{aligned}$$

إذن : $\forall\,\left(e^{i\theta}, e^{i\theta'}\right) \in U^2 \;;\; \varphi\left(e^{i\theta} \times e^{i\theta'}\right) = \varphi\left(e^{i\theta}\right) \times \varphi\left(e^{i\theta'}\right)$

يعني أن φ تشاكل من $(U,\times)$ نحو $(G,\times)$.

لنبين الآن أن φ تقابل .

لتكن M_θ مصفوفة من G . المعادلة ذات المجهول e^{ix} التالية $\varphi(e^{ix}) = M_\theta$ تقبل حلا وحيدا في U و هو العدد العقدي $e^{i\theta}$.

لأن

$$\begin{aligned}\varphi(e^{ix}) = M_\theta &\Leftrightarrow M_x = M_\theta \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & \sin x & \cos x \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\theta \\ \sin x = \sin\theta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \equiv \theta \;[2\pi] \\ &\Leftrightarrow e^{ix} = e^{i\theta}\end{aligned}$$

إذن نستنتج أن:

$$\boxed{(\forall\, M_\theta \in G),\left(\exists!\; e^{ix} = e^{i\theta} \in U\right) \;:\; \varphi\left(e^{ix}\right) = M_\theta}$$

و هذا يعني أن التطبيق φ تقابل من $(U,\times)$ نحو $(G,\times)$.

و بالتالي φ تشاكل تقابلي من $(U,\times)$ نحو $(G,\times)$.

التمرين الأول 3 ب

لدينا φ تشاكل من $(U,\times)$ نحو $(G,\times)$.

إذن صورة الزمرة التبادلية $(U,\times)$ هي الزمرة التبادلية $(\varphi(U),\times)$.

و بما أن φ تقابل فإن $\varphi(U) = G$.

إذن $(G,\times)$ زمرة تبادلية و نستنتج مميزاتها من خلال مميزات المجموعة $(U,\times)$ عن طريق التشاكل التقابلي φ .

لدينا $e^{i0} = 1$ هو العنصر المحايد للضرب في U .

إذن $\varphi\left(e^{i0}\right) = M_0$ هو العنصر المحايد للضرب في G .

و لدينا كل عدد $e^{i\theta}$ من U يقبل مماثلا في U و هو العدد العقدي $e^{-i\theta}$

إذن كل مصفوفة $\varphi\left(e^{i\theta}\right) = M_\theta$ من G تقبل مماثلة في G

و هي المصفوفة $\varphi\left(e^{-i\theta}\right) = M_{-\theta}$.

و لدينا : $\varphi\left(e^{i0}\right) = M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

و كذلك : $M_\theta \times M_{-\theta} = M_{\theta-\theta} = M_0 = I$

التمرين الأول 4

رأينا أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية . و ذلك حسب نتيجة السؤال 3) ب) .

و كل مصفوفة M_θ تقبل مماثلة $M_{-\theta}$. أي : $M_\theta \times M_{-\theta} = I$

يعني : $(M_\theta)^{-1} = M_{-\theta}$

أو بتعبير آخر نكتب :

$$\begin{aligned}(M_\theta)^{-1} &= Sym(M_\theta) = Sym\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right) \\ &= \varphi\left(Sym\left(e^{i\theta}\right)\right) = \varphi\left(e^{-i\theta}\right) = M_{-\theta}\end{aligned}$$

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$\begin{aligned}(M_\theta)^n &= M_\theta \times \cdots \times M_\theta \;\;;\; n\;fois \\ &= \varphi\left(e^{i\theta}\right) \times \cdots \times \varphi\left(e^{i\theta}\right) \;;\; n\;fois \\ &= \varphi\left(\underbrace{e^{i\theta} \times \cdots \times e^{i\theta}}_{n\;fois}\right) \;;\; (\text{تشاكل}\; f) \\ &= \varphi\left(\left(e^{i\theta}\right)^n\right) \\ &= \varphi\left(e^{in\theta}\right) \;;\; n\theta \in \mathbb{R} \\ &= M_{n\theta}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;;\; (M_\theta)^n = M_{n\theta}}$

التمرين الثاني I 1 أ

ليكن z عددا عقديا مخالفا للعدد i .

$$\begin{aligned}|\varphi(z)| &= \left|i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)\right| = |i| \cdot \left|\frac{z-2i}{z-i}\right| = \left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right| \\ &= \frac{|z_M - z_A|}{|z_M - z_B|} = \boxed{\frac{AM}{BM}}\end{aligned}$$

التمرين الثاني I 1 ب

ليكن z عددا عقديا مخالفا لكل من العددين i و $2i$.

$$\begin{aligned}\arg(\varphi(z)) &\equiv \arg\left(i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)\right) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(\varphi(z)) \equiv \arg(i) + \arg\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(\varphi(z)) \equiv \frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right) [2\pi] \\ &\Rightarrow \arg(\varphi(z)) \equiv \frac{\pi}{2} + \overline{\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right)} \;[2\pi]\end{aligned}$$

التمرين الثاني | I | 2

$$E = \{\, M(z)\ ;\ |\varphi(z)| = 1 \,\}$$
$$= \left\{ M(z)\ ;\ \frac{AM}{BM} = 1 \right\}$$
$$= \{\, M(z)\ ;\ AM = BM \,\}$$
$$= la\ médiatrice\ du\ segment\ [AB]$$
$= \boxed{\text{واسط القطعة } [AB]}$

$$F = \{\, M(z)\ ;\ |\varphi(z)|\ \epsilon\ i\mathbb{R} \,\}$$
$$= \left\{ M(z)\ ;\ \arg(\varphi(z)) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \right\}$$
$$= \left\{ M(z)\ ;\ \frac{\pi}{2} + \overline{(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + k'\pi \right\}$$
$$= \left\{ M(z)\ ;\ \overline{(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})} = 0 + (k' - 2k)\pi\ ;\ \left| \begin{matrix} k, k'\ \epsilon\ \mathbb{Z} \\ (k' - 2k)\ \epsilon\ \mathbb{Z} \end{matrix} \right. \right\}$$
$$= \left\{ M(z)\ ;\ \overline{(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})} \equiv 0\ [\pi] \right\}$$
$$= \left\{ M(z)\ ;\ M\ \epsilon\ (AB)\ ;\ \left| \begin{matrix} M \neq A \\ M \neq B \end{matrix} \right. \right\}$$
$$= la\ droite\ (AB)\ privée\ des\ points\ A\ et\ B$$
$= \boxed{\text{المستقيم } (AB) \text{ المحروم من } A \text{ و } B}$

التمرين الثاني | II | 1

ليكن z عددا عقديا مخالفا للعدد العقدي i .

$$(\varphi(z) - i) = i\left(\frac{z - 2i}{z - i}\right) - i = \frac{i(z - 2i - z + i)}{(z - i)}$$
$$= \frac{i(-i)}{(z - i)} = \frac{1}{z - i}$$

إذن :
$$\varphi(z) - i = \frac{1}{z - i}$$
$$\Rightarrow \arg(\varphi(z) - i) \equiv \arg\left(\frac{1}{z - i}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg(\varphi(z) - i) \equiv \arg(1) - \arg(z - i)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg(\varphi(z) - i) \equiv 0 - \arg(z - i)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i)\ [2\pi]$$

و لدينا كذلك :
$$\varphi(z) - i = \frac{1}{z - i}$$
$$\Rightarrow |\varphi(z) - i| \equiv \left|\frac{1}{z - i}\right| = \frac{|1|}{|z - i|} = \frac{1}{|z - i|}$$

التمرين الثاني | II | 2

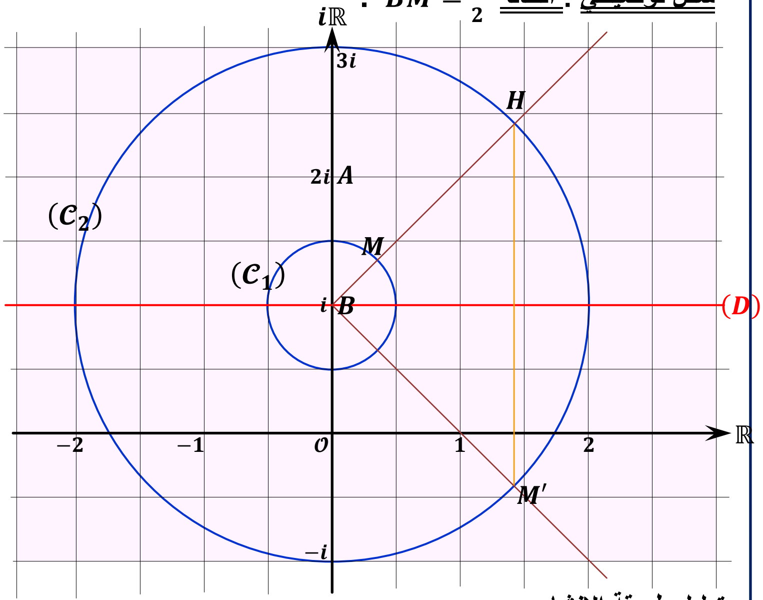
$$M(z)\ \epsilon\ (\mathcal{C}) \Leftrightarrow BM = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow |z_M - z_B| = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{|z - i|} = 2$$
$$\Leftrightarrow |\varphi(z) - i| = \frac{1}{|z - i|} = 2$$
$$\Leftrightarrow |z_{M'} - z_B| = 2$$
$$\Leftrightarrow BM' = 2$$
$$\Leftrightarrow M'\ \epsilon\ \mathcal{C}'(B\,, 2)$$

التمرين الثاني | II | 3

طريقة إنشاء النقطة M انطلاقا من النقطة M' .

- ننطلق من معلم و نُمثل عليه النقطتين $A(2i)$ و $B(i)$.
- نمثل بعد ذلك النقطة M المعرفة بلحقها z المخالف لـ i و $2i$.
- نرسم المستقيم (D) المار من B و الموازي للمحور الحقيقي.
- نرسم الدائرة $(\mathcal{C}_1)$ التي مركزها B و تمر من M .
- نرسم الدائرة $(\mathcal{C}_2)$ التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{MB}$.
- نصف المستقيم $[BM)$ يقطع الدائرة $(\mathcal{C}_2)$ في نقطة H .
- المستقيم المار من H و العمودي على (D) يقطع الدائرة $(\mathcal{C}_2)$ في نقطة هي M' .

شكل توضيحي : الحالة $BM = \frac{1}{2}$.



تعليل طريقة الإنشاء .

في البداية نلاحظ أن النقطتين A و B لا تصلح لهما هذه الطريقة .

لأن : $\varphi(2i) = \frac{i(2i - 2i)}{2i - i} = 0$ و $\varphi(i)\ n'existe\ pas$.

إذن صورة A بهذا التحويل هي أصل المعلم .

و النقطة B لا صورة لها بهذا التحويل .

بعد ذلك ، رأينا أنه إذا كانت $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{2}$ فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C}')$ التي مركزها B و شعاعها 2 .

و يُمكن تعميم هذه النتيجة و نقول أنه إذا كانت $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها B و شعاعها BM فإن النقطة $M'((z))$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C}')$ التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{BM}$.

يكفي الآن تحديد الموقع الهندسي للنقطة M' على الدائرة $(\mathcal{C}_2)$.

و من أجل ذلك نستعين بالعلاقة التالية :

$$\arg(\varphi(z) - i) \equiv -\arg(z - i)\ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg(z_{M'} - z_B) + \arg(z_M - z_B) \equiv 0\ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_{M'} - z_B}{1 - 0}\right) + \arg\left(\frac{z_M - z_B}{1 - 0}\right) \equiv 0\ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \overline{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM'})} + \overline{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM})} \equiv 0\ [2\pi]$$

و هذا يعني أن الزاويتين $\overline{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM})}$ و $\overline{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM'})}$ لهما قياسين متعاكسين جبريا. و لتحقيق ذلك نرسم مماثلة الزاوية $\overline{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM})}$ بالنسبة للمحور (D) فنحصل على النقطة M' .

التمرين الثاني III 1

$$\varphi(z)=z \iff i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)=z$$
$$\iff z(z-i)=i(z-2i)$$
$$\iff z^2-i\,z=i\,z+2$$
$$\iff z^2-2i\,z-2=0\quad;\quad(\Delta=4)$$
$$\iff u=i+1\quad et\quad v=i-1$$

التمرين الثاني III 2 أ

$$\frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v}=\frac{\frac{i(z-2i)}{(z-i)}-(i+1)}{\frac{i(z-2i)}{(z-i)}-(i-1)}$$
$$=\frac{i(z-2i)-(z-i)(i+1)}{i(z-2i)-(z-i)(i-1)}$$
$$=\frac{1+i-z}{1-i+z}=-\left(\frac{z-(1+i)}{z-(i-1)}\right)=-\left(\frac{z-u}{z-v}\right)$$

التمرين الثاني III 2 ب

$$\frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v}=-\left(\frac{z-u}{z-v}\right)\iff\frac{u-\varphi(z)}{v-\varphi(z)}=-\left(\frac{u-z}{v-z}\right)$$
$$\Rightarrow\ \arg\left(\frac{u-\varphi(z)}{v-\varphi(z)}\right)\equiv\arg\left(-\left(\frac{u-z}{v-z}\right)\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow\ \arg\left(\frac{u-\varphi(z)}{v-\varphi(z)}\right)\equiv\arg(-1)+\arg\left(\frac{u-z}{v-z}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow\ \arg\left(\frac{z_C-z_{M'}}{z_D-z_{M'}}\right)\equiv\pi+\arg\left(\frac{z_C-z_M}{z_D-z_M}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow\ \overline{(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C})}\equiv\pi+\overline{(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})}+2k\pi$$
$$\Rightarrow\ \overline{(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C})}\equiv\pi+0+2k\pi$$
$$\Rightarrow\ \overline{(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C})}\equiv(1+2k)\pi\quad;\quad(1+2k)\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow\ \boxed{\overline{(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C})}\equiv0[\pi]}\quad(*)$$

التمرين الثاني III 2 ج

إذا كانت M و C و D نقط مستقيمية . فإن : $\overline{(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})}\equiv0\ [\pi]$.

و منه حسب $(*)$ نستنتج أن : $\overline{(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C})}\equiv0\ [\pi]$.

يعني أن M' و D و C نقط مستقيمية .

و بذلك نحصل على النظمة التالية : $\begin{cases}M\ \text{و}\ C\ \text{و}\ D\ \text{مستقيمية}\\ M'\ \text{و}\ C\ \text{و}\ D\ \text{مستقيمية}\end{cases}$

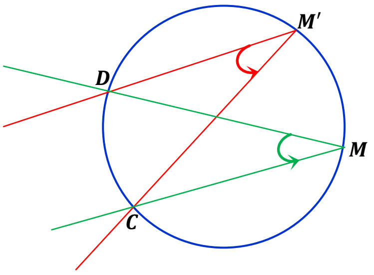
يعني : $M\in(DC)$ و . $M'\in(DC)$

إذن M و M' و C و D نقط مستقيمية .

إذا كانت M و C و D غير مستقيمية .

$$\frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v}=-\left(\frac{z-u}{z-v}\right)\iff\frac{u-\varphi(z)}{v-\varphi(z)}=-\left(\frac{u-z}{v-z}\right)$$
$$\Rightarrow\ \arg\left(\frac{z_C-z_{M'}}{z_D-z_{M'}}\right)\equiv\pi+\arg\left(\frac{z_C-z_M}{z_D-z_M}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow\ \overline{(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C})}\equiv\pi+\overline{(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})}+2k\pi$$
$$\Rightarrow\ \overline{(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C})}\equiv\overline{(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})}+(1+2k)\pi$$
$$\Rightarrow\ \overline{(\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C})}\equiv\overline{(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC})}\ [\pi]$$

$\Rightarrow$ $\boxed{M'\ \text{و}\ M\ \text{و}\ C\ \text{و}\ D\ \text{نقط متداورة}}$



التمرين الثاني III 3

سوف نستعمل في هذا السؤال القاعدة المهمة التالية :

$$\boxed{e^{ix}+e^{iy}=2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\,e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$$

لدينا :

$$\varphi(z)=\frac{i(z-2i)}{z-i}=\frac{i\left(i+e^{i\theta}-2i\right)}{i+e^{i\theta}-i}$$
$$=\frac{i\left(e^{i\theta}-i\right)}{e^{i\theta}}=\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}\left(e^{i\theta}+e^{\frac{-i\pi}{2}}\right)}{e^{i\theta}}$$
$$=\frac{e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}+e^{i0}}{e^{i\theta}}$$
$$=\frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\theta}}$$
$$=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$
$$=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$\Rightarrow\ \boxed{\begin{cases}|\varphi(z)|=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\ \arg(\varphi(z))\equiv\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\ [2\pi]\end{cases}}$$

التمرين الثالث 1

لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E)\ :\ 3x-5y=13$

في البدية نلاحظ أن المعادلة (E) قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$.
و ذلك لأن القاسم المشترك الأكبر لـ 3 و 5 (أي العدد 1) يقسم العدد 13
لنحدد أولا حلا خاصا للمعادلة (E) باستعمال خوارزمية أقليدس .

$$\boxed{\begin{array}{c|c}5&3\\2&1\end{array}\ \Rightarrow\ 2=5-3\times1}\quad(1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c|c}3&2\\1&1\end{array}\ \Rightarrow\ 1=3-1\times2}\quad(2)$$

$$\boxed{\begin{array}{c|c}2&1\\0&2\end{array}\ \Rightarrow\ just\ stop\ right\ here}$$

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 3 و 5 هو أخر باقي غير منعدم في القسمات المتتالية . يعني $5\wedge3=1$.

في الحقيقة ، نحن لا نحتاج لاستدعاء خوارزمية أقليدس بضخامتها لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين 3 و 5 . يكفي أن نلاحظ أن 3 و 5 عددان أوليان موجبان إذن فهما أوليان فيما بينهما ($5\wedge3=1$).

لقد تم استدعاء أقليدس و خوارزميته لتحديد الحل الخاص للمعادلة (E)
و هذا ما سوف أعرضه الآن :

لدينا :

$$1=3-1\times2\quad;\quad d'après\ (2)$$
$$=3-1\times(5-3\times1)\ ;\ d'après\ (1)$$
$$=3-5\times1+3\times1$$
$$=2\times3-5\times1$$

إذن : $3(2)-5(1)=1$.

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد 13 نحصل على :

$$3\times 26-5\times 13=13$$

إذن الزوج $(26\,,13)$ حل خاص للمعادلة (E) .

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) . و ننطلق من النظمة التالية :

$$\begin{cases}3x-5y=13\\ 3\times 26-5\times 13=13\end{cases}$$

ننجز عملية الطرح بين هاتين المعادلتين فنحصل على :

$$3(x-26)+5(13-y)=0$$

يعني : $3(x-26)=5(y-13)$ $(*)$

إذن 3 يقسم الجداء $5(y-13)$.

و بما أن $5\wedge 3=1$ (3 و 5 أوليان فيما بينهما).

فإنه حسب $Gauss$ نستنتج أن 3 يقسم العدد $(y-13)$.

$$\Rightarrow\ (\exists k'\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y-13=3k'$$
$$\Rightarrow\ (\exists k'\epsilon\mathbb{Z})\ ;\ y=3k'+13$$

نُعوض y بـ $(3k'+13)$ في الكتابة $(*)$ فنحصل على :

$$3(x-26)=5(3k')$$

أي : $x=5k'+26$

إذن كل حل من حلول المعادلة (E) يُكتب على شكل $(5k'+26\,;3k'+13)$ حيث $k'\epsilon\mathbb{Z}$.

عكسيا : نلاحظ أن جميع الأزواج $(5k'+26\,;3k'+13)$ من $\mathbb{Z}^2$ هي حلول للمعادلة (E) .

لأن : $3(5k'+26)-5(3k'+13)=13\ ;\ \forall k'\epsilon\mathbb{Z}$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\{(5k'+26\ ;\ 3k'+13)\ ;\ k'\epsilon\mathbb{Z}\}$$

ملاحظة : عندما نضع $k'=k-5$ نجد أن : $\begin{cases}x=5k+1\\ y=3k-2\end{cases}$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) تأخذ شكلا آخر و هو الآتي :

$$S=\{(5k+1\ ;\ 3k-2)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

التمرين الثالث 2

نفترض أن $\frac{x}{y}$ عدد نسبي . إذن يوجد m من $\mathbb{Z}$ حيث $x=ym$

نُعوض x بـ my في المعادلة (E) نجد : $3my-5y=13$

يعني : $y(3m-5)=13$.

و منه نستنتج أن y يقسم العدد 13 .

و نعلم أن 13 عدد أولي .

إذن قواسمه هي الأعداد النسبية : $\{-13\,,-1\,,1\,,13\}$.

إذن : $y\ \epsilon\ \{-13\,,-1\,,1\,,13\}$

يعني أن : $y=3k-2\ \epsilon\ \{-13\,,-1\,,1\,,13\}$

و لدينا :

$$\begin{aligned}&(3k-2)=-13\ \Rightarrow\ k=\frac{-11}{3}\notin\mathbb{Z}\\ &(3k-2)=-1\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}\\ &(3k-2)=1\ \Rightarrow\ k=1\ \epsilon\ \mathbb{Z}\\ &(3k-2)=13\ \Rightarrow\ k=5\ \epsilon\ \mathbb{Z}\end{aligned}$$

إذن : $k\,\epsilon\,\{1\,;5\}$

و لدينا : $k=1\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=6\\ y=1\end{cases}$

و لدينا : $k=5\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=26\\ y=13\end{cases}$

إذن حلول المعادلة (E) التي من أجلها يكون $\frac{x}{y}$ عددا صحيحا نسبيا هي :

$$\{(6\,;\,1)\ et\ (26\,;13)\}$$

التمرين الثالث 3

للإجابة على هذا السؤال نستعمل مبدأ خوارزمية أقليدس التالي :

$$\begin{array}{c|c}a&b\\ c&d\end{array}\ \Rightarrow\ a\wedge b=b\wedge c$$

ننجز القسمة الأقليدية للعدد $(5k+1)$ على العدد $(3k-2)$

نحصل على : $\begin{array}{c|c}5k+1&3k-2\\ 2k+3&1\end{array}$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نستنتج أن :

$$(5k+1)\wedge(3k-2)=(3k-2)\wedge(2k+3)\quad(1)$$

و لدينا : $\begin{array}{c|c}3k-2&2k+3\\ k-5&1\end{array}$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نستنتج أن :

$$(3k-2)\wedge(2k+3)=(2k+3)\wedge(k-5)\quad(2)$$

و لدينا : $\begin{array}{c|c}3k+3&k-5\\ 13&2\end{array}$

إذن حسب مبدأ خوارزمية أقليدس نستنتج أن :

$$(2k+3)\wedge(k-5)=(k-5)\wedge 13\quad(3)$$

من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$(5k+1)\wedge(3k-2)=(k-5)\wedge 13$$

التمرين الثالث 4

لنحل في $\mathbb{Z}^2$ النظمة التالية : $\begin{cases}3x-5y=13\\ x\wedge y=13\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5k+1\\ y=3k-2\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\\ (5k+1)\wedge(3k-2)=13\end{cases}$$

إذن حسب نتيجة السؤال 3) نستنتج أن :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=5k+1\\ y=3k-2\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\\ (k-5)\wedge 13=13\end{cases}$$

من الكتابة $(k-5)\wedge 13=13$ نستنتج أن 13 يقسم العدد 13 .

إذن يوجد n من $\mathbb{Z}$ بحيث $(k-5)=13n$. يعني : $k=13n+5$

نُعوض إذن k بـ $(13n+5)$ في تعبيري x و y فنحصل على :

$$\begin{cases}x=5(13n+5)+1=65n+26\\ y=3(13n+5)-2=39n+13\end{cases}$$

إذن حلول المعادلة (E) التي من أجلها $x\wedge y=13$ هي الأعداد الصحيحة النسبية التي تكتب بصفة عامة على الشكل التالي :

$$S=\{(65n+26\ ;\ 39n+13)\ ;\ n\,\epsilon\,\mathbb{N}\}$$

التمرين الرابع 1

لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(e^{-x})=(+\infty)(1)$$
$$=+\infty\ \notin\ \mathbb{R}$$

إذن الدالة φ غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر .

و نفسر هندسيا هذه النهاية : $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right)=+\infty$

بقولنا : منحنى الدالة φ يقبل نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $(0,0)$ موجه نحو الأعلى .

التمرين الرابع 2

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\left(\frac{e^{x}}{x}\right)}$$
$$= 0\times 0 = 0$$

لندرس الآن تغيرات الدالة φ .

في البداية نلاحظ أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ لأنها عبارة عن جداء دالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$.

و لدينا من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}_*^+$:

$$\varphi'(x) = \left(\sqrt{x}\,e^{-x}\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' e^{-x} + \sqrt{x}\left(e^{-x}\right)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{-x} + \sqrt{x}\left(-e^{-x}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)e^{-x} = (1-2x)\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

نلاحظ أن : $\boxed{(\forall\, x \in \mathbb{R}^+)\ ;\ \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} > 0}$

إذن إشارة $\varphi'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-2x)$.

إذا كان : $x = \frac{1}{2}$ فإن : $\varphi'(x) = 0$.

إذا كان : $x > \frac{1}{2}$ فإن : $\varphi'(x) < 0$.

إذا كان : $x < \frac{1}{2}$ فإن : $\varphi'(x) > 0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
φ	0	↗	$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	0

التمرين الرابع 3 أ

لدينا : $\varphi(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x}\cdot e^{-x} = x\ ;\ x>0$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x}\,e^{-x}\right) = \ln x\ ;\ x>0$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\sqrt{x}\right) + \ln\left(e^{-x}\right) = \ln x\ ;\ x>0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(x) - x = \ln x\ ;\ x>0$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) - 2x = 2\ln x\ ;\ x>0$$
$$\Leftrightarrow \ln(x) + 2x = 0\ ;\ x>0$$
$$\Leftrightarrow \psi(x) = 0\ ;\ x>0$$

التمرين الرابع 3 ب

لدينا ψ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ لأنها مجموع دالتين اعتياديتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$. و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\psi'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{1+2x}{x}}$$

نلاحظ أن : $(\forall\, x>0)\ ;\ \psi'(x) > 0$

إذن ψ دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$.

إذن ψ تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $\psi(]0,+\infty[)$.

و لدينا : $\psi(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to0^+}\psi(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\psi(x)\right[$
$$= \left]\lim_{x\to0^+}(\ln(x)+2x)\ ;\ \lim_{x\to\infty}(\ln(x)+2x)\right[$$
$$= \left](-\infty)+0\ ;\ \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}+2\right)\right[$$
$$=]-\infty\ ;\ (+\infty)(0+2)[= \mathbb{R}$$

إذن ψ تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.

يعني أن : $(\forall\, y \in \mathbb{R}), (\exists!\, x \in]0,+\infty[\,)\ ;\ \psi(x) = y$

يعني أن كل عنصر من $\mathbb{R}$ يقبل سابقا وحيدا بالتقابل ψ من $]0,+\infty[$.

بما أن $0 \in \mathbb{R}$ فإن 0 يمتلك سابقا وحيدا α من المجال $]0,+\infty[$.

يعني : $(\exists!\ \alpha > 0)\ ;\ \psi(\alpha) = 0$

يعني أن المعادلة $\psi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+^*$.

لنبين الآن أن : $\frac{2}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$.

لدينا : $\psi\left(\frac{2}{5}\right) = \psi(0{,}4) = \ln(0{,}4) + 2(0{,}4) \approx -0{,}11$.

و لدينا كذلك : $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \psi(0{,}5) = \ln(0{,}5) + 2(0{,}5) \approx 0{,}30$

نلاحظ أن : $-0{,}11 < 0 < 0{,}30$.

يعني أن : $\psi\left(\frac{2}{5}\right) < \psi(\alpha) < \psi\left(\frac{1}{2}\right)$.

نُدخل الدالة التزايدية قطعا ψ^{-1} على هذه الأعداد المنتمية إلى $\mathbb{R}$ نجد :

يعني بكل بساطة أن : $\psi^{-1}\left(\psi\left(\frac{2}{5}\right)\right) < \psi^{-1}(\psi(\alpha)) < \psi^{-1}\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

و ذلك لأن التطبيق $\psi^{-1}\circ\psi = Id_{]0,+\infty[}$ معرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi^{-1}\circ\psi\ :\ ]0,+\infty[\ \longrightarrow\ ]0,+\infty[\\ \qquad\qquad\qquad x\ \longrightarrow\ x \end{array}}$$

خلاصة السؤال ب : المعادلة $\psi(x) = 0$ لها حل وحيد α محصور قطعا بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{5}$.

التمرين الرابع 3 ج

لدينا φ دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

و لدينا : $I = \left]\frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{2}\right[\subset \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$

إذن صورة المجال $\left]\frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{2}\right[$ بالدالة المتصلة φ هو المجال $\left]\varphi\left(\frac{2}{5}\right), \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right[$.

إذن نكتب : $\varphi(I) = \varphi\left(\left]\frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{2}\right[\right) = \left]\varphi\left(\frac{2}{5}\right)\ ;\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right[$
$$=]\varphi(0{,}4)\ ;\ \varphi(0{,}5)[$$
$$\approx]0{,}423\ ;\ 0{,}428[\ \subset\ ]0{,}4\ ;\ 0{,}5[$$

إذن : $\varphi(I) \subset I$

لنبين الآن أن : $(\forall x\in I)\ ;\ |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{8}$

لدينا : $(\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+)\ ;\ \varphi'(x) = \frac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}}$.

في البداية نلاحظ أن : $x \in I \Rightarrow x < \frac{1}{2}$
$$\Rightarrow 2x < 1$$
$$\Rightarrow 1 - 2x > 0$$
$$\Rightarrow \frac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}} > 0\ ;\ car\ \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} > 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\varphi'(x) > 0}\quad (1)$$

من جهة أخرى :

لدينا : $x > \frac{2}{5} \Rightarrow (1-2x) < \frac{1}{5}$

و لدينا : $x > \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{\frac{5}{4}}$

و لدينا : $x > \frac{2}{5} \Rightarrow e^{-x} < e^{\frac{-2}{5}}$

نضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد :

$$\varphi'(x) = \frac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot e^{\frac{-2}{5}}$$

$$\frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot e^{\frac{-2}{5}} \approx 0{,}015 < \frac{1}{8}$$

إذن : $\boxed{\left(\forall\, x > \frac{2}{5}\right)\ ;\ \varphi'(x) < \frac{1}{8}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall\, x \in I)\ ;\ 0 < \varphi'(x) < \frac{1}{8}$

و بالتالي : $\boxed{(\forall\, x \in I)\ ;\ |\varphi'(x)| < \frac{1}{8}}$

التمرين الرابع 4 أ

سوف نستعمل بإذن الله البرهان بالترجع .

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n)\ :\ u_n \in I$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 \in I$.

إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ و نفترض أن (P_n) صحيحة.

$$\begin{aligned}(P_n)\ est\ vraie &\Rightarrow u_n \in I\\ &\Rightarrow \varphi(u_n) \in \varphi(I) \subset I\\ &\Rightarrow \varphi(u_n)\ \in\ I\\ &\Rightarrow u_{n+1}\ \in\ I\\ &\Rightarrow (P_{n+1})\ est\ vraie\end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية الترجعية التالية :

$$\boxed{\begin{cases}(P_0)\ est\ vraie\\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}\end{cases}}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(P_n)\ est\ toujours\ vraie$.

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \in I$.

لدينا φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال I .

إذن نستطيع تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال يوجد ضمن I

نختار المجال $[\alpha ; u_n]$ أو $[u_n ; \alpha]$ الذي يوجد ضمن I

لأن $\alpha \in I$ و $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n \in I$.

لدينا φ متصلة على المجال $[\alpha\ ;\ u_n]$.

و لدينا φ قابلة للاشتقاق على المجال $]\alpha\ ;\ u_n[$.

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية نستنتج أن :

$$\exists\, c \in\,]\alpha\,;\,u_n[\ ;\ \frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \varphi'(c)$$

$$\Rightarrow\ \exists\, c \in\,]\alpha\,;\,u_n[\ ;\ \left|\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha}\right| = |\varphi'(c)|$$

نعلم أن : $\boxed{(\forall\, x \in I)\ ;\ |\varphi'(x)| < \frac{1}{8}}$

إذن : $|\varphi'(c)| < \frac{1}{8}$ لأن $c \in\,]\alpha\,;\,u_n[\ \subset I$.

نستنتج إذن أن :

$$\exists\, c \in\,]\alpha\,;\,u_n[\ ;\ \left|\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)}{u_n - \alpha}\right| = |\varphi'(c)| < \frac{1}{8}$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| < \frac{1}{8}|u_n - \alpha|$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{8}|u_n - \alpha|$

التمرين الرابع 4 ب

الطريقة الأولى : سوف نستعمل البرهان بالترجع (إذا أمكن ذلك)

نعتبر العبارة (Q_n) التالية : $(Q_n)\ :\ |u_{n+1} - \alpha| < \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_n - \alpha|$

من أجل $n = 0$ نريد أن نبين أن $|u_1 - \alpha| < |u_0 - \alpha|$.

و من أجل ذلك سوف نحتاج إلى الأشياء التالية :

$$\boxed{\begin{cases}(\forall\, x \geq \alpha)\ ;\ \varphi(x) \leq x\\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ est\ décroissante\end{cases}}$$

هذه الطريقة سوف تؤدي بنا إلى متاهة كبيرة لذلك أقترح عليكم طريقة أخرى غير هذا الترجع .

الطريقة الثانية :

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{8}|u_n - \alpha|$

إذن نطبق هذه النتيجة من أجل $(n-1)$ نجد :

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| &< \frac{1}{8}|u_{n-1} - \alpha|\\ &< \left(\frac{1}{8}\right)^2 |u_{n-2} - \alpha|\\ &\ \ \vdots\quad \vdots\quad \vdots\\ &< \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_{n-n} - \alpha|\end{aligned}$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| < \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{8}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{8}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1 .

إذن : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ و منه : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$

و بذلك نحصل على الوضعية التالية :

$$\underbrace{0}_{\substack{n\infty \\ \searrow 0}} < |u_n - \alpha| < \underbrace{\left(\frac{1}{8}\right)^n |u_0 - \alpha|}_{\substack{n\infty \\ \searrow 0}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty} |u_n - \alpha| = 0$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} u_n = \alpha}$

إضافة : لقد حددت القيمة العددية لـ α باستعمال الآلة الحاسبة فوجدت القيمة التالية : $\alpha = 0{,}4263027510068$.

و السؤال الذي يطرح نفسه هو : how did I do it .

الطريقة سهلة هي من ابتكاري أيام كنت تلميذا 2004 .

لتحديد α الذي يحقق $\varphi(\alpha) = \alpha$ باستعمال الآلة الحاسبة .

ننطلق من قيمة بدئية مثلا نأخذ $0{,}45$. لأنه يجب أن يكون $u_0 \in I$

- نكتب في الآلة الحاسبة العدد 0,45 ثم نضغط على الزر $\boxed{=}$.
- نمسح ما كتب على الشاشة باستعمال $\boxed{AC}$ أو $\boxed{On}$.
- نكتب على الشاشة التعبير $(\sqrt{Ans}) \times (e\hat{\ }(-Ans))$.
- ثم نضغط تباعا على الزر $\boxed{=}$ مرات عديدة .
- و سوف نحصل على قيم متغيرة و التي تصبح ثابتة بعد 7 مرات.
- و تساوي $\alpha = \boxed{0{,}426302751}$.

التمرين الرابع 4 ج

ليكن n أصغر عدد صحيح طبيعي حيث $|u_n-\alpha|<10^{-4}$.

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|<\left(\frac{1}{8}\right)^n|u_0-\alpha|$

و نعلم أن $0,4<\alpha<0,5$ و أن $0,4<u_0<0,5$.

إذن : $-0,1<(u_0-\alpha)<0,1$

يعني : $|u_0-\alpha|<10^{-1}$

و منه : $\left(\frac{1}{8}\right)^n|u_0-\alpha|<\left(\frac{1}{8}\right)^n\cdot10^{-1}$.

إذن العدد n الذي نبحث عنه هو أكبر عدد صحيح طبيعي يُحقق :

$$|u_n-\alpha|<10^{-4}<\left(\frac{1}{8}\right)^n\cdot10^{-1}$$

و سوف نهتم فقط بالمتفاوتة $10^{-4}<\left(\frac{1}{8}\right)^n\cdot10^{-1}$.

التي تصبح : $10^{-3}<8^{-n}$ يعني : $\ln(10^{-3})<\ln(8^{-n})$

أي : $-3\ln10<-n\ln8$

يعني : $n\ln8<3\ln10$. أي : $n<\frac{3\ln10}{\ln8}\approx3,32$

أي : $n<3,32$

و أكبر عدد صحيح طبيعي يحقق هذه المتفاوتة هو $n=3$.

و بالتالي 3 هو أصغر عدد صحيح طبيعي يُحقق : $|u_3-\alpha|<10^{-4}$

و بالفعل بالاستعانة بالآلة الحاسبة سوف نجد :

$$\begin{cases}|u_0-\alpha|>10^{-4}\\|u_1-\alpha|>10^{-4}\\|u_2-\alpha|>10^{-4}\end{cases}\quad \text{و} \quad \begin{cases}|u_3-\alpha|<10^{-4}\\|u_4-\alpha|<10^{-4}\\|u_5-\alpha|<10^{-4}\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\end{cases}$$

للتعمق أضيف ما يلي :

نضع $u_0=0,45$ إذن باستعمال الآلة الحاسبة نحصل على :

$$\begin{aligned}u_1&=\boxed{0,42}7733967\\u_2&=\boxed{0,426}407041\\u_3&=\boxed{0,4263}1043\\u_4&=\boxed{0,42630}3316\\u_5&=\boxed{0,4263027}92\\u_6&=\boxed{0,42630275}4\\u_7&=\boxed{0,426302751}\\u_8&=\boxed{0,426302751}\\u_9&=\boxed{0,426302751}\\&\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\end{aligned}$$

التمرين الخامس I 1

لنبين أن : $(\forall t>0)\ ;\ \ln t\le t-1$

و من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية ψ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي :

$\psi(t)=\ln t-t+1$

من خلال تعبير الدالة العددية ψ نلاحظ أنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ لأنها عبارة عن مجموع دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

و لدينا : $(\forall t>0)\ ;\ \psi'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$

إذا كان $t=1$ فإن $\psi'(t)=0$.

إذا كان $t>1$ فإن $\psi'(t)<0$.

إذا كان $t<1$ فإن $\psi'(t)>0$.

و لدينا : $\lim\limits_{t\to0^+}\psi(t)=\lim\limits_{t\to0^+}(\ln t-t+1)=-\infty$

و لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\psi(t)&=\lim_{t\to+\infty}(\ln t-t+1)\\&=\lim_{t\to+\infty}t\left(\frac{\ln t}{t}-1+\frac{1}{t}\right)\\&=(+\infty)(0-1+0)\\&=-\infty\end{aligned}$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة ψ كما يلي :

t	0		1		$+\infty$
$\psi'(t)$		$+$	0	$-$	
ψ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ أن الدالة ψ تقبل مطرافا عند النقطة 1 .

لأن $\psi'(x)$ تنعدم عند 1 و تتغير إشارتها بجوار 1 .

و هذا المطراف عبارة عن قيمة قصوية للدالة ψ و هي 0 .

إذن : $\forall t\in]0,+\infty[\ ;\ \psi(t)\le0$.

يعني : $(\forall t>0)\ ;\ \ln t-t+1\le0$

أي : $(\forall t>0)\ ;\ \ln t\le(t-1)$.

التمرين الخامس I 2 أ

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}\right)\\&=\text{"}\left(\frac{1}{1-(-\infty)}\right)\text{"}=0=f(0)\end{aligned}$$

إذن f دالة متصلة على يمين الصفر .

التمرين الخامس I 2 ب

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)&=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)\\&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}\right)=\text{"}\left(\frac{1}{0-(-\infty)}\right)\text{"}\\&=0=f_d'(0)\end{aligned}$$

إذن f قابلة للاشتقاق على يمين الصفر . و العدد المشتق هو $f_d'(0)=0$

و نفسر ذلك هندسيا بقولنا : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس أفقي في النقطة $(0,0)$ على اليمين .

التمرين الخامس I 2 ج

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}\right)\\&=\text{"}\left(\frac{1}{1-0^+}\right)\text{"}=1\end{aligned}$$

التمرين الخامس I 3

من خلال تعبير الدالة f نلاحظ أنها دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ لأنها عبارة عن خارج دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ (x-\ln x)\ge1>0$

يعني أن المقام يُخالف دائما الصفر على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا :
$$(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)'$$
$$=\frac{(x-\ln x)-x(x-\ln x)'}{(x-\ln x)^2}$$
$$=\frac{(x-\ln x)-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}$$
$$=\frac{x-\ln x-x+1}{(x-\ln x)^2}$$
$$=\boxed{\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}}$$

إذا كان $x=e$ فإن $f'(x)=0$.

إذا كان $x<e$ فإن $f'(x)>0$.

إذا كان $x>e$ فإن $f'(x)<0$.

و لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{e}{e-1}$	↘	1
$f(x)$			$+$		

التمرين الخامس I 4 أ

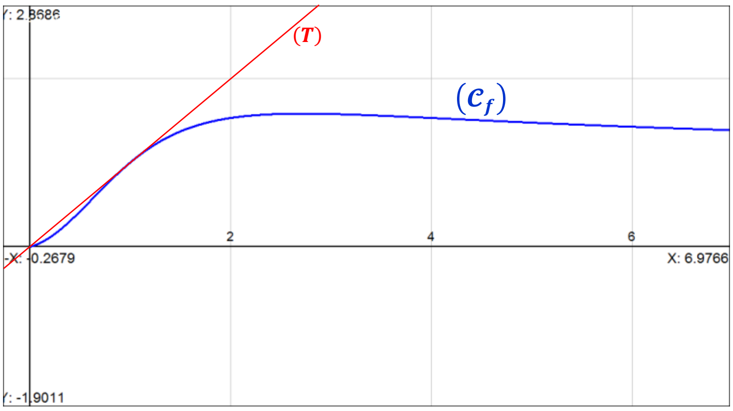
معادلة المماس (T) لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي أفصولها 1 تُكتب على شكل :
$$(T)\ :\ y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

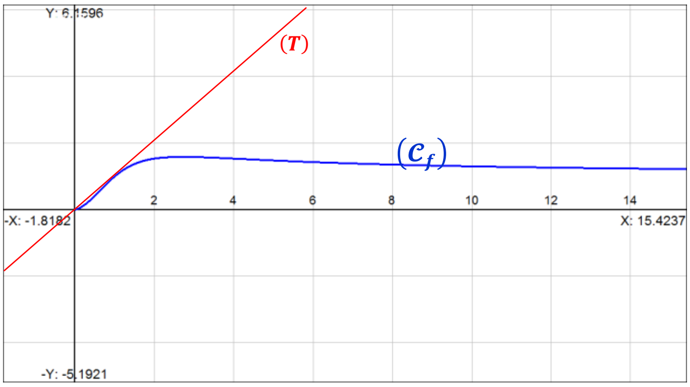
و لدينا : $f(1)=\dfrac{1}{1-\ln 1}=1$

و لدينا : $f'(1)=\dfrac{1-\ln 1}{(1-\ln 1)^2}=1$

إذن : $(T)\ :\ y=1(x-1)+1$. يعني : $\boxed{(T)\ :\ y=x}$

التمرين الخامس I 4 ب





التمرين الخامس I 5

في البداية لدينا حسب نتيجة السؤال 1) :
$$(\forall x>0)\ ;\ \ln x\le x-1<x$$

إذن : $(\forall x\ge 1)\ ;\ 0<\ln x<x$

يعني : $(\forall x\ge 1)\ ;\ 0<\frac{\ln x}{x}<1 \quad (*)$

من خلال تعبير المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ نلاحظ أنها عبارة عن مجموع حدود متتابعة من المتتالية الهندسية $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$.

إذن :
$$v_n=\left(\frac{\ln x}{x}\right)^0+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^1+\cdots+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n$$
$$=\frac{1-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\ln x}{x}\right)}$$

من جهة أخرى نلاحظ أن $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}$ متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ و هو عدد موجب و أصغر من 1 حسب $(*)$.

إذن : $(\forall x\ge1)\ ;\ \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}=0$

و منه :
$$\lim_{n\infty}(v_n)=\lim_{n\infty}\left(\frac{1-\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{\ln x}{x}}\right)$$
$$=\left(\frac{1-0}{1-\frac{\ln x}{x}}\right)=\frac{x}{x-\ln x}=f(x)$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x\ge1)\ ;\ \lim\limits_{n\infty} v_n(x)=f(x)}$

$v_n(x)$ est une suite de fonctions qui converge simplement vers la fonction limite f

التمرين الخامس II 1

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و a عنصر من I . فإن الدالة :
$$\boxed{\begin{aligned}F\ :\ ]0,+\infty[\ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x\ &\longrightarrow \int_1^x f(t)\,dt\end{aligned}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في 1

أو بتعبير آخر : $\begin{cases}F'(x)=f(x)\ ;\ \forall x>0\\ F(1)=0\end{cases}$

يعني أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و مشتقتها على هذا المجال هي الدالة f .

رأينا من خلال دراسة الدالة f أنها موجبة دائما على المجال $]0,+\infty[$.

إذن F دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

التمرين الخامس — II 2

لدينا F تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ و تنعدم في 1 . إذن :

$$x \geq 1 \;\Big|\; \begin{array}{l} \Rightarrow\ F(x) \geq F(1)\ ;\ car\ F\ est\ \nearrow \\ \Rightarrow\ F(x) \geq 0\ ;\ car\ F(1) = 0 \end{array}$$

$$0 < x < 1 \;\Big|\; \begin{array}{l} \Rightarrow\ F(x) \leq F(1)\ ;\ car\ F\ est\ \nearrow \\ \Rightarrow\ F(x) \leq 0\ ;\ car\ F(1) = 0 \end{array}$$

إذن F دالة موجبة على المجال $[1,+\infty[$.

و F دالة سالبة على المجال $]0\,;1]$.

التمرين الخامس — II 3 أ

لدينا حسب متفاوتة السؤال (1) من الجزء الأول :

$$(\forall x > 0)\ ;\ \ln x \leq x - 1$$

إذن : $\forall x \in]0\,;1]\ ;\ x - \ln x \geq 1$

يعني : $\forall x \in]0\,;1]\ ;\ \dfrac{1}{x - \ln x} \leq 1$

يعني : $(1)\ \boxed{\forall x \in]0\,;1]\ ;\ \dfrac{x}{x - \ln x} \leq x}$

من جهة أخرى لدينا حسب جدول تغيرات الدالة f : f دالة موجبة على المجال $]0,+\infty[$. يعني : $(\forall x > 0)\ ;\ f(x) > 0$

بما أن : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

فإنه نستطيع أن نكتب : $(\forall x > 0)\ ;\ f(x) \geq 0$.

و منه : $\forall x \in]0\,;1]\ ;\ f(x) \geq 0$

أي : $(2)\ \boxed{\forall x \in]0\,;1]\ ;\ \dfrac{x}{x - \ln x} \geq 0}$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{\forall x \in]0\,;1]\ ;\ 0 \leq \frac{x}{x - \ln x} \leq x}$$

يعني : $\boxed{(\forall t \in]0\,;1])\ ;\ 0 \leq f(t) \leq t}$ ■

التمرين الخامس — II 3 ب

ليكن x و t عنصرا من المجال $]0\,;1]$ و ننطلق من التأطير التالي :

$$t \in]0\,;1] \;\Big|\; \begin{array}{l} \Rightarrow\ 0 \leq f(t) \leq t \\ \Rightarrow\ \displaystyle\int_x^1 0\, dt \leq \int_x^1 f(t)\, dt \leq \int_x^1 t\, dt \\ \quad car\ ces\ fonctions\ sont\ continues\ et\ x < 1 \\ \Rightarrow\ 0 \leq -\displaystyle\int_1^x f(t)\, dt \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\ \Rightarrow\ 0 \leq -F(x) \leq \dfrac{1 - x^2}{2} \\ \Rightarrow\ \dfrac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0 \end{array}$$

و من هذا التأطير ننتقل مباشرة إلى نهايات جميع الأطراف .

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right) \leq \lim_{x\to 0^+} F(x) \leq \lim_{x\to 0^+} 0$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{-1}{2} \leq \lim_{x\to 0^+} F(x) \leq 0}$$

التمرين الخامس — II 4

لدينا من أجل $x \in [1\,;e]$ لدينا f دالة تزايدية على هذا المجال $[1\,;e]$.

إذن :

$$x \geq 1 \;\Big|\; \begin{array}{l} \Rightarrow\ f(x) \geq f(1)\ ;\ car\ f\ est\ \nearrow \\ \Rightarrow\ f(x) \geq 1\ ;\ car\ f(1) = 1 \end{array}$$

و من أجل $x \in [e,+\infty[$ نلاحظ أن f تقابل من هذا المجال $[e,+\infty[$ نحو صورته $\left[1\,;\frac{e-1}{e}\right]$ لأنها متصلة و تناقصية قطعا على $[e,+\infty[$.

و بالتالي : $\forall x \in [e,+\infty[\ ;\ f(x) \in \left[1\,;\frac{e-1}{e}\right]$.

يعني : $\boxed{(\forall x \geq e)\ ;\ f(x) \geq 1}\ (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\boxed{(\forall x \geq 1)\ ;\ f(x) \geq 1}\ (\star)$

الآن ليكن t عنصرا من المجال $[x\,,+\infty[$ و $x > 1$.

إذن حسب $(\star)$ نستنتج أن $f(t) \geq 1$.

$$\begin{array}{l} \Rightarrow\ \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt \geq \int_1^x 1\, dt \\ \Rightarrow\ F(x) \geq [t]_1^x \\ \Rightarrow\ F(x) \geq x - 1 \\ \Rightarrow\ F(x) \geq \underbrace{(x - 1)}_{x \to +\infty\ \to\ +\infty} \\ \Rightarrow\ \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty} \end{array}$$

التمرين الخامس — II 5 أ

$$\begin{aligned} \int_1^x (1 + \ln t)\, dt &= \int_1^x 1\, dt + \int_1^x \underbrace{1}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{v(t)}\, dt \\ &= [t]_1^x + [t \ln t]_1^x - \int_1^x \left(t \cdot \frac{1}{t}\right) dt \\ &= [t]_1^x + [t \ln t]_1^x - [t]_1^x \\ &= [t \ln t]_1^x \\ &= x \ln x - 1 \ln 1 \\ &= x \ln x \end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} \int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt &= \int_1^x 1\, dt + \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt \\ &= [t]_1^x + \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt \\ &= x - 1 + \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt \end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt &= \int_1^x \underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{v(t)}\, dt \\ &= [(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x (\ln t) \cdot \left(\frac{1}{t}\right) dt \\ &= (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt \end{aligned}$$

إذن : $\displaystyle\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = (\ln x)^2 - \int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt$

أي : $\displaystyle 2\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = (\ln x)^2$

أي : $\displaystyle\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right) dt = \frac{(\ln x)^2}{2}$

و بالتالي : بالرجوع إلى التكامل الأول نكتب :

$$\boxed{\int_1^x \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt = (x - 1) + \frac{(\ln x)^2}{2}}$$

التمرين الخامس II 5 ب

ليكن t عددا حقيقيا بحيث $t \geq 1$.

من جهة أولى لدينا :

$$\left(\frac{t}{t-\ln t}\right)-(1+\ln t)=\frac{t-(1+\ln t)(t-\ln t)}{t-\ln t}$$
$$=\frac{t-(t-\ln t+t\ln t-(\ln t)^2)}{(t-\ln t)}$$
$$=\frac{\ln t-t\ln t+(\ln t)^2}{(t-\ln t)}$$
$$=\frac{(\ln t)(1-t+\ln t)}{(t-\ln t)}$$

من جهة ثانية لدينا حسب نتيجة السؤال 1) من الجزء الأول

$$\boxed{(\forall\, t>0)\ ;\ \ln t\leq t-1<t}$$

إذن : $(\forall\, t\geq 1)\ ;\ \begin{cases}1-t+\ln t\leq 0\\ t-\ln t>0\\ \ln t>\ln 1=0\end{cases}$

و منه : $(\forall\, t\geq 1)\ ;\ \dfrac{(\ln t)(1-t+\ln t)}{(t-\ln t)}\leq 0$

يعني : $(\forall\, t\geq 1)\ ;\ \left(\dfrac{t}{t-\ln t}\right)-(1+\ln t)\leq 0$

يعني : $(\forall\, t\geq 1)\ ;\ \left(\dfrac{t}{t-\ln t}\right)\leq (1+\ln t)$

يعني : $(\forall\, t\geq 1)\ ;\ f(t)\leq 1+\ln t$

التمرين الخامس II 5 ج

ليكن x و t عنصرين من المجال $[1,+\infty[$.

لدينا :

$$t\geq 1\ \Rightarrow\ f(t)\leq 1+\ln t$$
$$\Rightarrow\ \int_1^x f(t)\,dt\leq\int_1^x (1+\ln t)\,dt$$

car ces deux fonctions sont continues et $1<x$

$$\Rightarrow\ F(x)\leq x\ln x\quad ;\quad d'après\ 5)\ أ)$$

التمرين الخامس II 5 د

لدينا :

$$t\geq 1\ \Rightarrow\ \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow\ -\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2\leq 0$$
$$\Rightarrow\ 1-\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2\leq 1$$
$$\Rightarrow\ \left(1-\frac{\ln t}{t}\right)\left(1+\frac{\ln t}{t}\right)\leq 1$$
$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{\ln t}{t}\right)\leq\left(\frac{1}{1-\frac{\ln t}{t}}\right)\ ;\ \left(1-\frac{\ln t}{t}\right)>0$$

il est très facile de montrer que $1-\dfrac{\ln t}{t}>0$

en partant du fait que $\ln t<t$

$$\Rightarrow\ 1+\frac{\ln t}{t}\leq\frac{t}{t-\ln t}$$
$$\Rightarrow\ 1+\frac{\ln t}{t}\leq f(t)$$
$$\Rightarrow\ \int_1^x\left(1+\frac{\ln t}{t}\right)dt\leq\int_1^x f(t)\,dt$$

car ces fonctions sont continues et $1<x$

$$\Rightarrow\ (x-1)+\frac{(\ln x)^2}{2}\leq F(x)\quad ;\quad d'après\ 5)\ أ)$$

التمرين الخامس II 5 و

التكامل : $\displaystyle\int_1^e f(t)\,dt=\int_1^e\left(\frac{t}{t-\ln t}\right)dt$

يقيس مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين ذوا المعادلتين $x=1$ و $x=e$. و يقيس هذه المساحة بالوحدة $\|\vec{\imath}\|\times\|\vec{\jmath}\|\ cm^2$.

إضافة : إذا رمزنا لهذه المساحة بـ $\mathcal{A}$. فإن :

$$\boxed{\mathcal{A}=\int_1^e f(t)\,dt=F(e)}$$

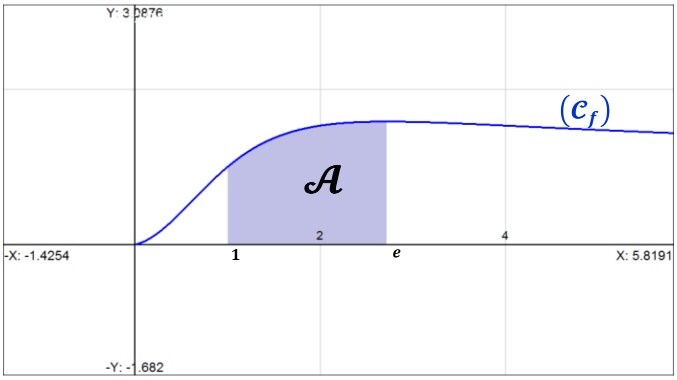
و يمكن إعطاء تأطير لهذه المساحة و ذلك باستعمال النتائج السابقة .

لدينا : $(\forall\, x\geq 1)\ ;\ (x-1)+\dfrac{(\ln x)^2}{2}\leq F(x)\leq x\ln x$

بما أن $e>1$ فإن : $(e-1)+\frac{(\ln e)^2}{2}\leq F(e)\leq e\ln e$

يعني : $\left(e-\frac{1}{2}\right)\leq\mathcal{A}\leq e$ يعني : $2{,}22\leq\mathcal{A}\leq 2{,}72$

و بالفعل عندما نحسب المساحة $\mathcal{A}$ باستعمال الحاسوب نجد أن $\mathcal{A}=2{,}46\ cm^2$ مع افتراض أن : $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1\ cm$.



أجوبة امتحان مدينة القنيطرة 2011

التمرين الأول I

تذكير : إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة $a\, z^2 + b\, z + c = 0$ فإن :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

نعتبر المعادلة التالية : $(E) \;:\; z^2 - a\, z + \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$

و ليكن z_1 و z_2 حليها في $\mathbb{C}$.

إذن : $z_1 \times z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |z_1 z_2| = 1 \\ \arg(z_1 z_2) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |z_1| \times |z_2| = 1 \\ \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

التمرين الأول II 1 أ

لدينا : $\begin{cases} |z_1| \times |z_2| = 1 \\ \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

إذن من أجل $z_1 = e^{i\theta}$ لدينا $|z_1| = 1$ و $\arg(z_1) \equiv \theta\ [2\pi]$.

و منه : $\begin{cases} |z_2| = 1 \\ \arg(z_2) \equiv \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\ [2\pi] \end{cases}$

و بالتالي : $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \left[1\,;\ \frac{\pi}{3} - \theta\right]$

التمرين الأول II 1 ب

سوف نستعمل أثناء الحساب القاعدة التالية :

$$\boxed{e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\, e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} a = z_1 + z_2 &= e^{i\theta} + e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta - \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta + \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{2}\right)} \\ &= 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} \end{aligned}$$

التمرين الأول II 2 أ

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي و $M'(z')$ صورتها بالتحويل F

إذن:

$$\begin{aligned} F(M) = M' &\iff f(z) = z' \\ &\iff \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) z = z' \\ &\iff z' = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) z \\ &\iff z' = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right) z \\ &\iff z' = \left(e^{\frac{-i\pi}{6}}\right) z \\ &\iff (z' - 0) = e^{\frac{-i\pi}{6}} (z - 0) \end{aligned}$$

إذن F عبارة عن دوران مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{6}$ أو ($\frac{11\pi}{6}$)

التمرين الأول II 2 ب

لدينا : $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{i\pi}{4}}$

و نعلم أن : $z_1 z_2 = a = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

إذن : $e^{\frac{i\pi}{4}} \times z_2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$.

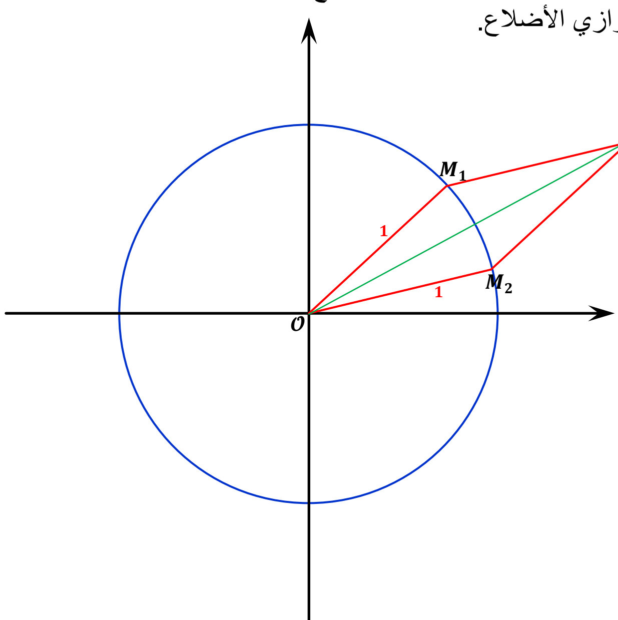
و منه : $e^{\frac{-i\pi}{4}} \times e^{\frac{i\pi}{4}} \times z_2 = e^{\frac{i\pi}{3}} \times e^{\frac{-i\pi}{4}}$. أي : $z_2 = e^{\frac{i\pi}{12}}$.

إذن : $f(z_1) = f\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right) = e^{\frac{i\pi}{4}} \times e^{\frac{-i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{12}} = z_2$.

نحصل إذن على : $f(z_1) = z_2$. أي : $F(M_1) = M_2$.

التمرين الأول II 2 ج

يُستحب في البداية رسم شكل توضيحي في ورقة مستقلة و ذلك من أجل معرفة طبيعة الشكل أولا، هل هو مربع أو مستطيل أو معين أو شبه منحرف أو متوازي الأضلاع.



لقد تم إيجاد موقع النقطة A باستعمال العلاقة التالية :

$$\begin{aligned} a = z_1 + z_2 &= e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} \\ &= \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right) e^{\frac{i\pi}{6}} \approx 1{,}93\, e^{\frac{i\pi}{6}} \end{aligned}$$

لنبين إذن أن الرباعي OM_1AM_2 معين .

و من أجل ذلك يكفي أن نبين أن جميع أضلاعه متقايسة .

لدينا : $F(M_1) = M_2$ حيث $F_O\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ دوران .

إذن : $(z_2 - 0) = e^{\frac{-i\pi}{6}}(z_1 - 0)$ و منه : $\left(\frac{z_2 - 0}{z_1 - 0}\right) = e^{\frac{-i\pi}{6}}$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \left|\frac{z_2 - 0}{z_1 - 0}\right| = \left|e^{\frac{-i\pi}{6}}\right| = 1 \\ &\Longrightarrow |z_2 - 0| = |z_1 - 0| \\ &\Longrightarrow |z_{M_2} - z_O| = |z_{M_1} - z_O| \\ &\Longrightarrow \boxed{OM_2 = OM_1} \quad (1) \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا : $z_1 + z_2 = a$ إذن : $(z_1 - a) = (0 - z_2)$

يعني : $(z_{M_1} - z_A) = (z_O - z_{M_2})$

يعني : $|z_{M_1} - z_A| = |z_O - z_{M_2}|$

يعني : $\boxed{AM_1 = OM_2}$ (2)

و بنفس الطريقة لدينا : $z_1+z_2=a$ إذن : $z_2-a=0-z_1$

أي : $(z_{M_2}-z_A)=(z_O-z_{M_1})$

أي : $|z_{M_2}-z_A|=|z_O-z_{M_1}|$

و منه : $\boxed{AM_2=M_1O}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $OM_1=M_1A=AM_2=M_2O$

يعني أن أضلاع الرباعي OM_1AM_2 متقايسة. إذن فهو معين.

التمرين الثاني 1

العدد 251 قاسم للعدد 2008 لأن : $2008=8\times251$.

العدد 251 عدد أولي لأن جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 251 لا تقسم 251 . و تلك الأعداد هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 . و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 251 . إذن 251 عدد أولي .

التمرين الثاني 2 أ

تذكير : تكون المعادلة $ax+by=c$ قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$ إذا و فقط إذا كان العدد c يقسم $(a\wedge b)$ حيث a و b عددان نسبيان غير منعدمان و $a\wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

إذن لمعرفة هل المعادلة (E) قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$ يجب أولا تحديد $2008\wedge$

و من أجل ذلك أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى : خوارزمية أقليدس :

$$\begin{array}{r|l} 2008 & 120 \\ \hline 88 & 16 \end{array} \Rightarrow \boxed{2008\wedge120=120\wedge88}$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 88 \\ \hline 32 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{120\wedge88=88\wedge32}$$

$$\begin{array}{r|l} 88 & 32 \\ \hline 24 & 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{88\wedge32=32\wedge24}$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 24 \\ \hline 8 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{32\wedge24=24\wedge8}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 8 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Rightarrow \boxed{24\wedge8=8\wedge0=8}\ \ Stop$$

إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 120 و 2008 هو آخر باقي غير منعدم في القسمات المتتالية لخوارزمية أقليدس . أي : $2008\wedge120=8$

الطريقة الثانية : استعمال التفكيك إلى جداء عوامل أولية.

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ Stop\ 1 & \end{array} \quad \Downarrow \quad \boxed{120=2^3\times3\times5}$$

$$\begin{array}{r|l} 2008 & 2 \\ 1004 & 2 \\ 502 & 2 \\ 251 & 251 \\ Stop\ 1 & \end{array} \quad \Downarrow \quad \boxed{2008=2^3\times251}$$

نلاحظ أن : $(2^3\times251)\wedge(2^3\times3\times5)=2^3$

يعني : $2008\wedge120=8$

خلاصة : في كلتا الطريقتين نحصل على $2008\wedge120=8$.

و بما أن 8 يقسم 8 فإن المعادلة $(E)\ :\ 2008x+120y=8$ قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$. أي أنها تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

التمرين الثاني 2 ب

حَل المعادلة (E) سوف يرتكز على مبرهنة $(Gauss)$ التالية :

$$\left\{\begin{array}{l} a/bc \\ a\wedge b=1 \end{array}\right. \Rightarrow\ a/c$$

في البداية وجب علينا تحديد حل خاص للمعادلة (E) . ليس بطريقة عشوائية و إنما باستعمال القسمات المتتالية لـ $(Euclide)$ من الأسفل إلى الأعلى .

$$\begin{array}{r|l} 2008 & 120 \\ \hline 88 & 16 \end{array} \Rightarrow \boxed{88=2008-120\times16}\quad(1)$$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 88 \\ \hline 32 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{32=120-88}\quad(2)$$

$$\begin{array}{r|l} 88 & 32 \\ \hline 24 & 2 \end{array} \Rightarrow \boxed{24=88-32\times2}\quad(3)$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 24 \\ \hline 8 & 1 \end{array} \Rightarrow \boxed{8=32-24}\quad(4)$$

ننطلق إذن من المتساوية (4) ثم نستعمل بعدها (3) ثم (2) ثم (1) .

$$\begin{aligned} 8 &= 32-24\ ;\ d'après\ (4) \\ &= 32-(88-32\times2)\ ;\ d'après\ (3) \\ &= 32\times3-88\ ;\ Simplification \\ &= 3\times(120-88)-88\ ;\ d'après\ (2) \\ &= 3\times120-4\times88\ ;\ Simplification \\ &= 3\times120-4\times(2008-120\times16)\ ;\ d'après(1) \\ &= 67\times120-4\times2008\ ;\ Simplification \end{aligned}$$

إذن : $2008(-4)+120(67)=8$.

و هذا يعني أن الزوج $(-4\,;67)$ حل خاص للمعادلة (E) .

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) . و ننطلق من النظمة التالية :

$$\left\{\begin{array}{l} (x,y)\ est\ solution\ de\ (E) \\ (-4\,,67)\ est\ solution\ de\ (E) \end{array}\right.$$

و التي تصبح : $\left\{\begin{array}{l} 2008x+120y=8 \\ 2008(-4)+120(67)=8 \end{array}\right.$

ننجز عملية الطرح بين هاتين المتساويتين نجد :

$2008(x+4)+120(y-67)=0$

أي : $2008(x+4)=-120(y-67)$

أي : $8\times251\times(x+4)=-15\times8\times(y-67)$

أي : $\boxed{251(x+4)=-15(y-67)}$ $(*)$

إذن 15 يقسم الجداء $251(x+4)$.

و نعلم أن 251 عدد أولي . إذن 15 لا يقسم العدد 251 .

و منه : $15\wedge251=1$.

نستنتج إذن حسب $Gauss$ أن 15 يقسم العامل $(x+4)$.

و بذلك يوجد k من $\mathbb{Z}$ حيث : $x+4=15k$.

أي : $x=15k-4$.

نُعوض x بـ $(15k-4)$ في الكتابة $(*)$ نجد :

$251(15k)=-15(y-67)$

يعني : $251k=-(y-67)$. أي : $y=-251k+67$.

نستنتج إذن أنه إذا كان الزوج (x,y) حلا للمعادلة (E) فهو يتخذ الشكل $(15k-4\ ;\ -251k+67)$ حيث $k\epsilon\mathbb{Z}$.

لنبين الآن أن جميع الأزواج $(15k-4\ ;\ -251k+67)$ من $\mathbb{Z}^2$ هي حلول المعادلة (E) .

لدينا :

$$\begin{aligned} &2008(15k-4)+120(-251k+67) \\ &= 30120k-8032-30120k+8040 \\ &= 8040-8032 \\ &= 8 \end{aligned}$$

إذن جميع الأزواج $(15k-4 \; ; \; -251k+67)$ من $\mathbb{Z}^2$ حيث $k\epsilon\mathbb{Z}$ هي حلول المعادلة (E) .

إذا كانت S هي مجموعة حلول (E) فهي معرفة بإدراك بما يلي :

$$S = \{(15k-4 \; ; \; -251k+67) \; ; \; k\,\epsilon\,\mathbb{Z}\}$$

التمرين الثاني 3 أ

سوف نستعمل في الجواب الخاصية التالية :

$$\begin{matrix}\forall\, q\neq 1\\ \forall n\epsilon\mathbb{N}\end{matrix}\Bigg| \; ; \; 1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

و هي مجموع $(n+1)$ حد متتابع من المتتالية الهندسية $(q^n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. إذن $(n-1)$ عنصر من $\mathbb{N}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} u_n &= 888\cdots88 \;\; ; \;\; n\,fois \\ &= 8\times(1+10+\cdots+10^{n-1}) \\ &= 8\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right) = \frac{8}{9}(10^n-1)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \; ; \; u_n = \frac{8}{9}(10^n-1)}$

التمرين الثاني 3 ب

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

و ننطلق من الإفتراض $10^n \equiv 1\,[251]$.

إذن العدد 251 يقسم العدد (10^n-1) .

و منه فإن العدد 251 يقسم العدد $8(10^n-1)$.

يعني أن 251 يقسم $9\,u_n$.

لأنه حسب السؤال أ) : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \; ; \; 9\,u_n = 8(10^n-1)$.

إذن 251 يقسم u_n (1) . و ذلك حسب مبرهنة $Gauss$ حيث $251\wedge 9 = 1$ لأن 251 أولي .

من جهة ثانية ، لدينا :

$$\begin{aligned} u_n &= 888\cdots88 \;\; ; \;\; n\,fois \\ &= 8\,\underbrace{(1+10+10^2++10^{n-1})}_{=\,k\,\epsilon\,\mathbb{N}} \\ &= 8k \;\; ; \;\; k\,\epsilon\,\mathbb{N}\end{aligned}$$

إذن العدد 8 يقسم العدد u_n (2) .

و لدينا $8\wedge 251 = 1$ (3) .

نجمع النتائج (1) و (2) و (3) في النظمة التالية :

$$\begin{cases} 251/u_n \\ 8/u_n \\ 8\wedge 251 = 1\end{cases}$$

إذن نستنتج أن الجداء 8×251 قاسم للعدد u_n .

يعني أن 2008 قاسم لـ u_n . أي : $u_n \equiv 0\,[2008]$.

و بذلك نحصل من أجل $n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*$ على الاستلزام التالي :

$$\boxed{10^n \equiv 1\,[251] \;\; \Rightarrow \;\; u_n \equiv 0\,[2008]}$$

لنبين الآن الاستلزام العكسي .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ حيث $u_n \equiv 0\,[2008]$.

إذن 2008 يقسم العدد u_n .

إذن يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث $u_n = 2008k$.

من جهة ثانية لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \; ; \; 9\,u_n = 8(10^n-1)$.

نعوض في هذه الكتابة العدد u_n بالعدد $2008k$ نجد :

$$9(2008k) = 8(10^n-1)$$

نقسم الطرفين على العدد 8 نحصل على : $9(251k) = 10^n-1$.

إذن 251 قاسم للعدد 10^n-1 .

إي : $(10^n-1)\equiv 0\,[251]$. أي : $10^n \equiv 1\,[251]$.

و بذلك نحصل من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ على الإستلزام التالي :

$$\boxed{u_n \equiv 0\,[2008] \;\; \Rightarrow \;\; 10^n \equiv 1\,[251]}$$

الخلاصة :

$$\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*) \; ; \; u_n \equiv 0\,[2008] \;\; \Leftrightarrow \;\; 10^n \equiv 1\,[251]}$$

التمرين الثاني 3 ج

سوف نستعمل في هذا السؤال مبرهنة $Fermat$ التالية :

مبرهنة $Fermat$: إذا كان a و p عددان صحيحان طبيعيان حيث $p\,\epsilon\,\mathbb{P}^+$ و $a\wedge p = 1$ فإن : $a^{p-1}\equiv 1\,[p]$.

لدينا حسب ما سبق : 251 عدد أولي .

و نلاحظ أن : $10\wedge 251 = 1$.

إذن حسب $Fermat$ نكتب : $10^{251-1}\equiv 1\,[251]$.

يوجد إذن k من $\mathbb{N}$ و هو العدد 250 حيث $10^k\equiv 1\,[251]$.

التمرين الثاني 3 د

لدينا : $10^{250}\equiv 1\,[251]$.

إذن حسب تكافؤ السؤال 3) ب) نستنتج أن : $u_{250}\equiv 0\,[2008]$

يعني أن 2008 قاسم للعدد u_{250} .

أي أن العدد u_{250} مضاعف للعدد 2008 .

أي أن العدد $\underbrace{888\cdots 8}_{250\,fois}$ مضاعف للعدد 2008 .

إذن 2008 يقبل مضاعفا يُكتب في نظمة العد العشري بواسطة 250 مرة الرقم 8 فقط .

التمرين الثالث 1

يكفي أن نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

لدينا E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنها تضم مصفوفات مربعة ذات معاملات حقيقية . و هي مجموعة غير فارغة لأنه نستطيع تحديد على الأقل عنصرا من E بتفصيل (و ليس بإدراك) .

مثلا : $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2\times 0 & 1+2\times 0\end{pmatrix} = M(1,0)\,\epsilon\,E$

لنبين أن : $\forall\; M(a,b),M(c,d)\;\epsilon\;E \; ; \; \big(M(a,b)-M(c,d)\big)\,\epsilon\,E$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned} M(a,b)-M(c,d) &= \begin{pmatrix}a & b\\ -2b & a+2b\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}c & d\\ -2d & c+2d\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}(a-c) & (b-d)\\ -2(b-d) & (a-c)+2(b-d)\end{pmatrix} \\ &= M(a-c \; ; \; b-d)\,\epsilon\,E\end{aligned}$$

لأن $(a-c)$ و $(b-d)$ عددان حقيقيان .

و بالتالي $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة الأم $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

و بما أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ تبادلية فإن $(E,+)$ تبادلية كذلك .

ملاحظة 1) : هذه الطريقة تعتبر الطريق المختصر للجواب .

أما الطريق الغير المختصر (الطريق المباشر و الاعتيادي) هو أن نبين الأشياء التالية :

- E مجموعة غير فارغة .
- $+$ قانون تركيب داخلي في E .
- $+$ تبادلي و تجميعي في E .
- $+$ يقبل عنصرا محايدا في E .
- كل عنصر x يقبل مماثلا x' بـ $+$ في E .

ملاحظة 2) : تمكنا من أن نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$. إذن يُمكن أن نعتبر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ هي الزمرة الأم و أن $(E,+)$ هي الزمرة الإبن(ة) . إذن الزمرة $(E,+)$ سوف تَرِثُ مميزات الزمرة الأم من تبادلية و تجميعية و عنصر محايد و تماثل العناصر .

التمرين الثالث 2

نبين أن : $\forall\, M(a,b), M(c,d) \in E \;;\; M(a,b)\times M(c,d) \in E$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$M(a,b)\times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -2d & c+2d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac-2bd & ad+b(c+2d) \\ -2bc-2d(a+2b) & -2bd+(a+2b)(c+2d) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac-2bd & ad+bc+2bd \\ -2(ad+bc+2bd) & (ac-2bd)+2(ad+bc+2bd) \end{pmatrix}$$

$$= M(ac-2bd \;;\; ad+bc+2bd) \in E$$

لأن $(ad+bc+2bd)$ و $(ac-2bd)$ عددان حقيقيان .

و بالتالي نستنتج أن E مستقرة بالنسبة للقانون $\times$.

أي $(E,\times)$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الثالث 3

نبين أن $(E,+,\times)$ **حلقة** **تبادلية** و **واحدية** :

- $(E,+)$ زمرة
- $\times$ تجميعي في E
- $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E

- $\times$ يقبل عنصرا محايدا في E

- $\times$ تبادلي في E

لقد حصلنا لحد الآن على ما يلي : $(E,+)$ زمرة

بما أن $(E,\times)$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

فإن $\times$ قانون تركيب داخلي في E .

و تصبح بذلك E مزودة بقانوني تركيب داخليين $+$ و $\times$.

نعلم أن الضرب $\times$ تبادلي و تجميعي في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

إذن من خلال الإستقرار نستنتج أن الضرب $\times$ تبادلي و تجميعي كذلك في E .

و نعلم كذلك أن العنصر المحايد في مجموعة إن وجد فإنه يكون وحيداً .

إذن $I=(1,0)\in E$ هو العنصر المحايد للضرب $\times$ في E لأن المصفوفة I هي العنصر المحايد للضرب $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. و E جزء مستقر من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بالنسبة للضرب .

نبين الآن أن $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E .

و من أجل ذلك ، لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ ثلاث مصفوفات من E . و سوف نستعمل القاعدتين التاليتين :

$$\begin{cases} M(a,b)+M(c,d) = M(a+c \;;\; b+d) \\ M(a,b)\times M(c,d) = M(ac-2bd \;;\; ad+bc+2bd) \end{cases}$$

لدينا : $M(a,b)\times\big(M(c,d)+M(e,f)\big)$

$$= M(a,b)\times M(c+e \;;\; d+f)$$

$$= M\big(a(c+e)-2b(d+f) \;;\; a(d+f) + b(c+e)+2b(d+f)\big)$$

$$= M(ac+ae-2bd-2bf \;;\; ad+af+bc+be+2bd+2bf)$$

من جهة أخرى لدينا : $M(a,b)\times M(c,d)+M(a,b)\times M(e,f)$

$$= M(ac-2bd\,;ad+bc+2bd) + M(ae-2bf\,;af+be+2bf)$$

$$= M(ac+ae-2bd-2bf \;;\; ad+af+bc+be+2bd+2bf)$$

و بالتالي : $\forall\, M(a,b)\,,M(c,d)\,,M(e,f)\in E\;;$

$$M(a,b)\times\big(M(c,d)+M(e,f)\big) = M(a,b)\times M(c,d)+M(a,b)\times M(e,f)$$

و هذا يعني أن $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ على اليسار .

و بنفس الطريقة نبين أن $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ على اليمين .

و بذلك نحصل على النتائج التالية :

- $(E,+)$ زمرة
- $\times$ تجميعي في E
- $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E
- $\times$ تبادلي في E
- $M(1,0)$ عنصر محايد لـ في E .

و بالتالي نستنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية وحدتها المصفوفة $M(1,0)$

التمرين الثالث 4 أ

لنبين أن f تشاكل . لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

من جهة أولى لدينا : $f\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)$

$$= f\big(M(ac-2bd \;;\; ad+bc+2bd)\big)$$

$$= (ac-2bd)+(ad+bc+2bd)+i(ad+bc+2bd)$$

$$= (ac+ad+bc)+i(ad+bc+2bd)$$

من جهة ثانية لدينا : $f\big(M(a,b)\big)\times f\big(M(c,d)\big)$

$$= (a+b+ib)\times(c+d+id)$$

$$= ac+ad+i\,ad+bc+bd+i\,bd+i\,bc+i\,bd-bd$$

$$= (ac+ad+bc)+i(ad+bc+2bd)$$

إذن مهما تكن المصفوفات $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E .

لدينا : $f\big(M(a,b)\times M(c,d)\big) = f\big(M(a,b)\big)\times f\big(M(c,d)\big)$

و هذا يعني أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$.

لنبين أن f تقابل :

ليكن $\alpha+i\beta$ عددا عقديا . إذن يوجد عددان حقيقيان a و b حيث $a=\alpha-b$ و $b=\beta$ و $\alpha+i\beta=a+b+ib$.

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f\big(M(x,y)\big)=\alpha+i\beta$ ذات المجهول $M(x,y)$

لدينا : $f\big(M(x,y)\big)=\alpha+i\beta$.

$$\Leftrightarrow\; x+y+iy = a+b+ib$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a+b \\ y=b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$$

نستنتج إذن أن المعادلة $f\big(M(x,y)\big)=\alpha+i\beta$ تقبل حلا وحيدا في E .

أو بتعبير آخر :

$$\boxed{(\forall(\alpha+i\beta)\in\mathbb{C})\;(\exists!\; M(x,y)\in E)\;;\; f\big(M(x,y)\big)=\alpha+i\beta}$$

و هذا يعني بكل بساطة أن التطبيق f تقابل من E نحو $\mathbb{C}$.

الخلاصة : $\boxed{f \text{ تشاكل تقابلي من } (E,\times) \text{ نحو } (\mathbb{C},\times)}$.

التمرين الثالث 4 ب

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من $E^*=E\backslash\{M(0,0)\}$.

و لتكن المصفوفة $M(x,y)$ مقلوب المصفوفة $M(a,b)$ في $(E^*,\times)$

إذن : $M(a,b)\times M(x,y)=M(x,y)\times M(a,b)=M(1,0)$

نحتفظ فقط بإحدى المتساويتين لأن $\times$ تبادلي.

$M(a,b)\times M(x,y)=M(1,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax-2by=1 \\ ay+bx+2by=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \textit{système de deux} \\ \textit{Equations à deux} \\ \textit{inconnus } x \textit{ et } y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax=1+2by \\ a^2y+b(ax)+2ab\,y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax=1+2by \\ a^2y+b(1+2by)+2ab\,y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax=1+2by \\ y(a^2+2b^2+2ab)=-b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{a}(1+2by) \\ y = \dfrac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ M(a,b) \in E^* \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{a}(1+2by) \\ y = \dfrac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \end{cases} \quad ; \quad \begin{pmatrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ M(a,b) \in E^* \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{2b^2}{a^2+2b^2+2ab}\right) \\ y = \dfrac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+2b}{a^2+2b^2+2ab} \in \mathbb{R}^* \; ; \; (a,b) \neq (0,0) \\ y = \dfrac{-b}{a^2+2b^2+2ab} \in \mathbb{R}^* \; ; \; (a,b) \neq (0,0) \end{cases}$$

إذن كل مصفوفة $M(a,b)$ من $E^* = E\setminus\{M(0,0)\}$ قابلة للقلب في E^* و مقلوبها هي المصفوفة : $M\left(\frac{a+2b}{a^2+2b^2+2ab} ; \frac{-b}{a^2+2b^2+2ab}\right)$

التمرين الثالث | 4 | ج

<u>تذكير بتعريف الجسم</u> : **لتكن k مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين $*$ و $\top$.**
تكون المجموعة $(K,*,\top)$ جسما إذا و فقط إذا كان :

- **$(K,*,\top)$ حلقة واحدية**
- **و كل عنصر من K ما عدا العنصر المحايد لـ $*$ يقبل مماثلا بالنسبة لـ $\top$ في المجموعة $k^* = k\setminus\{e\}$.**

لقد حصلنا على ما يلي :

- $(E,+,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $M(0,0)$.
- كل مصفوفة من E ما عدا المصفوفة $M(0,0)$ تقبل مقلوبا في $E\setminus\{M(0,0)\}$.

إذن حسب تعريف الجسم ، نستنتج أن $(E,+,\times)$ جسم .
و بما أن $\times$ تبادلي في E . فإن الجسم $(E,+,\times)$ تبادلي .
ملاحظة : توجد طريقة نبين من خلالها أن $(E,+,\times)$ جسم و هي أن نبين أن :

- **$(E,+,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد $M(0,0)$.**
- **$(E^*,\times)$ زمرة**
- **$\times$ توزيعي بالنسبة لـ $*$ في E .**

لكي تكون $(E^*,\times)$ زمرة يكفي أن نبين أنها زمرة جزئية من الزمرة
أي بين أنه مهما تكن المصفوفتان $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E^*
فإن : $M(a,b)\times M\left(\frac{c+2d}{c^2+2d^2+2cd} ; \frac{-d}{c^2+2d^2+2cd}\right) \in E^*$

التمرين الثالث | 4 | د

سوف نستعمل في هذا السؤال كون f تشاكل تقابلي و تقابله العكسي f^{-1} تشاكل تقابلي كذلك . إضافة إلى بعض صيغ الحساب المثلثي .
ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} (M(0,1))^n &= M(0,1)\times\cdots\times M(0,1) \;\; ; \; n\, fois \\ &= f^{-1}(1+i)\times\cdots\times f^{-1}(1+i) \;\; ; \; n\, fois \\ &= f^{-1}\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\times\cdots\times f^{-1}\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \;\; ; \; n\, fois \\ &= f^{-1}\left(\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\times\cdots\times\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\right) \;\; ; \; n\, fois \\ &= f^{-1}\left(\left(\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n\right) \;\; ; \; n\in\mathbb{N}^* \\ &= f^{-1}\left(2^{\frac{n}{2}}\,e^{\frac{in\pi}{4}}\right) \;\; ; \; n\in\mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f^{-1}\left(2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\,2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \;\; ; \; n\in\mathbb{N}^* \\ &= f^{-1}\left(\boxed{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)} + \right. \\ &\qquad \left. + 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\,2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

سوف نبسط الآن التعبير : $2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) &= 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{-n\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{4}-\frac{n\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{4}+\frac{n\pi}{4}}{2}\right)\right) \\ &= 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(2\sin\left(\frac{\pi-n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(2\sin\left(\frac{\pi-n\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot 2^{\left(\frac{-1}{2}\right)}\cdot 2^1\cdot\sin\left(\frac{\pi-n\pi}{4}\right) \\ &= 2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sin\left(\frac{\pi-n\pi}{4}\right) \\ &= -2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi-\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

و بالتالي نحصل على :

$$\begin{aligned} (M(0,1))^n &= f^{-1}\left(-2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sin\left(\frac{\pi(n-1)}{4}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) + i\,2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ &= M\left(-2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) \; ; \; 2^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

التمرين الرابع | I | 1

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}\varphi(x) &= \lim_{x\to-\infty}(2-x)e^x - 2 \\ &= \lim_{x\to-\infty}(2e^x - xe^x + 2x) \\ &= 0 - 0 + (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) &= \lim_{x\to+\infty}(2-x)e^x - 2 \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\left(\frac{2}{x}-1\right)e^x - \frac{2}{x}\right) = -\infty \end{aligned}$$

التمرين الرابع | I | 2

لدينا $x \longrightarrow (2-x)e^x$ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
لأنها عبارة عن جداء دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
إذن φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
و لدينا :

$$\begin{aligned} (\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; \varphi'(x) &= \left((2-x)e^x - 2\right)' \\ &= -e^x + (2-x)e^x \\ &= (1-x)e^x \end{aligned}$$

نلاحظ أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; e^x > 0$
إذن إشارة $\varphi'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-x)$.
إذا كان $x = 1$. فإن : $\varphi'(x) = 0$.
إذا كان $x > 1$. فإن : $\varphi'(x) < 0$.
إذا كان $x < 1$. فإن : $\varphi'(x) > 0$.
و لدينا : $\varphi(1) = e - 2$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة φ كما يلي :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	$+$	0	$-$
φ	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow e-2 \searrow$	$-\infty$

التمرين الرابع I 3

من خلال جدول تغيرات الدالة φ و نلاحظ أنها دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $[1,+\infty[$.

إذن φ تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو المجال $\varphi([1,+\infty[)$.

و لدينا :
$$\varphi([1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\ ;\ \varphi(1)\right] =]-\infty\,;\,e-2] \approx\ ]-\infty\,;0{,}72]$$

إذن تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $]-\infty\ ;\ 0{,}72]$.

و هذا يعني أن كل عنصر من $]-\infty\ ;\ 0{,}72]$ يقبل سابقا وحيدا بالدالة φ من المجال $[1,+\infty[$.

لدينا : $0\ \epsilon\ ]-\infty\ ;\ 0{,}72]$.

إذن 0 يمتلك سابقا وحيدا α من المجال $[1,+\infty[$.

أو بتعبير آخر : $(\exists!\ \alpha\geq 1)\ ;\ \varphi(\alpha)=0$

و هذا يعني أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1,+\infty[$ و هو العدد α .

لنبين الآن أن : $1{,}59<\alpha<1{,}60$.

و من أجل ذلك يجب أن نحدد كلا من $\varphi(1{,}59)$ و $\varphi(1{,}60)$.

لدينا : $\varphi(1{,}59)=(2-1{,}59)e^{1{,}59}-2\approx 0{,}01$

و كذلك : $\varphi(1{,}60)=(2-1{,}60)e^{1{,}60}-2\approx -0{,}01$

نلاحظ أن : $-0{,}01<0<0{,}01$.

يعني : $\varphi(1{,}6)<\varphi(\alpha)<\varphi(1{,}59)$

نُدخل الدالة التناقصية φ^{-1} على هذه الأعداد المنتمية إلى $]-\infty\ ;\ 0{,}72]$

نجد : $\varphi^{-1}\big(\varphi(1{,}6)\big)>\varphi^{-1}\big(\varphi(\alpha)\big)>\varphi^{-1}\big(\varphi(1{,}59)\big)$

يعني : $1{,}6>\alpha>1{,}59$.

التمرين الرابع II 1

لدينا :
$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)}$$
$$=\frac{0}{1}\ ;\ car\ \lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)=(e^x)'_{/x=0}=e^0=1$$
$$=0=f(0)$$

إذن f دالة متصلة في الصفر .

التمرين الرابع II 2

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^2}\right)^2-\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2-\frac{1}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\right)=\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\frac{x}{2}}}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2-\frac{1}{4t^2}}\right)$$
$$=\text{"}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}(+\infty)^2-0}\right)\text{"}=\boxed{0}$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)=0$$
$$car\ \lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty\quad et\quad \lim_{x\to-\infty}(e^x-1)=-1$$

التمرين الرابع II 3 أ

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)}$$
$$=\frac{1}{(e^x)'_{/x=0}}=\frac{1}{e^0}=1\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في الصفر . و العدد المشتق هو $f'(0)=1$.

التمرين الرابع II 3 ب

لدينا الدالة $x\longrightarrow x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها حدودية .

إذن فهي قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا $x\longrightarrow e^x-1$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (إذن $\mathbb{R}^*$).

و لدينا : $\forall\ x\neq0\ ;\ e^x-1\neq0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ باعتبارها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ باعتبارها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و المقام غير منعدم .

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)'=\frac{2x(e^x-1)-e^x(x^2)}{(e^x-1)^2}$$
$$=\left(\frac{x}{(e^x-1)^2}\right)\big(2(e^x-1)-x\,e^x\big)$$
$$=\left(\frac{x}{(e^x-1)^2}\right)\big((2-x)e^x-2\,\big)$$
$$=\frac{x\,\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$$

التمرين الرابع II 3 ج

$$\varphi(\alpha)=0\ \Rightarrow\ (2-\alpha)e^\alpha-2=0$$
$$\Rightarrow\ (2-\alpha)e^\alpha=2$$
$$\Rightarrow\ e^\alpha=\frac{2}{2-\alpha}\ ;\ avec\ \alpha\neq2$$
$$\Rightarrow\ e^\alpha-1=\frac{2}{2-\alpha}-1$$
$$\Rightarrow\ (e^\alpha-1)=\frac{\alpha}{2-\alpha}\quad(*)$$
$$\Rightarrow\ f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{e^\alpha-1}=\frac{\alpha^2}{\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)}\quad;\quad selon\ (*)$$
$$=\frac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha}\ ;\ avec\ \alpha\neq0$$
$$=\alpha(2-\alpha)$$

لدينا : $f'(x) = \dfrac{x\,\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$; $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*)$

و نلاحظ أن : $(e^x-1)^2 > 0$; $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*)$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة بإشارتي x و $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

و ندرج في الجدول التالي أهم النتائج المحصل عليها .

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$\alpha(2-\alpha)$	$\searrow$	0

التمرين الرابع II 4

في البداية لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

إذن محور الأفاصيل ($y=0$) مقارب أفقي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

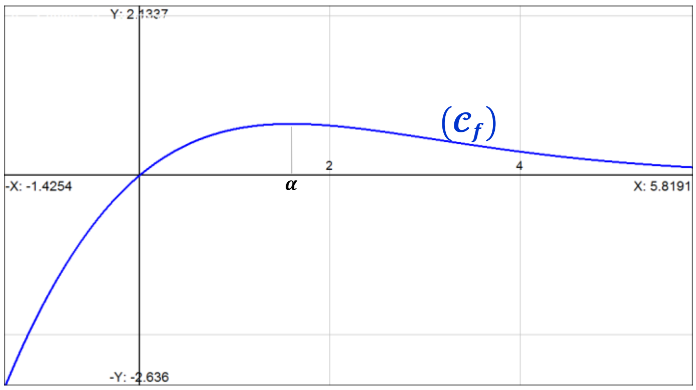
و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

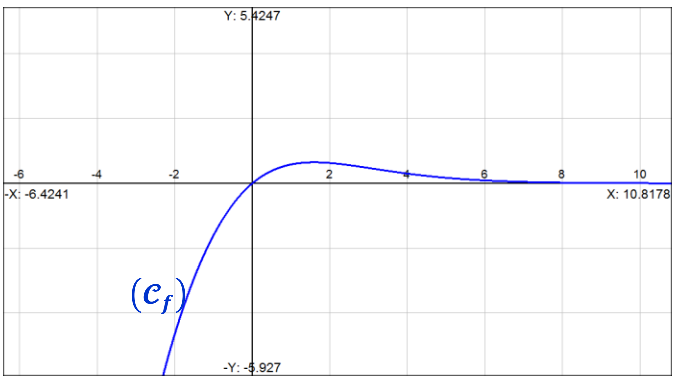
و لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}(e^x-1)}\right) = \text{"}\left(\frac{1}{0^-(0-1)}\right)\text{"} = +\infty$$

إذن نستنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

التمرين الرابع II 5





التمرين الرابع III 1

سوف نستعمل المكاملة بالأجزاء أثناء الحساب .

لدينا : $G(x) = \int_0^x \underbrace{t^2}_{u}\cdot\underbrace{e^{-t}}_{v'}\,dt$

$$\begin{aligned}
&= [-t^2e^{-t}]_0^x + 2\int_0^x \underbrace{t}_{\alpha}\cdot\underbrace{e^{-t}}_{\beta'}\,dt \\
&= [-t^2e^{-t}]_0^x + 2\left([-t\,e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt\right) \\
&= [-t^2e^{-t}]_0^x + 2[-t\,e^{-t}]_0^x + 2[-e^{-t}]_0^x \\
&= -x^2e^{-x} - 2x\,e^{-x} - 2\,e^{-x} + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} G(x) &= \lim_{x\to+\infty}(-x^2e^{-x} - 2x\,e^{-x} - 2\,e^{-x} + 2) \\
&= \lim_{x\to+\infty}(-x^2e^{-x}) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} - 2\,e^{-x} + 2\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{e^x}\right) + (0 - 2\times 0 + 2) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2}\right) + 2 = \lim_{\substack{u\to+\infty \\ u=\frac{x}{2}}}\left(\frac{4}{\left(\frac{e^u}{u}\right)^2}\right) + 2 \\
&= 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 2}$

التمرين الرابع III 2

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I . و كان a عنصرا من I

فإن الدالة :

$$\boxed{\begin{aligned} F\ :\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I التي تنعدم في a .

في هذا التمرين لدينا f دالة متصلة على المجال $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$.

إذن الدالة

$$\boxed{\begin{aligned} F\ :\ [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \int_0^x f(t)\,dt \end{aligned}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f التي تنعدم في 0 .

يعني أن : $F(0) = 0$ و $F'(x) = f(x)$; $(\forall\, x \geq 0)$.

و لدينا : $x \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x) \geq 0 \\
&\Rightarrow F'(x) \geq 0 \\
&\Rightarrow F\ est\ \nearrow\ sur\ [0,+\infty[= \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 3 أ

يكفي أن ندرس إشارة الفرق $(f(t) - 2t^2\,e^{-t})$.

ليكن t عنصرا من المجال $[\ln 2\ ;\ +\infty[$

لدينا : $f(t) - 2t^2\,e^{-t}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^2}{e^t-1} - 2t^2\,e^{-t} \\
&= \frac{t^2 - 2t^2\,e^{-t}(e^t-1)}{e^t-1} \\
&= \frac{t^2 - 2t^2\,e^0 + 2t^2\,e^{-t}}{e^t-1} \\
&= \frac{-t^2 + 2t^2\,e^{-t}}{e^t-1} = \frac{t^2(2\,e^{-t}-1)}{e^t-1}
\end{aligned}$$

نلاحظ أن : $(\forall\, t \in \mathbb{R}_*^+)\ ;\ \dfrac{t^2}{e^t-1} > 0$

إذن : $(\forall\, t \ge \ln 2)\ ;\ \dfrac{t^2}{e^t-1} > 0$

و لدينا :

$$\begin{aligned} t \ge \ln 2 \ &\Rightarrow\ -t \le -\ln 2 \\ &\Rightarrow\ e^{-t} \le e^{-\ln 2} \\ &\Rightarrow\ e^{-t} \le \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow\ 2e^{-t} \le 1 \\ &\Rightarrow\ 2e^{-t} - 1 \le 0 \\ &\Rightarrow\ \frac{(2e^{-t}-1)t^2}{e^t-1} \le 0 \\ &\Rightarrow\ f(t) - 2t^2\, e^{-t} \le 0 \\ &\Rightarrow\ f(t) \le 2t^2\, e^{-t} \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall\, t \ge \ln 2)\ ;\ f(t) \le 2t^2\, e^{-t}}$

التمرين الأول III 3 ب

ليكن t عنصرا من المجال $[\ln 2\ ;\ +\infty[$ و x عدد حقيقي غير منعدم موجب .

$$\begin{aligned} t \ge \ln 2 \ &\Rightarrow\ f(t) \le 2t^2\, e^{-t} \\ &\Rightarrow\ \int_{\ln 2}^{x} f(t)\, dt \le \int_{\ln 2}^{x} 2t^2\, e^{-t}\, dt \end{aligned}$$

$car\ ces\ fonctions\ sont\ continues\ et\ \ln 2 \le x$

$$\Rightarrow\ \int_0^{\ln 2} f(t)\, dt + \int_{\ln 2}^{x} f(t)\, dt \le \int_0^{\ln 2} f(t)\, dt + \int_{\ln 2}^{x} 2t^2\, e^{-t}\, dt$$

$$\Rightarrow\ \int_0^{x} f(t)\, dt \le \int_0^{\ln 2} f(t)\, dt + \int_0^{x} 2t^2\, e^{-t}\, dt - \int_0^{\ln 2} 2t^2\, e^{-t}\, dt$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ F(x) \le \underbrace{\int_0^{\ln 2} \left(f(t) - 2t^2\, e^{-t}\right) dt}_{\substack{ceci\ est\ un\ nombre\ \ réel\ a \\ c-à-d\ une\ constante\ \ réelle}} + \int_0^{x} 2t^2\, e^{-t}\, dt \\ &\Rightarrow\ F(x) \le a + 2\, G(x) \\ &\Rightarrow\ F(x) \le \lim_{x \to +\infty} \left(a + 2\, G(x)\right) \\ &\Rightarrow\ F(x) \le (a + 4)\ \ ;\ \ (\forall\, x \ge 0) \\ &\Rightarrow\ F \ \text{مكبورة على}\ \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

التمرين الرابع IV 1 أ

تذكير : إذا كانت $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها يخالف 1 فإن :

$$\boxed{q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$$

ليكن x عددا حقيقيا موجبا و نعتبر المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ التي حدها العام هو : $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = (e^{-x})^n$

نلاحظ أن أساس هذه المتتالية هو عدد حقيقي مخالف لـ 1 .

لأن : $e^{-x} \neq 0\ \Rightarrow\ x \neq 0$.

$$(e^{-x})^0 + (e^{-x})^1 + (e^{-x})^2 + \cdots + (e^{-x})^n = \frac{(e^{-x})^{n+1}-1}{e^{-x}-1}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ 1 + \sum_{p=1}^{n} e^{-px} = \frac{e^{-(n+1)x}-1}{e^{-x}-1} \\ &\Rightarrow\ \sum_{p=1}^{n} e^{-px} = \left(\frac{e^{-(n+1)x}-1}{e^{-x}-1} - 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \sum_{p=1}^{n} e^{-px} + \left(\frac{e^{-nx}}{e^x-1}\right) &= \left(\frac{e^{-(n+1)x}-1}{e^{-x}-1} - 1 + \frac{e^{-nx}}{e^x-1}\right) \\ &= \frac{e^{-nx}\, e^{-x} - 1}{\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)} - 1 + \frac{e^{-nx}}{e^x-1} \\ &= \frac{e^x e^{-nx} e^{-x} - e^x}{1-e^x} - \frac{e^x-1}{e^x-1} + \frac{e^{-nx}}{e^x-1} \\ &= \frac{e^{-nx} - e^x}{1-e^x} - \frac{e^x-1}{e^x-1} + \frac{e^{-nx}}{e^x-1} \\ &= \frac{e^x - e^{-nx} - e^x + 1 + e^{-nx}}{e^x-1} \\ &= \frac{1}{e^x-1} \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{\begin{pmatrix} \forall n\in\mathbb{N}^* \\ \forall x\in\mathbb{R}^+ \end{pmatrix}\ ;\ \frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-nx}}{e^x-1} + \sum_{p=1}^{n} e^{-px}}$

التمرين الرابع IV 1 ب

لدينا حسب ما سبق $f'(x)$ تنعدم في العدد α على $\mathbb{R}^+$ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن f تقبل مطرافا في النقطة ذات الأفصول α . و هذا المطراف عبارة عن قيمة قصوية و هي $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$.

بتعبير آخر : $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ ;\ f(t) \le f(\alpha)$

أي : $(\forall t\in\mathbb{R}^+)\ ;\ f(t) \le \alpha(2-\alpha)$

و كذلك f دالة موجبة على المجال $[0,+\infty[$.

إذن : $0 \le f(t) \le \alpha(2-\alpha)$

و لدينا : $(\forall\, t \ge x)\ ;\ 0 \le e^{-nt} \le e^{-nx}$

نضرب التأطيرين طرفا طرفا نحصل على التأطير التالي :

$$0 \le f(t) \cdot e^{-nt} \le \alpha(2-\alpha) e^{-nx}$$

نُدخل التكامل $\int_0^x dt$ على هذه الدوال المتصلة على المجال $[0,+\infty[$ حيث $0 \le x$ نحصل على :

$$(1)\quad \boxed{0 \le \int_0^x \left(f(t) e^{-nx}\right) dt \le \alpha(2-\alpha) \int_0^x e^{-nt}\, dt}$$

من جهة أخرى لدينا : $\displaystyle\int_0^x e^{-nt}\, dt = \left[\frac{-1}{n} e^{-nt}\right]_0^x = \frac{-1}{n} e^{-nx} + \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N}^*\ &\Rightarrow\ \frac{-1}{n} e^{-nx} < 0 \\ &\Rightarrow\ \frac{-1}{n} e^{-nx} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow\ \int_0^x e^{-nt}\, dt < \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow\ \boxed{\alpha(2-\alpha) \int_0^x e^{-nt}\, dt < \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}}\quad (2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) نحصل على :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \forall n\in\mathbb{N}^* \\ \forall x\in\mathbb{R}^+ \end{pmatrix}\ ;\ 0 \le \int_0^x f(t) e^{-nt}\, dt < \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}}$$

التمرين الرابع IV 1 ج

لدينا : $I_n(x)=\int_0^x \underbrace{t^2}_{u}\cdot\underbrace{e^{-nt}}_{v'}\,dt$

$$= \left[\frac{-t^2\,e^{-nt}}{n}\right]_0^x + \frac{2}{n}\int_0^x \underbrace{t}_{\varphi}\cdot\underbrace{e^{-nt}}_{\psi'}\,dt$$

$$= \left[\frac{-t^2\,e^{-nt}}{n}\right]_0^x + \frac{2}{n}\left(\left[\frac{-t\,e^{-nt}}{n}\right]_0^x + \frac{1}{n}\int_0^x e^{-nt}\,dt\right)$$

$$= \left(\frac{-x^2\,e^{-nx}}{n}\right) + \frac{2}{n}\left(\frac{-x\,e^{-nx}}{n}\right) + \frac{2}{n^2}\left[\frac{-e^{-nt}}{n}\right]_0^x$$

$$= \frac{-x^2\,e^{-nx}}{n} - \frac{2x\,e^{-nx}}{n^2} - \frac{2\,e^{-nx}}{n^3} + \frac{2}{n^3}$$

التمرين الرابع IV 1 د

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2\,e^{-nx}}{n}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{4}{n^2}\right)}{\left(\frac{e^{\frac{nx}{2}}}{\frac{nx}{2}}\right)^2}$

$$= \lim_{\substack{u\to+\infty\\ u=\frac{nx}{2}}}\frac{\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{4}{n^2}\right)}{\left(\frac{e^u}{u}\right)^2} = \boxed{0}\ ;\ \text{car}\ \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{e^u}{u}\right)^2 = +\infty$$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\,e^{-nx}}{n^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{e^{nx}}{nx}\right)^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{n^3}\right)}{\left(\frac{e^u}{u}\right)} = \boxed{0}\ ;\ \text{car}\ \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{e^u}{u}\right) = +\infty$$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,e^{-nx}}{n^3}\right) = \lim\limits_{\substack{u\to-\infty\\ u=-nx}}\left(\frac{2}{n^3}\right)e^u$

$$= \left(\frac{2}{n^3}\right)\times 0 = 0$$

نستنتج من هذه النهايات الثلاث ما يلي :

$$\lim_{x\to+\infty} I_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2\,e^{-nx}}{n}\right) - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x\,e^{-nx}}{n^2}\right) - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,e^{-nx}}{n^3}\right) + \frac{2}{n^3}$$

$$= 0 - 0 - 0 + \frac{2}{n^3} = \frac{2}{n^3}$$

التمرين الرابع IV 2 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . و x عددا حقيقيا موجبا .

سوف نستعمل في الجواب نتيجة السؤال : $IV)\ 1)$ أ)

$$\boxed{\frac{1}{e^t-1} = \frac{e^{-nt}}{e^t-1} + \sum_{p=1}^{n} e^{-pt}\ ;\ t\ge 0}$$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد t^2 نجد :

$$\boxed{\frac{t^2}{e^t-1} = \frac{t^2e^{-nt}}{e^t-1} + t^2\sum_{p=1}^{n} e^{-pt}\ ;\ t\ge 0}$$

ثم نُدخل التكامل $\int_0^x dt$ على هاتين الدالتين المتصلتين حيث $0\le x$.

$$\int_0^x\left(\frac{t^2}{e^t-1}\right)dt = \int_0^x\left(\frac{t^2e^{-nt}}{e^t-1}\right)dt + \int_0^x t^2\sum_{p=1}^{n} e^{-pt}\,dt$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt + \sum_{p=1}^{n}\int_0^x (t^2e^{-pt})\,dt$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt + \sum_{p=1}^{n} I_p(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt = F(x) - \sum_{p=1}^{n} I_p(x)$$

التمرين الرابع IV 2 ب

ليكن $(x\in\mathbb{R}^+)$ و $(n\in\mathbb{N}^*)$.

لدينا : $\int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt = F(x) - \sum_{p=1}^{n} I_p(x)$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}F(x) - \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} I_p(x)\right)$$

$$= L - \sum_{p=1}^{n}\left(\lim_{x\to+\infty} I_p(x)\right)$$

$$= \left(L - \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{p^3}\right)\right)\in\mathbb{R}$$

إذن الدالة $x \longrightarrow \int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt$ تقبل النهاية $\left(L - \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{p^3}\right)\right)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

التمرين الرابع IV 2 ج

لدينا : $\int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt = F(x) - \sum_{p=1}^{n} I_p(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)\,e^{-nt}\,dt\right) = \lim_{x\to+\infty}F(x) - \lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n} I_p(x)\right)$$

$$\Rightarrow L_n = L - \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{p^3}\right) \Rightarrow L - L_n = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{2}{p^3}\right)$$

$$\Rightarrow L - L_n = 2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)$$

التمرين الرابع IV 2 د

لدينا : $\begin{pmatrix}\forall n\in\mathbb{N}^*\\ \forall x\in\mathbb{R}^+\end{pmatrix}\ ;\ 0\le\int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt \le \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$

On fait tendre x vers $+\infty$ *On obtient*

$$\lim_{x\to+\infty} 0 \le \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt\right) \le \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{0\le L_n\le\frac{\alpha(2-\alpha)}{n}}$$

نستنتج أن المتتالية $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ مصغورة بالعدد 0 .

لنبين الآن أن $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية تناقصية .

$$L_{n+1}-L_n = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)e^{-(n+1)t}\,dt\right)-\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)e^{-nt}\left(e^{-t}-1\right)dt\right)$$

لدينا :

$$\begin{aligned} t\geq 0 &\Longrightarrow -t\leq 0\\ &\Longrightarrow e^{-t}\leq 1\\ &\Longrightarrow e^{-t}-1\leq 0\\ &\Longrightarrow f(t)e^{-nt}(e^{-t}-1)\leq 0\ ;\ car\ f(t)\geq 0\\ &\Longrightarrow \int_0^x f(t)e^{-nt}(e^{-t}-1)\,dt\leq 0\ ;\ car\ x\geq 0\\ &\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)e^{-nt}(e^{-t}-1)\,dt\leq 0\\ &\Longrightarrow L_{n+1}-L_n\leq 0\\ &\Longrightarrow L_{n+1}\leq L_n\\ &\Longrightarrow (L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ est\ une\ suite\ \searrow \end{aligned}$$

بما أن $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية و مصغورة فهي متقاربة .

التمرين الرابع IV 2 ٥

في البداية رأينا أن المتتالية $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و سوف نحسب نهايتها بالطريقة المباشرة (التعويض).

$$\lim_{n\infty}(L_n) = \lim_{n\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x f(t)e^{-nt}\,dt\right)\right)$$
$$= \lim_{n\infty}\left(\int_0^x (f(t)\times 0)\,dt\right)\ ;\ car\ e^{-nt}\to 0$$
$$= \lim_{n\infty}\left(\int_0^x 0\,dt\right) = \lim_{n\infty} 0 = 0$$

و رأينا كذلك أن :

$$\begin{aligned} L-L_n &= 2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)\\ &\Longrightarrow L-L_n = 2\,u_n\\ &\Longrightarrow u_n = \frac{L}{2}-\frac{L_n}{2} \end{aligned}$$

بما أن $(L_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة .

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{L}{2}-\frac{L_n}{2}\right) = \frac{L}{2}-\frac{1}{2}\left(\lim_{n\infty}L_n\right)$$
$$= \frac{L}{2}-\frac{1}{2}\times 0 = \frac{L}{2} = L'$$

أجوبة امتحان مدينة الرباط 2009

التمرين الأول 1

لدينا : $A^2 = \begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0\\-3&1\end{pmatrix}$

و لدينا : $-3A+2I = -3\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}-6&0\\3&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}-4&0\\3&-1\end{pmatrix}$

إذن : $A^2-3A+2I = \begin{pmatrix}4&0\\-3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&0\\3&-1\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \mathcal{O}$

نستنتج إذن أن : $A^2-3A+2I=\mathcal{O}$

يعني : $\frac{-1}{2}A^2+\frac{3}{2}A - I = \mathcal{O}$. يعني : $A\times\left(\frac{-1}{2}A+\frac{3}{2} I\right) = I$

و كذلك : يعني : $\left(\frac{-1}{2}A+\frac{3}{2} I\right)\times A = I$

و بالتالي المصفوفة A قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و مقلوبها هو المصفوفة $\left(\frac{-1}{2}A+\frac{3}{2} I\right)$.

أو بتعبير آخر المصفوفة $\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$ قابلة للقلب في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

و مقلوبها هو المصفوفة $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$.

التمرين الأول 2 أ

$J^2 = J\times J = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix} = 2J$

$K^2 = K\times K = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix} = 2K$

$J\times K = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \mathcal{O}$

$K\times J = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \mathcal{O}$

التمرين الأول 2 ب

لتكن a عددا حقيقيا غير منعدم .

لدينا : $M(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+\frac{1}{a} & a-\frac{1}{a}\\ a-\frac{1}{a} & a+\frac{1}{a}\end{pmatrix}$
$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a&a\\a&a\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{a}&\frac{-1}{a}\\\frac{-1}{a}&\frac{1}{a}\end{pmatrix}$
$= \frac{1}{2}a\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} + \frac{1}{2a}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$
$= \left(\frac{a}{2}\right) J + \left(\frac{1}{2a}\right) K$

التمرين الأول 2 ج

في البداية نلاحظ أن E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنه يضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 .
لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E .

لدينا : $M(a)\times M(b) = \left(\frac{a}{2}J+\frac{1}{2a}K\right)\times\left(\frac{b}{2}J+\frac{1}{2b}K\right)$
$= \left(\frac{ab}{4}\right)J^2 + \left(\frac{a}{4b}\right)\cdot J\times K + \left(\frac{b}{4a}\right)\cdot K\times J + \left(\frac{1}{4ab}\right)K^2$
$= \left(\frac{ab}{4}\right)(2J) + \left(\frac{a}{4b}\right)\cdot\mathcal{O} + \left(\frac{b}{4a}\right)\cdot\mathcal{O} + \left(\frac{1}{4ab}\right)(2K)$
$= \left(\frac{ab}{2}\right) J + \left(\frac{1}{2ab}\right) K$
$= M(ab) \in E \;\; ; \;\; car \;\; ab \in \mathbb{R}^*$

إذن : $\forall\, M(a),M(b) \in E \;;\; M(a)\times M(b) \in E$
و هذا يعني أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول 3 أ

ليكن a و b عددان حقيقيان غير منعدمان .
لدينا حسب ما سبق : $M(a)\times M(b) = M(ab)$
يعني : $f(a)\times f(b) = f(ab)$
و هذا يعني أن f تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.
لتكن $M(a)$ مصفوفة معلومة من E و لنحل في $\mathbb{R}^*$
المعادلة $f(x)=M(a)$ ذات المجهول x .

$f(x)=M(a) \iff M(x)=M(a)$
$\iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+\frac{1}{x} & x-\frac{1}{x}\\ x-\frac{1}{x} & x+\frac{1}{x}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+\frac{1}{a} & a-\frac{1}{a}\\ a-\frac{1}{a} & a+\frac{1}{a}\end{pmatrix}$
$\iff x = a \in \mathbb{R}^* \;;\; car \;\; M(a)\in E$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ و هو العدد الحقيقي a .
أو بتعبير آخر : $(\forall\, M(a)\in E),(\exists!\, x\in\mathbb{R}^*) \;;\; f(x)=M(a)$
و هذا يعني أن f تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.
الخلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

التمرين الأول 3 ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول .
بما أن f تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.
فإن صورة الزمرة التبادلية $(\mathbb{R}^*,\times)$ بالتشاكل f هي الزمرة التبادلية
و بما أن f تقابل من $\mathbb{R}^*$ نحو E . فإن : $f(\mathbb{R}^*)=E$.
إذن صورة الزمرة التبادلية $(\mathbb{R}^*,\times)$ بالتشاكل التقابلي f هي الزمرة التبادلية $(E,\times)$
مميزات الزمرة التبادلية $(E,\times)$ نستنتجها من خلال مميزات الزمرة $(\mathbb{R}^*,\times)$.
بما أن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هو العدد الحقيقي 1 . و كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$ يقبل مماثلا بالقانون $\times$ في $\mathbb{R}^*$ و هو $\frac{1}{x}$
فإن $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالقانون $\times$ هي المصفوفة $f(1)$. و لكل مصفوفة $M(x)$ من E تقبل مماثلا بالقانون $\times$ في E و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$.

و لدينا : $f(1) = M(1) = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I$

و كذلك : $f\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+\frac{1}{x} & -x+\frac{1}{x}\\ -x+\frac{1}{x} & x+\frac{1}{x}\end{pmatrix}$

أو بتعبير آخر : $Sym_E\big(M(a)\big) = Sym_E\big(f(a)\big)$
$= f\big(Sym_{\mathbb{R}^{+}}(a)\big)$
$= f\left(\frac{1}{a}\right) = M\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+\frac{1}{a} & -a+\frac{1}{a}\\ -a+\frac{1}{a} & a+\frac{1}{a}\end{pmatrix}$

التمرين الثاني 1

من أجل ذلك أقترح ثلاث طرق مختلفة .

الطريقة الأولى : استعمال مبدأ خوارزمية أقليدس التالي :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ d & c \end{array} \quad \Rightarrow \quad a\wedge b = b\wedge d$$

و كذاك الخاصية : $\boxed{\forall\,(m,n)\in\mathbb{N}^{2*}\ ;\ a\wedge b = a^m\wedge b^n}$

لدينا :

$$\begin{array}{l|l} ab+b^2 & a \\ \underline{ab} & b \\ \quad b^2 & \end{array}$$

إذن : $\boxed{b(a+b)\wedge a = a\wedge b^2 = a\wedge b = 1}$

الطريقة الثانية : استعمال الخاصيتين التاليتين في $\mathbb{Z}$.

$(1)\quad \boxed{(\forall n\in\mathbb{Z})\ ;\ a\wedge b = a\wedge(b+na)}$

$(2)\quad \boxed{a\wedge c = 1 \ \Rightarrow\ a\wedge b = a\wedge bc\ ;\ (\forall b\in\mathbb{Z}^*)}$

نفترض أن : $a\wedge b = 1$

إذن حسب الخاصية (1) نستنتج أن : $a\wedge(a+b)=1$.

و منه حسب الخاصية (2) نكتب : $1 = a\wedge(a+b) = a\wedge b(a+b)$

الطريقة الثالثة : استعمال البرهان بالخلف .

ليكن a و b عددان صحيحان نسبيان حيث $a\wedge b = 1$.

و ليكن : $a\wedge b(a+b) = d\in\mathbb{N}^*$. نفترض أن : $d\neq 1$.

$$\begin{aligned}
a\wedge b(a+b) = d \ &\Rightarrow\ d/a \ \ et\ \ d/b(a+b)\\
&\Rightarrow\ d/a \ \ et\ \ d/(ab+b^2)\\
&\Rightarrow\ d/-ab \ \ et\ \ d/a \ \ et\ \ d/(ab+b^2)\\
&\Rightarrow\ d/-ab \ \ et\ \ d/(ab+b^2) \ \ et\ \ d/a\\
&\Rightarrow\ d/(-ab+ab+b^2) \ \ et\ \ d/a\\
&\Rightarrow\ d/b^2 \ \ et\ \ d/a\\
&\Rightarrow\ d/b \ \ et\ \ d/a\\
&\Rightarrow\ d/(a\wedge b)\\
&\Rightarrow\ d/1\ \ ;\ car\ a\wedge b = 1\\
&\Rightarrow\ Contradiction\ ;\ car\ d\neq 1\ par\ supposition
\end{aligned}$$

إذن ما افترضناه كان خاطئا .

و بالتالي : $\boxed{a\wedge b(a+b) = d = 1}$.

التمرين الثاني 2 أ

تذكير بالخاصية التي سوف نستعملها في هذا السؤال .

$$\boxed{a\wedge b = d \ \Rightarrow\ \exists\,(k,k')\in\mathbb{Z}^{2*}\ ;\ \begin{cases} a = kd \\ b = k'd \\ k\wedge k' = 1 \end{cases}}$$

ليكن (x,y) حلا للمعادلة E حيث $x\wedge y = d\in\mathbb{N}^*$.

إذن حسب الخاصية المذكورة : يوجد a و b من $\mathbb{Z}^*$ بحيث $x = ad$ و $y = bd$ و $a\wedge b = 1$.

نعوض x و y على التوالي بـ ad و bd في E نجد :

$$(ad)^2+(bd)^2+(ad)(bd)-31\,ad = 0$$

و نختزل بالعدد الغير المنعدم d نحصل على :

$$a^2d+b^2d-abd-31a = 0$$

أي : $b^2d+abd = 31a-a^2d$

أي : $\boxed{bd(a+b) = a(31-ad)}\ (*)$

التمرين الثاني 2 ب

لدينا : $bd(a+b) = a(31-ad)$ و $a\wedge b(a+b) = 1$.

إذن a يقسم الجداء $d\big(b(a+b)\big)$ و a و $b(a+b)$ أوليان فيما بينهما .

إذن حسب $Gauss$ نستنتج أن العدد a يقسم العدد d .

التمرين الثاني 3 أ

لدينا $x\wedge y = d\in\mathbb{N}^*$ و a يقسم d .

إذن يوجد c من $\mathbb{N}^*$ بحيث $d = ac$.

نُعوض d بـ (ac) في المتساوية $(*)$ نحصل على :

$$a(31-a^2c) = bac(a+b)$$

نختزل بالعدد الغير المنعدم a نحصل على : $(31-a^2c) = bc(a+b)$

أي : $31 = a^2c+abc+cb^2$

أي : $31 = c(a^2+ab+b^2)$

التمرين الثاني 3 ب

نضع : $k = a^2+b^2+ab$.

بما أن a و b عددان صحيحان نسبيان فإن a^2 و b^2 و ab أعداد نسبية كذلك . و منه k عدد نسبي .

و لدينا : $c(a^2+b^2+ab) = 31$. إذن : $31 = kc$.

أي أن c يقسم العدد الأولي 31 و $c\in\mathbb{N}$.

إذن $c = 31$ أو $c = 1$.

الحالة الأولى : إذا كان $c = 31$.

فإن : $d = ac = 31a$.

إذن : $31(a^2+b^2+ab) = 31$

أي : $a^2+b^2+ab = 1$

ثم نطرح السؤال : هل فعلا يوجد (a,b) من $\mathbb{Z}^{2*}$ حيث $a^2+b^2+ab = 1$

ليكن b عددا معلوما و نبحث عن a في $\mathbb{Z}^*$.

الكتابة $a^2+ab+b^2-1 = 0$ عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية بمُعاملات حقيقية و بمجهول واحد a . و لدينا :

$$\begin{aligned}
\Delta_b &= b^2-4(b^2-1)\\
&= -3b^2+4\\
&= 4-3b^2\\
&= (2-\sqrt{3}b)(2+\sqrt{3}b)
\end{aligned}$$

شرط وجود العدد a هو $\Delta_b\geq 0$.

يعني : $(2-\sqrt{3}b)(2+\sqrt{3}b)\geq 0$.

يعني : $\frac{-2}{\sqrt{3}}\leq b\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$.

يعني : $-1{,}15\leq b\leq 1{,}15$ و $b\in\mathbb{Z}$

إذن لكي يكون a موجودا يجب أن يكون $b\in\{-1\,;0\,;1\}$.

بما أن $b\neq 0$ فإن الشرط السابق يُصبح : $b\in\{-1\,;1\}$

إذا كان $b = 1$ فإن $a(a+1) = 0$.

و منه : $a = -1$ لأن $a\neq 0$.

و نحصل بذلك على : $(a,b) = (-1,1)$.

نُعوض في الكتابة $(*)$ نجد : $1d(-1+1) = -1(31+d)$

أي : $31+d = 0$. أي : $d = -31$.

و هذا تناقض لأن $d\in\mathbb{N}$.

إذا كان $b = -1$ فإن $a(a-1) = 0$.

و منه : $a = 1$ لأن $a\neq 0$.

و نحصل بذلك على : $(a,b) = (1,-1)$.

نُعوض في النتيجة $(*)$ نجد : $d = 31$

و منه : $(x,y) = (ad\,;bd) = (1\times 31\,;-1\times 31) = (31,-31)$

إذن في حالة $c = 31$ وجدنا حلا واحدا للمعادلة (E) و هو الزوج

و للتأكد لدينا : $31^2+(-31)^2-31\times 31-31\times 31 = 0$

الحالة الثانية : إذا كان $c = 1$ فإن $d = ac = a$.

و لدينا : $1(a^2+b^2+ab) = 31$

أي : $a^2+ab+(b^2-31) = 0$ ■

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد و هو a علما أن b إفترضناه معلوما .

$$\begin{aligned}
\Delta_b &= b^2-4(b^2-31) = -3b^2+124\\
&= (\sqrt{124}-\sqrt{3}b)(\sqrt{124}+\sqrt{3}b)
\end{aligned}$$

شرط وجود العدد a هو أن يكون $\Delta_b\geq 0$.

يعني : $(\sqrt{124}-\sqrt{3}\,b)(\sqrt{124}+\sqrt{3}\,b)\geq 0$.

يعني : $-\sqrt{\frac{124}{3}}\leq b\leq\sqrt{\frac{124}{3}}$. يعني : $-6{,}42\leq b\leq 6{,}42$.

يعني : $b\in\{-6\,;-5\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

بما أن $b \neq 0$

فإن $b \in \{-6\,;-5\,;-3\,;-2\,;-1\,;\ 1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

نُعوض كل قيمة لـ b في المعادلة ■ ثم نحلها نجد :

إذا كان $b=-6$ فإن $a=5$ أو $a=1$.

إذا كان $b=-5$ فإن $a=6$ أو $a=-1$.

إذا كان $b=-4$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b=-3$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b=-2$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b=-1$ فإن $a=6$ أو $a=-5$.

إذا كان $b=1$ فإن $a=5$ أو $a=-6$.

إذا كان $b=2$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b=3$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b=4$ فإن $a \notin \mathbb{Z}$

إذا كان $b=5$ فإن $a=1$ أو $a=-6$.

إذا كان $b=6$ فإن $a=-5$ أو $a=-1$.

نستنتج إذن أنه في حالة $c=1$ فإن :

$$(a,b) \in \left\{ \begin{matrix} (5,-6)\,;\ (1,-6)\,;\ (6,-5)\,;\ (-1,-5)\,;\ (6,-1) \\ (-5,-1)\,;\ (5,1)\,;\ (-6,1)\,;\ (1,5)\,;\ (-6,5) \\ (-5,6)\ ;\ (-1\,,6) \end{matrix} \right\}$$

و نعلم أن : $x=ad$ و $y=bd$.

يعني : $x=a^2$ و $y=ab$.

و ذلك لأن : $d=ac=a \implies c=1$.

نستنتج إذن أن :

$$(x,y) \in \left\{ \begin{matrix} (25,-30)\,;\ (1,-6)\,;\ (36,-30)\,;\ (1,5) \\ (36,-6)\,;\ (25,5)\,;\ (25,5)\,;\ (36,-6) \\ (1,5)\ ;\ (36\,,-30)\ ;(25,-30)\ ;\ (1,-6) \end{matrix} \right\}$$

نلاحظ أن هناك نسختين من كل حل . إذن :

$$(x,y) \in \left\{ \begin{matrix} (25,-30)\,;\ (1,-6)\,;\ (36,-30)\,;\ (1,5) \\ (36,-6)\,;\ (25,5) \end{matrix} \right\}$$

عكسيا : نلاحظ أن تعويض أي زوج من هذه الأزواج في المعادلة (E) نحصل في النتيجة على الصفر . أي أن كل زوج من هذه الأزواج حل للمعادلة (E) .

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^{2*}$ تتكون من 7 أزواج و هي :

$$(S) = \left\{ \begin{matrix} (25,-30)\,;\ (1,-6)\,;\ (36,-30)\,;\ (1,5) \\ (36,-6)\,;\ (25,5)\,;\ (31,-31) \end{matrix} \right\}$$

التمرين الثالث 1 أ

ليكن a عددا حقيقيا بحيث : $a^3+(5+i)a^2+(10+2i)a+8=0$

$$\Leftrightarrow\ (a^3+5a^2+10a+8)+i(a^2+2a)=0+i0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a=0 \\ a^3+5a^2+10a+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2)=0 \\ a^3+5a^2+10a+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \quad ou\ bien \quad a=-2 \\ a^3+5a^2+10a+8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ 0^3+5(0)^2+10(0)+8 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a=-2}$$

التمرين الثالث 1 ب

ننجز القسمة الأقليدية للحدودية : $z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8$ على الحدودية $(z+2)$ نجد :

$$\begin{array}{l|l} z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8 & z+2 \\ \hline z^3+2z^2 & z^2+(3+i)z+4 \\ \quad (3+i)z^2+(10+2i)z+8 & \\ \quad (3+i)z^2+2(3+i)z & \\ \qquad\qquad 4z+8 & \\ \qquad\qquad 4z+8 & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}$$

إذن : $z^3+(5+i)z^2+(10+2i)z+8$
$= (z+2)(z^2+(3+i)z+4)$

إذن المعادلة تُصبح : $z^2+(3+i)z+4=0$ أو $(z+2)=0$

لدينا : $\Delta = (3+i)^2-16 = 9-1+6i-16$
$= -8+6i = -9+6i+1$
$= (3i)^2+2(3i)(1)+1^2$
$= (3i+1)^2$

إذن :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(3+i)-(3i+1)}{2} = -2(1+i) \\ z_2 = \dfrac{-(3+i)+(3i+1)}{2} = (1+i) \end{cases}$$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة هي :

$$\boxed{S = \{-2\ ;\ -2(1+i)\ ;\ (i-1)\,\}}$$

التمرين الثالث 2 أ

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي و $M_1(z_1)$ صورتها بالتحويل r

لدينا : $r(M)=M_1 \Leftrightarrow z_1 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right) z$$

$$\Leftrightarrow (z_1-0) = \left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(z-0)$$

إذن r دوران مركزه O و قياس زاويته $\frac{\pi}{4}$.

لتكن $M_2(z_2)$ صورة $M(z)$ بالتحويل h .

لدينا : $h(M)=M_2 \Leftrightarrow z_2=\sqrt{2}\,z$
$\Leftrightarrow (z_2-0)=\sqrt{2}\,(z-0)$

إذن h تحاكي مركزه O و نسبته $\sqrt{2}$.

التمرين الثالث 2 ب

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى العقدي و $M_1(z_1)$ صورتها بالدوران r و $M'(z')$ هي صورة $M_1(z_1)$ بالتحاكي h .

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "F = h\circ r"'] & M_1 \arrow[r, "h"] & M' \end{tikzcd}$$

لدينا : $F(M)=M' \Leftrightarrow h\circ r(M)=M'$

$$\Leftrightarrow h\big(r(M)\big)=M'$$

$$\Leftrightarrow h(M_1)=M' \quad et \quad z_1=\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)z$$

$$\Leftrightarrow z' = \sqrt{2}\cdot z_1 = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{4}}\cdot z$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$$

$$= (1+i)z$$

إذن : $\boxed{F(M)=M' \Leftrightarrow z'=(1+i)z}$

التمرين الثالث 3 أ

لدينا :

$$F(M)=M' \Leftrightarrow z'=(1+i)z$$
$$\Leftrightarrow z'=z+iz$$
$$\Leftrightarrow z'-z=iz$$
$$\Leftrightarrow \frac{z'-z}{-z}=-i$$
$$\Leftrightarrow \frac{z'-z}{0-z}=-i \ \epsilon\ i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z'-z}{0-z}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{z'-z}{0-z}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_{M'}-z_M|=|z_O-z_M| \\ \arg\left(\dfrac{z_{M'}-z_M}{z_O-z_M}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} MM'=MO \\ \left(\overline{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MM'}}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

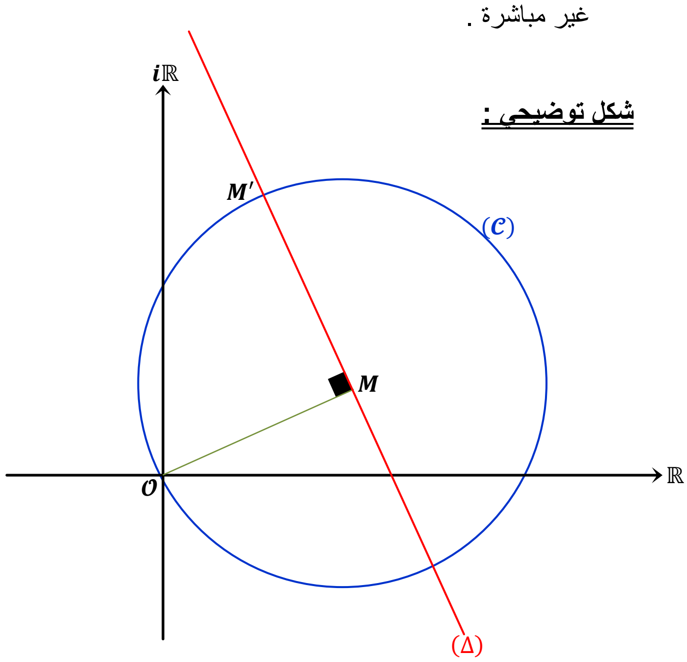
$\Leftrightarrow$ OMM' مثلث قائم الزاوية في M و متساوي الساقين رأسه M

التمرين الثالث 3 ب

طريقة هندسية لإنشاء M' انطلاقا من M .

- في البداية نتوفر على النقطتين O و M .
- نرسم المستقيم (Δ) المار من M و العمودي على (OM) .
- نرسم الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها M و شعاعها OM
- الدائرة $(\mathcal{C})$ تقطع المستقيم (Δ) في نقطتين .
- النقطة M' هي النقطة التي تكون فيها الزاوية $\left(\overline{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MM'}}\right)$ غير مباشرة .

شكل توضيحي :



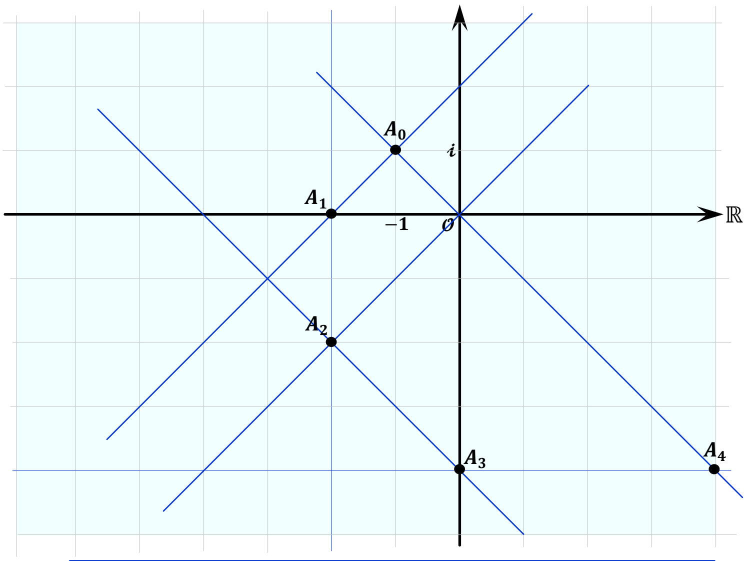
تعليل طريقة الإنشاء .

يرتكز تعليل هذه الطريقة على التكافؤ التالي :

$\boxed{F(M)=M'}$ $\Leftrightarrow$ OMM' قائم الزاوية في M و متساوي الساقين رأسه M .

و كذلك على النتيجة : $\left(\overline{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MM'}}\right)$.

التمرين الثالث 4 أ



التمرين الثالث 4 ب

في البداية نلاحظ أن : $F(M)=M' \Leftrightarrow z'=(1+i)z$

إذن :

$$F(A_{n-1})=A_n \Leftrightarrow z_{A_n}=(1+i)\,z_{A_{n-1}}$$
$$=(1+i)^2\,z_{A_{n-2}}$$
$$=(1+i)^3\,z_{A_{n-3}}$$
$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$
$$=(1+i)^n\,z_{A_0}$$

تكون النقط O و A_0 و A_n مستقيمية إذا وفقط إذا كان العدد $\left(\frac{z_{A_n}-z_O}{z_{A_0}-z_O}\right)$ عددا حقيقيا

$$O \text{ و } A_0 \text{ و } A_n \text{ مستقيمية} \Leftrightarrow \left(\frac{z_{A_n}-z_O}{z_{A_0}-z_O}\right)\epsilon\ \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_{A_n}}{z_{A_0}}\right)\epsilon\ \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(1+i)^n\ z_{A_0}}{z_{A_0}}\ \epsilon\ \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (1+i)^n\ \epsilon\ \mathbb{R}\ ;\ z_{A_0}\neq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n\ \epsilon\ \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \left(2^{\frac{n}{2}}\cdot e^{\frac{in\pi}{4}}\right)\ \epsilon\ \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4}\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4}=k\pi\ ;\ k\epsilon\mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow n=4k\ ;\ k\epsilon\mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{n\ est\ un\ multiple\ de\ 4\ dans\ \mathbb{N}}$$

و بالتالي تكون النقط O و A_0 و A_n مستقيمية إذا وفقط إذا كان n مضاعفا لـ 4 في $\mathbb{N}$

التمرين الرابع 1 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. سوف نستعمل في هذا السؤال تقنية المكاملة بالأجزاء .

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \underbrace{(1-x)^n}_{u'} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v}\, dx \\ &= \left[\frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} e^{2x}\right]_0^1 + \frac{2}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1} \cdot e^{2x}\, dx \\ &= \frac{1}{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right) I_{n+1} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*) \;;\; I_n = \frac{1}{n+1} + \left(\frac{2}{n+1}\right) I_{n+1}}$

نضرب الطرفين في $(n+1)$ نجد : $(n+1)\, I_n = 1 + 2\, I_{n+1}$

أي : $\boxed{2\, I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1}$ $(*)$

التمرين الرابع 1 ب

لدينا : $x \in [0,1] \;\Rightarrow\; 0 \le x \le 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\; 0 \le (1-x) \le 1 \\ &\Rightarrow\; 0 \le (1-x)^{n+1} \le 1 \;;\; \forall n\in\mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow\; 0 \le (1-x)^{n+1} e^{2x} \le e^{2x} \;;\; car\ e^{2x} > 0 \\ &\Rightarrow\; \int_0^1 0\, dx \le \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{2x}\, dx \le \int_0^1 e^{2x}\, dx \\ &\quad car\ ces\ fonctions\ sont\ continues\ et\ 0<1 \\ &\Rightarrow\; 0 \le I_{n+1} \le \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 \\ &\Rightarrow\; 0 \le I_{n+1} \le \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &\Rightarrow\; 0 \le \left(\frac{n+1}{2}\right) I_n - \frac{1}{2} \le \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad selon\ (*) \\ &\Rightarrow\; \frac{1}{2} \le \left(\frac{n+1}{2}\right) I_n \le \frac{e^2}{2} \;;\; Ajout\ de\ \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow\; \left(\frac{1}{n+1}\right) \le I_n \le \left(\frac{e^2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*) \;;\; \left(\frac{1}{n+1}\right) \le I_n \le \left(\frac{e^2}{n+1}\right)} \quad (**)$$

التمرين الرابع 2

لدينا $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{e^2}{n+1}\right) = 0$ و $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$

إذن التأطير $(**)$ يُصبح : $\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\substack{n\infty \\ \downarrow \\ 0}} \le I_n \le \underbrace{\left(\frac{e^2}{n+1}\right)}_{\substack{n\infty \\ \downarrow \\ 0}}$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نكتب : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(I_n) = 0}$

و لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \;;\; 2\, I_{n+1} = (n+1)\, I_n - 1$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \;;\; 2\, I_{n+1} = n\, I_n + I_n - 1$.

أي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \;;\; n\, I_n = 2\, I_{n+1} - I_n + 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n\infty}(n\, I_n) &= 2 \lim_{\substack{m\infty \\ m=n+1}} (I_m) - \lim_{n\infty}(I_n) + 1 \\ &= 2\times 0 - 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

التمرين الرابع 3 أ

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) \;:\; \frac{2^{n-1}}{n!} \le 1$

من أجل $n = 1$ لدينا : $\frac{2^{1-1}}{1!} = 1 \le 1$ إذن العبارة (P_1) صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$ و نفترض أن (P_n) صحيحة .

لدينا : $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ (P_n)\ est\ vraie \end{cases}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} n > 0 \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \le 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} n \ge 1 \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \le 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} n+1 \ge 2 \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \le 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2} \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \le 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{n+1} \le 1 \\ \frac{2^{n-1}}{n!} \le 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{2^{n-1}}{n!}\right) \le 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{2^{(n+1)-1}}{(n+1)!}\right) \le 1 \\ &\Rightarrow (P_{n+1})\ est\ vraie \end{aligned}$$

و بذلك نحصل على الوضعية الترجعية التالية :

$$\boxed{\begin{cases} (P_1)\ est\ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) \;;\; (\forall n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}}$$

إذن حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*) \;;\; (P_n)\ est\ vraie}$

$c-à-d \;:\; \boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*) \;;\; \frac{2^{n-1}}{n!} \le 1}$

التمرين الرابع 3 ب

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. $(n\in\mathbb{N}^*) \;\Rightarrow\; \frac{2^{n-1}}{n!} \le 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\; 2\left(\frac{2^{n-1}}{n!}\right) I_n \le 2\, I_n \\ &\Rightarrow\; \left(\frac{2^n}{n!}\right) I_n \le 2\, I_n \\ &\Rightarrow\; u_n \le 2\, I_n \le 2\left(\frac{e^2}{n+1}\right) \\ &\Rightarrow\; u_n \le \left(\frac{2\, e^2}{n+1}\right) \;;\; car\ \ I_n \le \frac{e^2}{n+1} \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*) \;;\; u_n \le \left(\frac{2\, e^2}{n+1}\right)}$

التمرين الرابع 3 ج

لدينا : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ I_n \geq \dfrac{1}{n+1} > 0$

إذن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \left(\dfrac{2^n}{n!}\right) I_n > 0$

أي : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n > 0}$ (1)

و نعلم أن : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n > \dfrac{2\,e^2}{n+1}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $\boxed{(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 0 < u_n \leq \dfrac{2\,e^2}{n+1}}$

و لدينا : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{2\,e^2}{n+1}\right) = 0}$

إذن نحصل على الوضعية التالية : $\boxed{\underbrace{0}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}} < u_n \leq \underbrace{\left(\dfrac{2\,e^2}{n+1}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} \mathbf{0}}}$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(u_n) = 0}$

التمرين الرابع 4 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$. لدينا :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right) I_{n+1} \\
&= \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right)\left(\left(\frac{n+1}{2}\right) I_n - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2^n}{n!}\right) I_n - \frac{2^n}{(n+1)!} \\
&= u_n - \frac{2^n}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع 4 ب

لدينا : $(\forall m\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_{m+1} = u_m - \dfrac{2^m}{(m+1)!}$

إذن :

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
(m=1) & \Rightarrow & u_2 = u_1 - \dfrac{2^1}{2!} \\
(m=2) & \Rightarrow & u_3 = u_2 - \dfrac{2^2}{3!} \\
(m=3) & \Rightarrow & u_4 = u_3 - \dfrac{2^3}{4!} \\
 & \vdots\ \vdots\ \vdots & \\
(m=n-1) & \Rightarrow & u_n = u_{n-1} - \dfrac{2^{n-1}}{n!}
\end{array}}$$

نجمع هذه المتساويات طرفا طرفا نجد :

$$(u_2 + \cdots + u_{n-1}) + u_n = u_1 + (u_2 + \cdots + u_{n-1}) - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{2^p}{(p+1)!}$$

$$\Leftrightarrow\ u_n = u_1 - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{2^p}{(p+1)!}$$

$$\Leftrightarrow\ u_n = u_1 - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{2^{p+1}}{2(p+1)!}$$

$$\Leftrightarrow\ u_n = u_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2^k}{k!}\right)\ ;\ p+1 = k$$

لنحسب الآن I_1 ثم u_1 .

لدينا :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (1-x)\,e^{2x}\,dx \\
&= \int_0^1 e^{2x}\,dx - \int_0^1 \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx \\
&= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \left(\left[\frac{x\,e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx\right) \\
&= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x\,e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x\,e^{2x}}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2}{2} \\
&= \frac{3\,e^2}{4} - \frac{3}{4} - \frac{e^2}{2} = \boxed{\left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}\right)}
\end{aligned}$$

و منه : $u_1 = \left(\dfrac{2^1}{1!}\right) I_1 = 2\left(\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{3}{4}\right) = \left(\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{6}{4}\right)$

و بالتالي :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{e^2}{2} - \frac{6}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{2^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^2 - 3 - \sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{2^k}{k!}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^2 - 1 - 2 - \sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{2^k}{k!}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} - \sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{2^k}{k!}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2^k}{k!}\right)\right)
\end{aligned}$$

و بالتالي : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \dfrac{1}{2}\left(e^2 - \sum\limits_{k=0}^{k=n}\left(\dfrac{2^k}{k!}\right)\right)$

$$\Rightarrow\ \sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2^k}{k!}\right) = (e^2 - 2\,u_n)$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2^k}{k!}\right)\right) = \lim_{n\infty}(e^2 - 2\,u_n)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\lim_{n\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{2^k}{k!}\right)\right) = e^2}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{k=n}\left(\dfrac{2^k}{k!}\right)\right) = e^2}$

Normalement on écrit $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{2^k}{k!}\right) = e^2$

et vous aurez l'occasion d'étudier ce genre d'objets mathématiques qu'on appelera Séries numériques à terme général u_n

et qu'on va noter $\sum u_n$

التمرين الخامس I 1 أ

في البداية نلاحظ أن الدالة g متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ لأنها عبارة عن مجموع دوال متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا :

$$g'(x) = (x^{-2})' - \frac{4}{x} = -2\,x^{-3} - \frac{4}{x} = \frac{-2}{x^3} - \frac{4}{x} = \frac{-(4x^2+2)}{x^3} = \frac{-2}{x^3}(2x^2+1) < 0$$

نلاحظ أن : $(\forall\, x > 0)\ ;\ g'(x) < 0$

إذن g دالة تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

التمرين الخامس I 1 ب

لدينا g دالة متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

إذن g تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو $g(\,]0,+\infty[\,)$.

و لدينا : $g(\,]0,+\infty[\,) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right[$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1-4\ln x\right) = -\infty$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}+1-4\ln x\right) = +\infty$

إذن g تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.

أي أن كل عنصر من $\mathbb{R}$ يقبل سابقا وحيدا من $]0,+\infty[$ بالدالة g .

أي : $(\forall y\epsilon\mathbb{R}), (\exists!\, x\,\epsilon\,]0,+\infty[\,)\ :\ g(x) = y$.

بما أن $0\,\epsilon\,\mathbb{R}$ فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ بالتقابل

يعني : $(\,\exists!\ \alpha > 0\,)\ ;\ g(\alpha) = 0$

أو بتعبير آخر المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$.

لنبين الآن أن : $1 < \alpha < 2$.

من أجل ذلك نحسب أولا $g(1)$ و $g(2)$.

$$\begin{cases} g(1) = \frac{1}{1^2} + 1 - 4\ln 1 = 1+1-0 = 2 \\ g(2) = \frac{1}{2^2} + 1 - 4\ln 2 \approx -1{,}5 \end{cases}$$

نلاحظ أن : $-1{,}5 < 0 < 2$ أي : $g(2) < g(\alpha) < g(1)$

نُدخل الدالة التناقصية قطعا g^{-1} على هذه الأعداد المنتمية إلى $\mathbb{R}$ نجد :

$$g^{-1}\big(g(2)\big) > g^{-1}\big(g(\alpha)\big) > g^{-1}\big(g(1)\big)$$

أي : $\boxed{2 > \alpha > 1}$

التمرين الخامس I 1 ج

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[\, = \mathbb{R}_+^*$ و نَفصل بين حالتين :

$$x\,\epsilon\,]0,\alpha] \ \Rightarrow\ x \le \alpha \ \Rightarrow\ g(x) \ge g(\alpha)\ ;\ car\ g\ est\ \searrow \ \Rightarrow\ g(x) \ge 0\ \ ;\ car\ g(\alpha) = 0$$

إذن : $\boxed{\forall\, x\,\epsilon\,]0,\alpha]\ \ ;\ \ g(x) \ge 0}$

$$x\,\epsilon\,[\alpha,+\infty[\ \Rightarrow\ x \ge \alpha \ \Rightarrow\ g(x) \le g(\alpha)\ ;\ car\ g\ est\ \searrow \ \Rightarrow\ g(x) \le 0\ \ ;\ car\ g(\alpha) = 0$$

إذن : $\boxed{\forall\, x\,\epsilon\, [\alpha,+\infty[\ \ ;\ \ g(x) \le 0}$

التمرين الخامس I 2 أ

لدينا : $(\forall\, x > 0)\ ;\ f(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x^2)^2}$

و لدينا ln دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و كذلك الدالة $x \longrightarrow (1+x^2)^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ لأنها حدودية من الدرجة 4 .

و كذلك : $(\forall\, x > 0)\ ;\ (1+x^2)^2 \neq 0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و المقام لا ينعدم .

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2)^2 - \big(2(1+x^2)(2x)\big)\ln x}{(1+x^2)^4} = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 4x\ln x}{(1+x^2)^3} = \frac{\frac{1}{x} + x - 4x\ln x}{(1+x^2)^3} = \frac{x\left(\frac{1}{x^2} + 1 - 4\ln x\right)}{(1+x^2)^3} = \boxed{\frac{x\,g(x)}{(1+x^2)^3}}$$

إذن : $\boxed{(\forall\, x > 0)\ \ ;\ \ f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(1+x^2)^3}}$

التمرين الخامس I 2 ب

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $(\forall\, x > 0)\ ;\ f'(x) = \dfrac{x\,g(x)}{(1+x^2)^3}$

نلاحظ أن : $(\forall\, x > 0)\ ;\ \dfrac{x}{(1+x^2)^3} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

لنحسب الآن نهايتي f عند 0^+ و $+\infty$.

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\right)\times\frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)\times\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right) = 0\times 0 = 0$$

و لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)\times\ln x = 1\times(-\infty) = -\infty$$

لنبين الآن أن : $\boxed{f(\alpha) = \dfrac{1}{4\alpha^2(1+\alpha^2)}}$

لدينا :

$$g(\alpha) = 0 \iff \frac{1}{\alpha^2} + 1 - 4\ln x = 0 \iff \frac{1+\alpha^2}{\alpha^2} = 4\ln\alpha \iff \frac{1+\alpha^2}{4\,\alpha^2} = \ln\alpha$$

إذن : $f(\alpha) = \dfrac{\ln \alpha}{(1+\alpha^2)^2} = (\ln \alpha)\left(\dfrac{1}{(1+\alpha^2)^2}\right)$

$$= \left(\frac{1+\alpha^2}{4\,\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{(1+\alpha^2)^2}\right) = \frac{1}{4\,\alpha^2(1+\alpha^2)}$$

من هذه النتائج نستنتج جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

التمرين الخامس I 3 أ

ليكن (T) المماس للمنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة ذات الأفصول 1 .

إذن : $(T) \ : \ y = f'(1)(x-1) + f(1)$

و لدينا : $f'(1) = \dfrac{1\,g(1)}{(1+1^2)^3} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

و كذلك : $f(1) = \dfrac{\ln 1}{(1+1^2)^2} = 0$

إذن : $\boxed{(y) \ : \ y = \frac{1}{4}(x-1)}$

التمرين الخامس I 3 ب

لنبين أن : $(\forall\, x > 0) \ ; \ \ln x \leq x - 1$

من أجل ذلك نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$\varphi(x) = \ln x - x + 1$

φ دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دوال متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

و لدينا : $(\forall\, x > 0) \ ; \ \varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

إذا كان : $x = 1$. فإن : $\varphi'(x) = 0$.

إذا كان : $x > 1$. فإن : $\varphi'(x) < 0$.

إذا كان : $x < 1$. فإن : $\varphi'(x) > 0$.

و لدينا : $\varphi(1) = 0$

و كذلك : $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x - x + 1) = -\infty$

و كذلك : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x + 1)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

من خلال هذا الجدول نلاحظ أن φ تقبل مطرافا عند النقطة ذات الأفصول 1 و هذا المطراف عبارة عن قيمة قصوية 0 . و ذلك لأن $\varphi'(x)$ تنعدم في 1 و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة .

إذن : $(\,\forall\, x \in\,]0,+\infty[\,) \ ; \ \varphi(x) \leq 0$

أي : $(\,\forall\, x \in\,]0,+\infty[\,) \ ; \ \ln x - x + 1 \leq 0$

أي : $(\,\forall\, x > 0\,) \ ; \ \ln x \leq x - 1$

التمرين الخامس I 3 ج

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . لدينا : $\ln x \leq x - 1$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{(1+x^2)^2}$

نحصل على : $\dfrac{\ln x}{(1+x^2)^2} \leq \dfrac{x-1}{(1+x^2)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4}(x-1) \leq \frac{x-1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1)\left(\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{4}(x-1) \leq (x-1)\left(\frac{4-(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

التمرين الخامس I 3 د

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ و المماس (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - \frac{1}{4}(x-1)$.

$$f(x) - \frac{1}{4}(x-1) = (x-1)\left(\frac{4-(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

$$= \frac{(x-1)(2-1-x^2)(2+1+x^2)}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(1-x^2)(3+x^2)}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-(x-1)(x-1)(1+x)(3+x^2)}{4(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-(x-1)^2(1+x)(3+x^2)}{4(1+x^2)^2} < 0$$

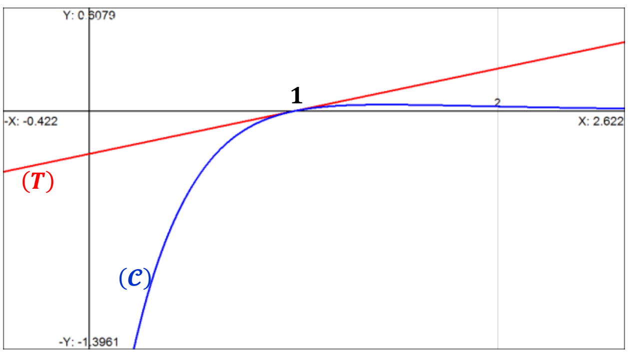
لأنه نلاحظ أن : $(\forall x > 0) \ ; \ \begin{cases} (x-1)^2 > 0 \\ (1+x) > 0 \\ (3+x^2) > 0 \\ 4(1+x^2)^2 > 0 \end{cases}$

إذن : $(\forall x > 0) \ ; \ f(x) - \dfrac{1}{4}(x-1) < 0$

أي : $(\forall x > 0) \ ; \ f(x) < \dfrac{1}{4}(x-1)$

و هذا يعني أنه على المجال المنحنى يوجد دائما أسفل المماس .

التمرين الخامس I 4



التمرين الخامس II 1

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من I

فإن الدالة

$$\boxed{\begin{array}{llll} F & : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I . و التي تنعدم في a .

لدينا f متصلة على المجال $]0,+\infty[$ و ليكن a عنصرا من $]0,+\infty[$

إذن الدالة

$$\boxed{\begin{array}{ll} \psi : &]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow \int_a^x f(t)\,dt \end{array}}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $]0,+\infty[$ و التي تنعدم في a .

يعني : $\psi(a)=0$ و $\psi'(x)=f(x)$; $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$

لدينا : $(\forall\, x>0)$; $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,dt$

$$= \int_{\frac{1}{x}}^{a} f(t)\,dt + \int_a^x f(x)\,dx$$

$$= -\int_a^{\frac{1}{x}} f(t)\,dt + \int_a^x f(x)\,dx$$

$$= \boxed{-\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \psi(x)}$$

لدينا $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$ و ψ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$

و $\psi(\mathbb{R}_*^+) \subseteq \mathbb{R}_*^+$. إذن الدالة $x \longrightarrow \psi\left(\frac{1}{x}\right)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$

و منه الدالة $(x) = -\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \psi(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$.

لأنها عبارة عن مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : $F'(x) = \left(\psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \psi'(x) - \left(\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$

$$= \psi'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)' \psi'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2}\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2}(-\ln x)\left(\frac{(x^2)^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

$$= \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2 \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2}$$

التمرين الخامس II 2

أسهل طريقة للإجابة على هذا السؤال هي أن نشتق الطرف الأيمن

و نبين أنه يساوي بالضبط $F'(x)$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

$$\frac{1}{2}\left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - Arctan(x)\right)' + \left(\frac{x\ln x}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{(x\ln x)'(1+x^2) - 2x(x\ln x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{(1+\ln x)(1+x^2) - 2x^2\ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{\ln x - x^2\ln x + x^2 + 1}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2+1} - \frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{-1}{1+x^2} + \frac{(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1-x^2)\ln x}{(1+x^2)^2} = F'(x)$$

نستنتج أن : $F'(x) = \left(\frac{1}{2}\left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - Arctan(x)\right) + \frac{x\ln x}{1+x^2}\right)'$

إذن : $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}\left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - Arctan(x)\right) + \frac{x\ln x}{1+x^2}}$

التمرين الخامس II 3 أ

تذكير بنهايات الدالة $Arctan$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0} Arctan(x) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x\to-\infty} Arctan(x) = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - Arctan(x)\right) +$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \left(\frac{0}{1+0}\right)$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(Arctan\left(\frac{1}{x}\right) - Arctan(x)\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\ln x}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{0}{0+1} = \boxed{\frac{-\pi}{4}}$$

التمرين الخامس II 3 ب

لدينا : $(\forall\, x>0)$; $F'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)\ln x}{(1+x^2)^2}$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
$F'(x)$		$-$	0	$-$	
F	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-\pi}{4}$

أجوبة امتحان مدينة إنزكان 2007

التمرين الأول 1

الخاصية التي سوف نستعملها في الجواب هي الآتية .

إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا غير أولي و أكبر من 2 فإنه يوجد عدد أولي موجب p يقسم n . و حيث $^{2} \leq n$

أو بتعبير آخر : إذا كانت جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي n لا تقسم n فإن n عدد أولي .

في هذا السؤال : لدينا جميع الأعداد التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2003 هي 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 23 و 29 و 31 و 37 و 41 و 43 و نلاحظ باستعمال الآلة الحاسبة أنه لا أحد من هذه الأعداد يقسم 2003 إذن العدد 2003 عدد أولي .

التمرين الأول 2 أ

لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) \; : \; 123x+2003y=1$.

في البداية يجب تحديد $123 \wedge 2003$.

و هذا سهل في هذه الحالة لأن 2003 عدد أولي و أكبر من 123 .

إذن : $2003 \wedge 123 = 1$

و منه نستنتج أن المعادلة (E) قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$.

نحتاج الآن إلى إيجاد حل خاص للمعادلة (E) .

و ذلك بالإستعانة بالقسمات المتتالية في خوارزمية أقليدس.

$$\begin{array}{c|c} 2003 & 123 \\ 35 & 16 \end{array} \implies 35 = 2003 - 16\times123 \quad (1)$$

$$\begin{array}{c|c} 123 & 35 \\ 18 & 3 \end{array} \implies 18 = 123 - 3\times35 \quad (2)$$

$$\begin{array}{c|c} 35 & 18 \\ 17 & 1 \end{array} \implies 17 = 35 - 18 \quad (3)$$

$$\begin{array}{c|c} 18 & 17 \\ 1 & 1 \end{array} \implies 1 = 18 - 17 \quad (4)$$

$$\begin{array}{c|c} 17 & 1 \\ 0 & 17 \end{array} \implies you're\ gonna\ stop\ right\ now$$

لدينا:

$$\begin{aligned} 1 &= 18-17 \;;\; d'après\ (4) \\ &= 18-(35-18) \;;\; d'après\ (3) \\ &= 2\times18-35 \;;\; Simplification \\ &= 2(123-3\times35)-35 \;;\; d'après\ (2) \\ &= 2\times123-7\times35 \;;\; Simplification \\ &= 2\times123-7(2003-16\times123) \;;\; d'après\ (1) \\ &= 114\times123-7\times2003 \;;\; Simplification \\ &= 123(114)+2003(-7)=1 \;;\; Bingo!!! \end{aligned}$$

و هذا يعني أن الزوج $(114,-7)$ حل خاص للمعادلة (E) .

ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

و ننطلق من النظمة التالية :

$$\begin{cases} (x,y)\ est\ solution\ de\ (E) \\ (114,-7)\ est\ solution\ de\ (E) \end{cases}$$

التي تُصبح :

$$\begin{cases} 123x+2003y=1 \\ 123(114)+2003(-7)=1 \end{cases}$$

ننجز عملية الطرح بين هاتين المتساويتين فنحصل على:

$$123(x-114)+2003(y+7)=0$$

أي : $\boxed{2003(y+7)=123(114-x)}$ $(*)$

و نستنتج من هذه الكتابة أن 123 يقسم الجداء $2003(y+7)$.

و بما أن : $2003 \wedge 123 = 1$

فإنه حسب $Gauss$ نستنتج أن العدد 123 يقسم العامل $(y+7)$.

و يوجد بذلك k من $\mathbb{Z}$ حيث $y+7=123k$.

أي : $(\exists k\in\mathbb{Z}) \; ; \; y=123k-7$

نعوض y بـ $(123k-7)$ في النتيجة $(*)$ نجد :

$$2003(123k)=123(114-x)$$

أي : $x=-2003k+114$

و بذلك نستنتج أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (E) .

فإنه بالضرورة سوف يكون مكتوبا على الشكل :

$$(-2003k+114 \; ; \; 123k-7) \; ; \; k\in\mathbb{Z}$$

لنبين الآن أن جميع الأزواج (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ المكتوبة على شكل : $(-2003k+114 \; ; \; 123k-7)$ هي حلول للمعادلة (E) .

لدينا:

$$\begin{aligned} 123(-2003k+114)+2003(123k-7) &= -246369k+14022+24636k-14021 \\ &= 14022-14021 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن كل زوج من $\mathbb{Z}^2$ مكتوب على شكل $(-2003k+114 \; ; \; 123k-7)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ هو حل للمعادلة (E) .

خلاصة : S مجموعة حلول المعادلة (E) معرفة بإدراك بما يلي:

$$S=\{(-2003k+114 \; ; \; 123k-7) \; ; \; k\in\mathbb{Z}\}$$

التمرين الأول 2 ب

ليكن k_0 عددا صحيحا حيث $123k_0 \equiv 1\,[2003]$.

إذن نستنتج أن 2003 يقسم العدد $(123k_0-1)$.

يوجد إذن k' من $\mathbb{Z}$ حيث $123k_0-1=2003k'$.

أي : $123k_0-2003k'=1$.

أي : $123k_0+2003k_1=1$ مع $k_1=-k'$.

و هذا يعني أن الزوج (k_0,k_1) حل للمعادلة (E) .

هذا الزوج إذن يُكتب على شكل:

$(k_0,k_1)=(-2003k+114 \; ; \; 123k-7)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

لكي يكون العدد $-2003k+114$ صحيحا طبيعيا نختار لـ k قيما سالبة أو منعدمة . و أصغر قيمة عددية موجبة للتعبير $-2003k+114$ نحصل عليها عندما نختار $k=0$

إذن إذا كان $k=0$ فإن $k_0=114$.

التمرين الأول 2 ج

ليكن x عددا نسبيا حيث $x\equiv 456k_0\,[2003]$.

نلاحظ أن : $456=4\times114=4k_0$.

إذن : $x\equiv 4\,k_0^2\,[2003]$.

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 123 نجد:

(1) $\boxed{123x \equiv 123\cdot4\cdot k_0^2\,[2003]}$

من جهة أخرى لدينا : $123k_0\equiv1\,[2003]$.

نضرب طرفي هذه المتوافقة في $4k_0$ نحصل على:

(2) $\boxed{123\cdot4\cdot k_0^2\equiv 4k_0\,[2003]}$

و نعلم أن علاقة " يوفق بترديد " مُتعدية (لأنها علاقة تكافؤ)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $123x\equiv4k_0\,[2003]$

و بما أن : $4k_0=4\times114=456$

فإن : $123x\equiv456\,[2003]$

و بذلك نكون قد بينا الإستلزام التالي : $(x\in\mathbb{Z})$

$\boxed{x\equiv456k_0\,[2003] \implies 123x\equiv456\,[2003]}$ $(*)$

من أجل الإستلزام الآخر نعتبر $x\in\mathbb{Z}$ حيث $123x\equiv456\,[2003]$ (3)

لدينا : $123k_0\equiv1\,[2003]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في $456=4k_0$ نجد:

(4) $\boxed{4\cdot123\cdot k_0^2\equiv456\,[2003]}$

و نعلم أن علاقة " يوافق بترديد " متعدية .(لأنها علاقة تكافؤ)

إذن من (3) و (4) نستنتج أن : $123\equiv123\cdot4\cdot k_0^2\,[2003]$

و في هذه المتوافقة نستطيع أن نختزل بالعدد 123 لأنه أولي مع 2003

و ذلك حسب : (مبرهنة $Gauss$)

نحصل إذن بعد الإختزال على ما يلي : $x \equiv 4k_0^2\ [2003]$

و نعلم أن : $4k_0 = 456$. إذن : $x \equiv 456k_0\ [2003]$.

و بذلك نحصل على الإستلزام التالي : $(x \in \mathbb{Z})$

$$\boxed{123x \equiv 456\ [2003] \ \Longrightarrow\ x \equiv 456k_0\ [2003]} \quad (**)$$

من الإستلزامين $(*)$ و $(**)$ نستنتج التكافؤ التالي : $(*)$

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{Z})\ ;\ 123x \equiv 456\ [2003] \ \Longleftrightarrow\ x \equiv 456k_0\ [2003]}$$

التمرين الأول 2 د

لتكن (S) مجموعة حلول المعادلة : $(G) : 123x \equiv 456\ [2003]$

$$\begin{aligned} x \in (S) &\Leftrightarrow 123x \equiv 456\ [2003] \\ &\Leftrightarrow x \equiv 456k_0\ [2003] \\ &\Leftrightarrow (x - 456k_0) = 2003k\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 2003k + 456k_0\ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = 2003k + 4k_0^2\ ;\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(S) = \left\{ 2003k + 4k_0^2 \ ;\ \left| \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \\ k_0 = 114 \end{matrix} \right. \right\}}$

التمرين الأول 2 هـ

لنحل في $\mathbb{N}$ النظمة التالية : $\begin{cases} 123n \equiv 456\ [2003] \\ 1 \le n < 2003 \end{cases}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} n = 2003k + 4k_0 \ ;\ \left| \begin{matrix} k_0 = 114 \\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right. \\ 1 \le n < 2003 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le 2003k + 4k_0^2 < 2003 \\ k \in \mathbb{Z} \ \ et \ \ k_0 = 114 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 4k_0) \le 2003k < 2003 - 4k_0^2 \\ k \in \mathbb{Z} \ \ et \ \ k_0 = 114 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1 - 4k_0}{2003}\right) \le k < \left(\dfrac{2003 - 4k_0^2}{2003}\right) \\ k \in \mathbb{Z} \ \ et \ \ k_0 = 114 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -25{,}9 \le k < -24{,}9 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Rightarrow k \in [-25{,}9\ ;\ -24{,}9[\ \cap\ \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow k \in \{-25\} \\ &\Rightarrow k = -25 \\ &\Rightarrow \begin{cases} n = 2003k + 4k_0^2 \\ k = -25 \ \ et \ \ k_0 = 114 \end{cases} \\ &\Rightarrow \boxed{n = 2003(-25) + 4(114)^2 = 1909} \end{aligned}$$

إذن العدد الوحيد n الذي يُحقق $123n \equiv 456\ [2003]$ و $1 \le n < 2003$ هو $n = 1909$.

التمرين الأول 3 أ

ليكن a عنصرا من المجموعة $\{1,2,\cdots,2002\}$.

و نريد أن نبين أن المعادلة $am \equiv 1\ [2003]$ ذات المجهول m تقبل حلولا في $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} am \equiv 1\ [2003] &\Leftrightarrow am - 1 = 2003u\ ;\ u \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow am - 2003u = 1\ ;\ u \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين نسبيين u و m و هي قابلة للحل إذا وفقط إذا كان $a \wedge 2003 = 1$.

و بالفعل لدينا a و 2003 أوليان فيما بينهما لأن 2003 عدد أولي موجب و أكبر قطعا من العدد الموجب a . أي أن أكبر قاسم مشترك بينهما هو 1

إذن كل حل للمعادلة $am - 2003u = 1$ سوف يُكتب على شكل :

$$\boxed{\begin{cases} m = \alpha k + \beta \ ;\ (\alpha, \beta, k) \in \mathbb{Z}^3 \\ u = \alpha' k + \beta' \ ;\ (\alpha', \beta') \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}}$$

ما يهمنا في هذه الكتابة هو m فقط .

و نلاحظ أن : $m = \alpha k + \beta \in \mathbb{Z}$.

لكن من أجل $k \ge \left[\frac{-\beta}{\alpha}\right] + 1$ يكون العدد m موجبا .

($[x]$ هو الجزء الصحيح لعدد حقيقي x)

إذن توجد أزواج (m,u) حيث m موجب حلول في $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ للمعادلة $am - 2003u = 1$.

و بالتالي يوجد عدد صحيح طبيعي m حيث $am \equiv 1\ [2003]$.

ملاحظة و إضافة :

قد يتساءل البعض عن ماهية أسهل حل m يُمكن إيجاده بدلالة a للمعادلة $am \equiv 1\ [2003]$. و الجواب سوف يأتي من خلال مبرهنة فيرما .

تذكير بمبرهنة *Fermat* : (الصيغة العامة)

$$\boxed{p \in \mathbb{P}^+ \ \Longrightarrow\ (\forall a \in \mathbb{Z})\ ;\ a^p \equiv a\ [p]}$$

مبرهنة *Fermat* : (الصيغة الخاصة)

$$\boxed{\left| \begin{matrix} p \in \mathbb{P}^+ \\ a \wedge p = 1 \end{matrix} \right. \ \Longrightarrow\ a^{p-1} \equiv 1\ [p]}$$

سوف نستعمل الصيغة الصغرى لإيجاد m بدلالة a .

ليكن a عنصرا من المجموعة $\{1,2,\cdots,2002\}$.

نلاحظ أن 2003 عدد أولي و أكبر من العدد الموجب a .

إذن 2003 عدد أولي و $a \wedge 2003 = 1$.

و منه حسب مبرهنة *Fermat* نستنتج أن : $a^{2003-1} \equiv 1\ [2003]$.

أي : $a^{2002} \equiv 1\ [2003]$. أي : $a(a^{2001}) \equiv 1\ [2003]$.

أي : $am \equiv 1\ [2003]$ حيث $m = a^{2001} \in \mathbb{N}$.

إذن من بين الحلول الموجبة للمعادلة $am \equiv 1\ [2003]$ نجد a^{2001} .

التمرين الأول 3 ب

ليكن a عنصرا من المجموعة $\{1,2,\cdots,2002\}$.

إذن حسب نتيجة 3) أ) : يوجد m من $\mathbb{N}$ حيث $am \equiv 1\ [2003]$.

ليكن b عنصرا من $\mathbb{Z}$ و ننجز القسمة الأقليدية للعدد mb على العدد 2003

نجد : $\exists!\, x \in \{0,1,2,\cdots,2002\}\ ;\ mb \equiv x\ [2003]$

الحالة الأولى : إذا كان $x = 0$.

إذن : $mb \equiv 0\ [2003]$. و منه 2003 يقسم الجداء mb .

و منه : 2003 يقسم b أو 2003 يقسم m . لأن 2003 عدد أولي

إذا كان 2003 يقسم b . فإن $b \equiv 0\ [2003]$.

أي أن المعادلة تصبح $ax \equiv 0\ [2003]$.

يعني : $x \equiv 0\ [2003]$. (اختزلنا بـ a لأنه أولي مع 2003)

إذن : $x = 2003k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذا كان 2003 يقسم m . فإن $m \equiv 0\ [2003]$. أي : $am \equiv 0\ [2003]$

و لدينا : $am \equiv 1\ [2003]$. إذن : $1 \equiv 0\ [2003]$.

يعني أن 2003 يقسم العدد 1 . و هذا تناقض واضح

إذن ما افترضناه كان خاطئاً .

إذن 2003 لا يقسم m .

الحالة الثانية : إذا كان $x \neq 0$.

يعني : $\exists!\, x \in \{1,2,\cdots,2002\} : mb \equiv x\ [2003]$

و هذا يعني أن المعادلة $mb \equiv x\ [2003]$ ذات المجهول x تقبل حلا وحيدا x في المجموعة $\{1,2,\cdots,2002\}$.

لنبين أن المعادلة $mb \equiv x\ [2003]$. تُكافئ المعادلة $ax \equiv b[2003]$

ننطلق من $mb \equiv x\ [2003]$ ثم نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد a

فنحصل على : $\boxed{amb \equiv ax\ [2003]}$ (1)

و نعلم أن : $am \equiv 1\ [2003]$.

نضرب طرفي هذه المتوافقة في b نجد : $\boxed{amb \equiv b\ [2003]}$ (2)

علاقة " يوافق بترديد " علاقة متعدية (لأنها علاقة تكافؤ)

من (1) و (2) نستنتج أن : $ax \equiv b\ [2003]$

إذن المعادلة $ax \equiv [2003]$ هي كذلك تقبل حلا وحيدا x من المجموعة $\{1,2,3,4,\cdots,2002\}$.

أو بتعبير آخر، يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد x .

بحيث $1 \le x < 2003$ و $mb \equiv x\ [2003]$.

التمرين الأول 3 ج

رأينا من خلال السؤال السابق أن :

$$\left|\begin{array}{l}\forall\, a \in \{1,2,\cdots,2002\} \\ \forall\, b \not\equiv 0\ [2003] \qquad ; \quad ax \equiv b\ [2003] \\ \exists!\, x \in \{1,2,\cdots,2002\}\end{array}\right.$$

من أجل $b = 1$ نحصل على ما يلي :

$$\left|\begin{array}{l}\forall\, y \in \{1,2,\cdots,2002\} \\ \exists!\, x \in \{1,2,\cdots,2002\}\end{array}\right. \quad ; \quad xy \equiv 1\ [2003]$$

أو بتعبير آخر، كل عنصر من $\{1,2,\cdots,2002\}$ يقبل مقلوبا وحيدا من $\{1,2,\cdots,2002\}$ بالضرب التوافقي بترديد 2003 .

و هذا يعني أن التطبيق f المعرف بما يلي :

$$\boxed{\begin{array}{c} f \ : \ \{1,2,\cdots,2002\} \longrightarrow \{1,2,\cdots,2002\} \\ x \longrightarrow y \\ xy \equiv 1\ [2003]\end{array}}$$

f تطبيق تقابلي من $\{1,2,\cdots,2002\}$ نحو $\{1,2,\cdots,2002\}$.

المتوافقة $xy \equiv 1\ [2003]$ حيث x و y عنصرين من $\{1,2,\cdots,2002\}$. هي في الحقيقة 2002 متوافقة.

و عند المرور إلى الجداء بين جميع أطراف هذه المتوافقات الألفي و متوافقة نحصل على ما يلي : $(1\times 2\times\cdots\times 2002)^2 \equiv 1\ [2003]$

أي : $(2002!)^2 \equiv 1\ [2003]$

إضافات : عندما نغير معطيات التمرين و الاشتغال بعدد أولي p عوض 2003 سوف نحصل على النتيجة التالية : $\boxed{\left((p-1)!\right)^2 \equiv 1\ [p]}$

أي p يقسم $\left((p-1)!\right)^2 - 1$.

أي p يقسم $\left((p-1)!-1\right)\left((p-1)!+1\right)$.

أي أن p يقسم التعبير $(p-1)!+1$ أو p يقسم $(p-1)!-1$.

لأن p عدد أولي .

عندما نفترض أن p يقسم $(p-1)!-1$ نحصل على تناقض .

إذن p يقسم $(p-1)!+1$.

و منه : $(p-1)!+1 \equiv 0\ [p]$.

و هذه المبرهنة تسمى : $(Théorème\ \ de\ \ wilson)$

$$\boxed{p \text{ عدد أولي} \iff (p-1)!+1 \equiv 0\ [p]}$$

التمرين الثاني 1

$$\begin{aligned} MNP \text{ قائم الزاوية في } N \iff & \overline{(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP})} \equiv \tfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\ \iff & \arg\left(\frac{z_P - z_N}{z_M - z_N}\right) \equiv \tfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\ \iff & \frac{z_P - z_N}{z_M - z_N} \in (i\mathbb{R})^* \\ \iff & \frac{p-n}{m-n} \in (i\mathbb{R})^* \\ \iff & \mathrm{i}\left(\frac{p-n}{m-n}\right) \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

التمرين الثاني 2 أ

ليكن z عددا عقديا مخالفا لـ -1 و 0 و 1 .

نفترض أن $M = N$. إذن : $aff(N) = aff(M)$

أي : $z^2 = z$. أي : $z^2 - z = 0$.

أي : $z(z-1) = 0$. أي : $z = 0$ أو $z = 1$.

و هذا تناقض لأن $z \neq 0$ و $z \neq 1$.

إذن ما افترضناه كان خاطئا .

إذن : $\boxed{M \neq N}$

لدينا $z^2 \neq z$ إذن $(z^2)^2 \neq z^2$.

أي $z^4 \neq z^2$. أي $\boxed{P \neq N}$.

نفترض الآن أن $M = P$.

إذن $z^4 = z$. أي : $z(z^3 - 1) = 0$

و منه $z^3 - 1 = 0$ لأن $z \neq 0$.

يعني أن : $(z-1)(z^2+z+1) = 0$

و منه $z^2+z+1 = 0$ لأن $z \neq 1$.

و لدينا $z \neq -1$ أي $z+1 \neq 0$.

و كذلك $z \neq 0$ أي $z^2 \neq 0$.

و منهما نستنتج أن : $z^2+z+1 \neq 0$.

إذن العبارة $(z^2+z+1) = 0$ تناقض واضح.

يعني أن ما افترضناه كان خاطئا .

إذن : $\boxed{M \neq P}$.

إذن النقط M و N و P مختلفة مثنى مثنى .

التمرين الثاني 2 ب

نضع $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان .

$$\begin{aligned} MNP \text{ قائم الزاوية في } N \iff & \begin{cases} \overline{(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP})} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ M \neq N \neq P \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \arg\left(\frac{z_P - z_N}{z_M - z_N}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\ z_M \neq z_N \neq z_P \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \left(\frac{z_P - z_N}{z_M - z_N}\right) \in i\mathbb{R} \\ z_M \neq z_N \neq z_P \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \left(\frac{z^4 - z^2}{z - z^2}\right) \in i\mathbb{R} \\ z \notin \{-1,0,1\} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \frac{(z^2 - z)(z^2 + z)}{(z - z^2)} \in i\mathbb{R} \\ z \notin \{-1,0,1\} \end{cases} \end{aligned}$$

نختزل بالعدد المنعدم $(z^2 - z)$ فنحصل على :

$$\begin{aligned} \iff & \begin{cases} -(z^2 + z) \in i\mathbb{R} \\ z \notin \{-1,0,1\} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} (z^2 + z) \in i\mathbb{R} \\ z \notin \{-1,0,1\} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \left((x+iy)^2 + (x+iy)\right) \in i\mathbb{R} \\ (x+iy) \notin \{-1,0,1\} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y) \in i\mathbb{R} \\ (x,y) \notin \{(-1,0)\ ;\ (0,0)\ ;\ (1,0)\} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ y(2x+1) \neq 0 \\ (x,y) \notin \{(-1,0)\ ;\ (0,0)\ ;\ (1,0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ (x,y) \neq \left(\frac{-1}{2}\,;0\right) \\ (x,y) \notin \{(-1,0)\ ;\ (0,0)\ ;\ (1,0)\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ (x,y) \notin \{(-1,0)\ ;\ (0,0)\} \end{cases}$$

لاحظ أن النقطتان $(0,0)$ و $(-1,0)$ تُحققان الشرط $x^2 - y^2 + x = 0$

و النقطتان $\left(\frac{-1}{2}\,;0\right)$ و $(1,0)$ لا تحققاه .

إذن يكون المثلث MNP قائم الزاوية في N ،

إذا و فقط إذا كانت النقطة $\binom{x}{y}$ تنتمي إلى المنحنى (Γ) ذو المعادلة التالية :

$x^2 - y^2 + x = 0$ محروم من النقطتين $O(0,0)$ و $A(-1,0)$.

التمرين الثاني 2 ج

$$\begin{aligned}
(\Gamma) &= \left\{ M(x,y)\ ;\ x^2 - y^2 + x = 0\ ;\ \left| \begin{matrix} (x,y) \neq (0,0) \\ (x,y) \neq (-1,0) \end{matrix} \right. \right\} \\
&= \left\{ M(x,y)\ ;\ (x^2 + x) - y^2 = 0\ ;\ \left| \begin{matrix} (x,y) \neq (0,0) \\ (x,y) \neq (-1,0) \end{matrix} \right. \right\} \\
&= \left\{ M(x,y)\ ;\ \left(x^2 + 2\cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - y^2 = \frac{1}{4} \right\} \\
&= \left\{ M(x,y)\ ;\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4} \right\} \\
&= \left\{ M(x,y)\ ;\ \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \right\}
\end{aligned}$$

إذن (Γ) عبارة عن هذلول مركز تماثله $\Omega\left(\frac{-1}{2}\,;0\right)$ و بؤرتاه $F(c,0)$

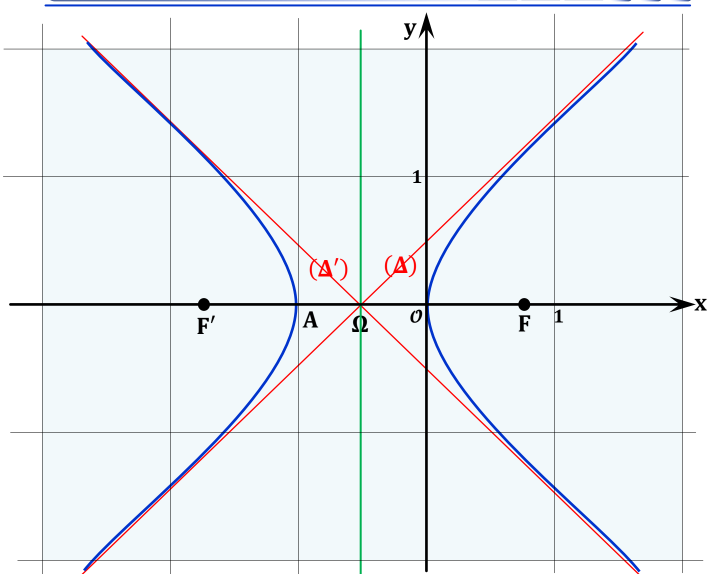
و $F'(-c,0)$. بحيث $c = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

و مقارباه هما المستقيمان (Δ) و (Δ') . المعرفين بما يلي :

$$\begin{cases} (\Delta)\ :\ (y-0) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \\ (\Delta')\ :\ (y-0) = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

يعني : $\begin{cases} (\Delta)\ :\ y = x + \frac{1}{2} \\ (\Delta')\ :\ y = -\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$

التمرين الثاني 2 د



التمرين الثالث 1

توجد طريقتان لإنجاز ذلك :

الطريقة الأولى : استعمال تعريف الزمرة و نبين أن :

- E مجموعة غير فارغة
- $+$ قانون تركيب داخلي في E
- $+$ تبادلي و تجميعي في E
- $+$ يقبل عنصرا محايدا وحيدا في E
- كل عنصر x يقبل مماثلا وحيدا x من E

الطريقة الثانية : استعمال مفهوم الزمرة الجزئية .

لنبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة الأم $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

و من أجل ذلك يكفي أن نبين أن E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و $M(a,b) - M(c,d) \in E$; $\left| \begin{matrix} \forall\, M(a,b) \in E \\ \forall\, M(c,d) \in E \end{matrix} \right.$.

من الواضح أن E جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنها تضم مصفوفات مُربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية . و هي مجموعة غير فارغة لأننا نستطيع رصد عنصر واحد على الأقل من E و هي المصفوفة $M(1,0) = I$.

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

لدينا :

$$\begin{aligned}
M(a,b) - M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -d \\ 3d & c-2d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a-c & -(b-d) \\ 3(b-d) & (a-c)-2(b-d) \end{pmatrix} \\
&= M\big((a-c)\ ;\ (b-d)\big) \in E
\end{aligned}$$

لأن $(a-c)$ و $(b-d)$ عددان حقيقيان .

و بالتالي $(E,+)$ زمرة تبادلية لأنها زمرة جزئية من الزمرة التبادلية الأم $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

التمرين الثالث 2 أ

لتكن a و b و c و d أربعة أعداد حقيقية :

$$\begin{aligned}
M(a,b) \times M(c,d) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ 3d & c-2d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac - 3bd & -ad - b(a-2d) \\ 3bc + 3d(a-2b) & -3bd + (a-2b)(c-2d) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (ac-3bd) & -(ad+ab+2bd) \\ 3(ad+ab+2bd) & (ac-3bd) - 2(ad+ab+2bd) \end{pmatrix} \\
&= M(ac - 3bd\ ;\ ad + bc - 2bd) \in E
\end{aligned}$$

لأن $(ad + bc - 2bd)$ و $(ac - 3bd)$ عددان حقيقيان .

التمرين الثالث 2 ب

تكون $(E,+,\times)$ حلقة إذا وفقط إذا كان :

- $(E,+)$ زمرة تبادلية .
- القانون $\times$ تجميعي في $(E,\times)$.
- القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$.

حصلنا من خلال ما سبق على أن $(E,+)$ زمرة تبادلية .

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ ثلاث مصفوفات من E .

لدينا : $M(a,b) \times \big(M(c,d) \times M(e,f)\big)$

$$\begin{aligned}
&= M(a,b) \times M(ce - 3df\ ;\ cf + de - 2df) \\
&= M\big(\, a(ce - 3df) - \\
&\qquad - 3b(cf + de - 2df)\ ;\ a(cf + \\
&\qquad + de - 2df) + b(ce - 3df) - \\
&\qquad - 2b(cf + de - 2df)\big) \\
&= M\big(\, ace - 3(adf + bcf + bde + \\
&\qquad + bdf)\ ;\ acf + ade + \\
&\qquad + bce + bdf -
\end{aligned}$$

و بنفس الطريقة نبين أن :

$$\begin{aligned}\boxed{\begin{aligned}&\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f) = \\ &\quad = M\big(ace-3(adf+bcf+bdf)\ ;\ acf + \\ &\quad + ade+bce+bdf-2(adf+bcf+bde)\big)\end{aligned}}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{إذن } \times \text{ قانون تجميعي في } (E,\times)}$ (2) .

و لدينا : $M(a,b)\times\big(M(c,d)+M(e,f)\big)$

$$\begin{aligned}&= M(a,b)\times M(c+e\ ;\ d+f)\\ &= M\big(a(c+e)-3b(d+f)\ ;\ a(d+f)+ b(c+e)-2b(d+f)\big)\\ &= M\big((ac+ae)-3(bd+bf)\ ;\ ad+af+ bc+be-2(bd+bf)\big)\end{aligned}$$

و بنفس الطريقة لدينا : $M(a,b)\times M(c,d)+M(a,b)\times M(e,f)$

$$\begin{aligned}&= M(ac-3bd\,;ad+bc-2bd)+ M(ae-3bf\ ;\ af+be-2bf)\\ &= M\big((ac+ae)-3(bd+bf)\ ;\ ad+af+bc+ be-2(bd+bf)\big)\end{aligned}$$

إذن : $M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big) = M(a,b)\times M(c,d)+M(a,b)\times M(e,f)$

و هذا يعني أن $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ على اليسار .

و بنفس الطريقة نبين بكل بساطة أن $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ على اليمين .

$$\big(M(c,d)+M(e,f)\big)\times M(a,b) = M(c,d)\times M(a,b)+M(e,f)\times M(a,b)$$

إذن $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E (3) .

و من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة .

التمرين الثالث 3 أ

لكي يكون E^* جزءا مستقرا في $(E,\times)$ يكفي أن نتحقق من أن لكل مصفوفتين $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E^* لدينا : $M(a,b)\times M(c,d)\in E^*$

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E^* .

$$\boxed{M(a,b)\times M(c,d) = M(ac-3bd\ ;\ ad+bc-2bd)}$$

و لكي تكون هذه المصفوفة ضمن E^* .

يكفي أن نبين أن : $\begin{cases} ac-3bd\neq 0\\ ad+bc-2bd\neq 0\end{cases}$

بالخُلف، نفترض أن $\begin{cases} ac-3bd= 0\\ ad+bc-2bd= 0\end{cases}$

إذن : $\begin{cases} c=\frac{3bd}{a}\ ;\ a\neq 0\\ ad+\frac{3b^2d}{a}-2bd=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{3bd}{a}\ ;\ a\neq 0\\ d\left(a+\dfrac{3b^2}{a}-2b\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{3bd}{a}\ ;\ a\neq 0\\ d=0\ \ ou\ \ \left(a+\dfrac{3b^2}{a}-2b\right)=0\end{cases}$$

$$Si\ \ d=0 \ \Rightarrow\ c=0 \ \Rightarrow\ a=0\ \ et\ \ b=0 \ \Rightarrow\ Absurde\ car\ (a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$$

$$a+\frac{3b^2}{a}-2b=0 \Rightarrow a(a-2b)=3b^2 \Rightarrow a^2-2ab=3b^2 \Rightarrow a^2-2ab+b^2=4b^2 \Rightarrow (a-b)^2=4b^2 \Rightarrow (a-b)=\pm 2b$$

$$Si\ \ a-b=2b \Rightarrow \begin{cases}3bc-3bd=0\\ 3bd+bc-2bd=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3b(c-b)=0\\ bd+bc=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=0\ \ ou\ \ c-b=0\\ bd+bc=0\end{cases}$$

$$Si\ \ b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow c=0\ \ et\ \ d=0 \Rightarrow Contradiction$$

$$Si\ \ c-d=0 \Rightarrow c=d \Rightarrow 2bd=0 \Rightarrow a=0\ \ et\ \ b=0\ \ et\ \ c=0\ \ d=0 \Rightarrow Contradiction$$

نستنتج إذن الإستلزام التالي :

$$\boxed{\begin{cases}ac-3bd=0\\ ad+bc-2bd=0\end{cases} \Rightarrow (a,b,c,d)=(0,0,0,0)}$$

و منه نستخرج ما يلي :

$$\boxed{(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases}ac-3bd\neq 0\\ ad+bc-2bd\neq 0\end{cases}}$$

$$\Rightarrow M(ac-3bd\ ;\ ad+bc-2bd)\neq M(0,0) \Rightarrow M(a,b)\times M(c,d)\,\epsilon\, E^*$$

$\boxed{\text{إذن } E^* \text{ جزء مستقر من } (E,\times)}$.

التمرين الثالث 3 ب

لنبين أن φ تشاكل .

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E^* .

$$\begin{aligned}\varphi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big) &= \varphi\big(M(ac-3bd\ ;\ ad+bc-2bd)\big)\\ &= (ac-3bd-ad-bc+2bd)+i\sqrt{2}(ad+bc-2bd)\end{aligned}$$

من جهة أخرى : $\varphi\big(M(a,b)\big)\times\varphi\big(M(c,d)\big)$

$$\begin{aligned}&= \big((a-b)+ib\sqrt{2}\big)\big((c-d)+id\sqrt{2}\big)\\ &= (a-b)(c-d)+i\sqrt{2}\big(d(a-b)+b(c-d)\big)-2bd\\ &= (ac-bd-ad-bc)+i\sqrt{2}(ad+bc-2bd)\end{aligned}$$

نستنتج إذن أن :

$$\boxed{\varphi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big) = \varphi\big(M(a,b)\big)\times\varphi\big(M(c,d)\big)}$$

و هذا يعني أن φ تشاكل من $(E^*,\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$.

لنبين أن φ تقابل .

ليكن $(\alpha+i\beta)$ عددا عقديا غير منعدم .

لدينا : $\alpha+i\beta = \left(\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right)+i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right)\sqrt{2}$

أي يوجد $a=\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta$ و $b=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta$ عنصرين من $\mathbb{R}^*$ حيث $\alpha+i\beta$

لنحل في E^* المعادلة : $\varphi\big(M(x,y)\big)=\alpha+i\beta$ ذات المجهول $M(x,y)$

لدينا : $\varphi\big(M(x,y)\big) = \alpha + i\beta$

$$\Leftrightarrow \quad (x-y) + iy\sqrt{2} = \alpha + i\beta$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-y) + iy\sqrt{2} = (a-b) + ib\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = a - b \\ y\sqrt{2} = b\sqrt{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a = \left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right) \neq 0 \\ y = b = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \neq 0 \end{cases}$$

إذن المعادلة $\varphi\big(M(x,y)\big) = \alpha + i\beta$ تقبل حلا وحيدا في E^*

و هو المصفوفة $M\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta \; ; \; \frac{1}{\sqrt{2}}\beta\right)$.

أو بتعبير آخر :

$$\boxed{\forall \, (\alpha + i\beta) \,\epsilon\, \mathbb{C}^* \; ; \; \exists!\, M(x,y) \,\epsilon\, E^* \; : \; \varphi\big(M(x,y)\big) = \alpha + i\beta}$$

و هذا يعني أن φ تقبل من $(E^*,\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$.

خلاصة : $\boxed{\varphi \text{ تشاكل تقابلي من } (E^*,\times) \text{ نحو } (\mathbb{C}^*,\times)}$.

التمرين الثالث 4

تكون الحلقة $(E,+,\times)$ جسما تبادليا إذا وفقط إذا كان :

- $(E,+)$ زمرة تبادلية
- $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية
- القانون $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E .

لدينا حسب ما سبق : $(E,+)$ زمرة تبادلية (1)

و لدينا φ تشاكل تقابلي من $(E^*,\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$.

إذن صورة الزمرة التبادلية $(\mathbb{C}^*,\times)$ بالتشاكل التقابلي φ^{-1} هي الزمرة التبادلية $(E^*,\times)$. إذن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية . (2)

و كذلك نعلم حسب ما سبق أن $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E (3) .

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) نستنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

التمرين الرابع I 1

ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم . لدينا : $g(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$.

نلاحظ أن : $x \longrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ و $x \longrightarrow e^{\frac{1}{x}}$ دالتان قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

إذن الدالة $x \longrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ باعتبارها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و بالتالي g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا :
$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \left(\frac{-1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= \left(\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right)\left(1 + 1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right)\left(\frac{2x+1}{x}\right) \end{aligned}$$

نلاحظ أن : $\left(\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right) < 0 \; ; \; (\forall\, x \neq 0)$

إذن إشارة $g'(x)$ متعلقة فقط بإشارتي x و $(2x+1)$.

نضيف نهايات الدالة g عند محدات مجموعة تعريفها

لدينا :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 1 + (1+0)(0) = 2$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 1 + (1+0)(1) = 2$$

و لدينا :
$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^-} g(x) &= \lim_{x\to0^-} 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to0^-} \left(1 + e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}\right) \\ &= \lim_{\substack{t\to-\infty \\ t=\frac{1}{x}}} \left(1 + e^t + t\,e^t\right) \\ &= 1 + 0 + 0 = 1 \end{aligned}$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} 1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 1 + (1+\infty)(+\infty) = +\infty$$

و لدينا : $g\left(\frac{-1}{2}\right) = 1 + (1-2)e^{-2} = 1 - e^{-2} \approx 0{,}86$

و نلخص في الجدول التالي إشارة $g'(x)$ و تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	‖	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
g	2	$\searrow$	$0{,}86$	$\nearrow$	1 ‖ $+\infty$	$\searrow$	2

التمرين الرابع I 2

على المجال $]-\infty\,,0[$ نلاحظ أن g تقبل مطرافا عند النقطة $\left(\frac{-1}{2} \; ; g\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$ و هذا المطراف عبارة عن قيمة دنوية لأن $g'(x)$ تنعدم في $\frac{-1}{2}$ و تتغير إشارتها بجوار تلك النقطة

و لدينا : $g\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 0{,}86 > 0$.

إذن : $\forall\, x \,\epsilon\,]-\infty\,,0[\; ; \; g(x) \geq g\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 0{,}86$

يعني : $(\forall\, x < 0) \; ; \; g(x) > 0$

على المجال $]0\,,+\infty[$ نلاحظ أن g تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $g(\,]0,+\infty[\,) =]2,+\infty[$.

لأن g دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$.

يعني : $(\forall\, y \,\epsilon\,]2,+\infty[)(\exists!\, x \,\epsilon\,]0,+\infty[) \; ; \; g(x) = y$

أو بتعبير آخر : $(\forall\, x \,\epsilon\,]0,+\infty[) \; ; \; g(x) \,\epsilon\,]2,+\infty[$

أي : $(\forall\, x > 0) \; ; \; g(x) > 2 > 0$

نستنتج أن الدالة g موجبة على $\mathbb{R}^*$ بأكمله .

التمرين الرابع II 1

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}\right) = +\infty$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}\right) = -\infty$$

التمرين الرابع II 2

و لدينا : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = 0 = f(0)$

و لدينا :
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\frac{1}{x}}}\left(\frac{\frac{1}{t}}{1+e^{t}}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t+t\,e^{t}}\right) = 0 = f(0)$$

نلاحظ أن : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)}$

و هذا يعني أن الدالة f متصلة في الصفر لأنها متصلة على يمينه و يساره .

التمرين الرابع II 3

لدينا :
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = 0 \ ; \ car \ \lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$
$$= 0 = f_d^{'}(0) \in \mathbb{R}$$

و لدينا :
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \left(\frac{1}{1+0}\right) = 1 = f_g^{'}(0) \in \mathbb{R}$$

نلاحظ أن $f_d^{'}(0) \neq f_g^{'}(0)$. إذن f غير قابلة للاشتقاق في الصفر .

هندسيا : النهاية $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 0$

تعني أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس أفقي على يمين النقطة $(0,0)$

و النهاية $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 1$

تعني أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس (Δ)

معادلته $y = x + f(0)$: (Δ) على اليسار في النقطة $(0,0)$

يعني المنصف الأول للمعلم : $y = x$: (Δ) .

التمرين الرابع II 4

نعلم أن الدالتان $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ متصلتان و قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و الدالة $x \longrightarrow e^{x}$ متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

و جميع عناصر $\mathbb{R}^*$ تقبل صورا بالدالة Exp . (يعني : $Exp(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$

إذن الدالة $x \longrightarrow e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ باعتبارها مُركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

إذن الدالة $x \longrightarrow 1 + e^{\frac{1}{x}}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و بالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها عبارة عن خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و كذلك $1 + e^{\frac{1}{x}} \neq 0$; $(\forall\, x \neq 0)$.

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$. لدينا :

$$f^{'}(x) = \left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)^{'} = \frac{1\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{'} x}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}$$

$$= \frac{1+e^{\frac{1}{x}} - x\left(\frac{-1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}\right)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}} = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}$$

$$= \frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}} = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}$$

التمرين الرابع II 5

لدينا : $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ f^{'}(x) = \dfrac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2}}$

و نعلم أن : $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ g(x) > 0$

و نلاحظ أن : $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{2} > 0$

إذن : $(\forall\, x \in \mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) > 0$

يعني أن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^*$ و نرسم جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$
f	$-\infty$	0	$+\infty$

التمرين الرابع II 6

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \dfrac{1}{1+e^{0}} = \dfrac{1}{2}$

و لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{2}x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x - x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x - x\,e^{\frac{1}{x}}}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(-x)\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=\frac{1}{x}}} -\left(\frac{e^{t}-e^{0}}{t-0}\right)\left(\frac{1}{2(1+e^{t})}\right)$$
$$= -(e^{0})\left(\frac{1}{2(1+e^{0})}\right) = \frac{-1}{4}$$

نحصل على الوضعية التالية :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$

و بنفس الطريقة لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)=\dfrac{1}{1+e^{0}}=\dfrac{1}{2}$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\dfrac{1}{2}x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-x\,e^{\frac{1}{x}}}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}\right)=\lim_{\substack{t\to0^-\\ t=\frac{1}{x}}}-\left(\frac{e^{t}-e^{0}}{t-0}\right)\left(\frac{1}{2(1+e^{t})}\right)$$

$$=-\left(e^{t}\right)'_{/t=0}\times\frac{1}{2(1+e^{0})}$$

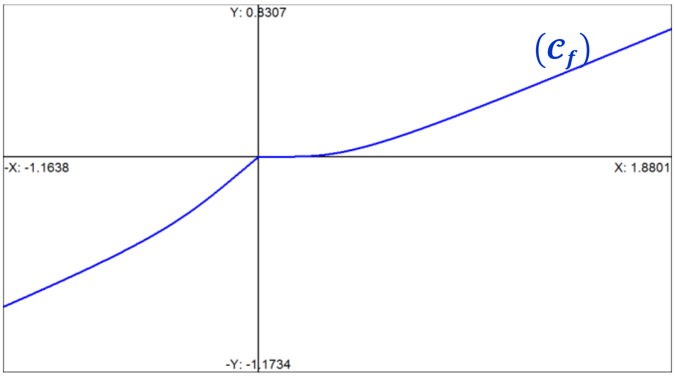
$$=-e^{0}\times\frac{1}{2(2)}=\frac{-1}{4}$$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)=\dfrac{-1}{4}\end{cases}$$

إذن نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$.

التمرين الرابع II 7



التمرين الرابع II 8 أ

نعتبر الدالة العددية ψ_n المعرفة على $\mathbb{R}_*^+$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}_*^+)\ ;\ \psi_n(x)=f(x)-n$

لدينا ψ_n دالة متصلة على $\mathbb{R}_*^+$ لأنها فرق دالتين متصلتين على $\mathbb{R}_*^+$.

و لدينا ψ_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$ لأنها فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}_*^+$

و لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}_*^+)\ ;\ \psi_n'(x)=f'(x)>0$

إذن ψ_n دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

بما أن ψ_n متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

فهي تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $\psi_n(]0,+\infty[)$.

و لدينا : $\psi_n(]0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to0^+}\psi_n(x)\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\psi_n(x)\right[$

$$=\left]\lim_{x\to0^+}(f(x)-n)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-n)\right[$$

$$=\,]-n\ ;+\infty[$$

إذن ψ_n تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $]-n,+\infty[$.

و هذا يعني أن كل عنصر من مجموعة الوصول $]-n,+\infty[$ يقبل سابقا وحيدا من مجموعة الإنطلاق $]0,+\infty[$ بالتقابل ψ_n .

أو بتعبير آخر :

$$\boxed{(\forall\, y\in\,]-n,+\infty[),(\exists!\,x\in\,]0,+\infty[)\ :\ \psi_n(x)=y}$$

بما أن : $0\in\,]-n,+\infty[$ لأن $n\geq1$.

فإن الصفر يمتلك سابقا وحيدا α_n من المجال $]0,+\infty[$

يعني : $(\forall\,n\geq1),(\exists!\,\alpha_n\in\,]0,+\infty[)\ :\ \psi_n(\alpha_n)=0$

يعني : $(\forall\,n\geq1),(\exists!\,\alpha_n>0)\ :\ f(\alpha_n)-n=0$

يعني : $(\forall\,n\geq1),(\exists!\,\alpha_n>0)\ :\ f(\alpha_n)=n$

أي أن المعادلة : $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}_+^*$.

التمرين الرابع II 8 ب

في البداية سوف نحتاج إلى أن نبين أن : $(\forall\,x>0)\ ;\ f(x)<x$

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا . لدينا :

$$\begin{aligned}
x>0 &\Rightarrow \frac{1}{x}>0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}}>1>0\\
&\Rightarrow 1+e^{\frac{1}{x}}>1\\
&\Rightarrow \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}<1\\
&\Rightarrow \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}<x\quad ;\ car\ x>0\\
&\Rightarrow \boxed{f(x)<x\quad ;\quad(\forall\,x>0)}\ (*)\\
&\Rightarrow f(\alpha_n)<\alpha_n\quad ;\ (car\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \alpha_n>0)\\
&\Rightarrow n<\alpha_n\quad ;\ (car\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(\alpha_n)=n)\\
&\Rightarrow (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \alpha_n>n\\
&\Rightarrow \alpha_n>\underbrace{n}_{n\infty\ \to\ \boxed{+\infty}}\quad ;\ \begin{pmatrix}On\ fait\ tendre\\ n\ vers\ l'infini\end{pmatrix}\\
&\Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha_n)=+\infty}\quad ;\ \begin{pmatrix}d'après\ le\ critère\\ de\ comparaison\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

التمرين الرابع III 1 أ

تذكير بمبرهنة المتوسطة :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ حيث $a\leq b$. فإنه يوجد عدد c من المجال $[a,b]$ بحيث :

$$\boxed{f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

$f(c)$ تسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a,b]$.

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ بأكمله .

إذن فهي متصلة على أي مجال $[1,x^2]$ من $\mathbb{R}$ حيث $x\geq1$.

و منه حسب مبرهنة المتوسطة يوجد عدد c من $[1,x^2]$ حيث :

$$\boxed{f(c)=\frac{1}{x^2-1}\int_1^{x^2} f(x)\,dx}$$

أي : $\exists\,c\in[1,x^2]\ ;\ f(c)=\left(\frac{1}{x^2-1}\right)F(x)$

أي : $\exists\,c\in[1,x^2]\ ;\ F(x)=(x^2-1)\,f(c)$

التمرين الرابع III 1 ب

ليكن x عنصرا من المجال $[1,+\infty[$.

لدينا : $c\in[1,x^2]\ \Rightarrow\ 1\leq c\leq x^2$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(1)\leq f(c)\leq f(x^2)\ ;\ car\ f\ \nearrow\ sur\ \mathbb{R}\\
&\Rightarrow (x^2-1)\,f(1)\leq(x^2-1)\,f(c)\leq(x^2-1)\,f(x^2)\\
&\quad car\ :\ x\geq1\ \Rightarrow\ x^2-1\geq0\\
&\Rightarrow (x^2-1)\,f(1)\leq F(x)\leq(x^2-1)\,f(x^2)
\end{aligned}$$

و لدينا من جهة أخرى : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)\,f(1)=(+\infty-1)\,f(1)$

$$=+\infty\ ;\ car\ f(1)>0$$

و نحصل على الوضعية التالية : $\underbrace{(x^2-1)\,f(1)}_{\substack{x\to+\infty\\ \downarrow\\ +\infty}} \le F(x)$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty}$

التمرين الرابع III 1 ج

لدينا : $(\forall\, x\ge 1)\ ;\ (x^2-1)\,f(1)\le F(x)$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $\frac{1}{x}$ نجد :

$$\boxed{(\forall\, x\ge 1)\ ;\ \left(x-\frac{1}{x}\right)f(1)\le \frac{F(x)}{x}}$$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)f(1) = (+\infty-0)\,f(1) = +\infty\ ;\ car\ f(1)>0$

إذن نحصل على الوضعية التالية : $\underbrace{\left(x-\frac{1}{x}\right)f(1)}_{\substack{x\to+\infty\\ \downarrow\\ +\infty}} \le \frac{F(x)}{x}$

و منه حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty}$

و من النهايتين : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty\end{cases}$

نستنتج أن $(\mathcal{C}_F)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

التمرين الرابع III 2

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من I

فإن الدالة $\begin{array}{rcl} F\ :\ I & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longrightarrow & \int_a^x f(t)\,dt\end{array}$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم في a .

و بذلك نكتب : $\begin{cases}F(a)=0\\ (\forall x\in I)\ ;\ F'(x)=f(x)\end{cases}$

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ إذن f متصلة على المجال $[1,+\infty[$.

و لدينا $1\in[1,+\infty[$. إذن الدالة :

$$\begin{array}{rcl} G\ :\ [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longrightarrow & \int_1^x f(t)\,dt\end{array}$$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال $[1,+\infty[$ و التي تنعدم في العدد 1 .

و نكتب : $\begin{cases}G(1)=0\\ (\forall\, x\ge 1)\ ;\ G'(x)=f(x)\end{cases}$

من جهة أخرى لدينا : $F(x)=\int_1^{x^2} f(t)\,dt = G(x^2)$

إذن : $F'(x)=\left(G(x^2)\right)' = (x^2)'\,G'(x^2)=2x\,f(x^2) = \dfrac{2x\cdot x^2}{1+e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}$

إذن : $\boxed{(\forall\, x\ge 1)\ ;\ F'(x)=\dfrac{2x^3}{1+e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}}}$

نلاحظ أن : $(\forall\, x\ge 1)\ ;\ 2x^3\ge 2>0$

و كذلك : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \left(1+e^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right)>0$

إذن $F'(x)$ تكون دائما موجبة قطعا على $[1,+\infty[$.

أي أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$.

و نرسم جدول تغيرات F كما يلي :

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	$+$
F	0 $\nearrow$ $+\infty$

التمرين الرابع III 3

معادلة نصف المماس (Δ) للمنحنى $(\mathcal{C}_F)$ عند النقطة التي أفصولها 1

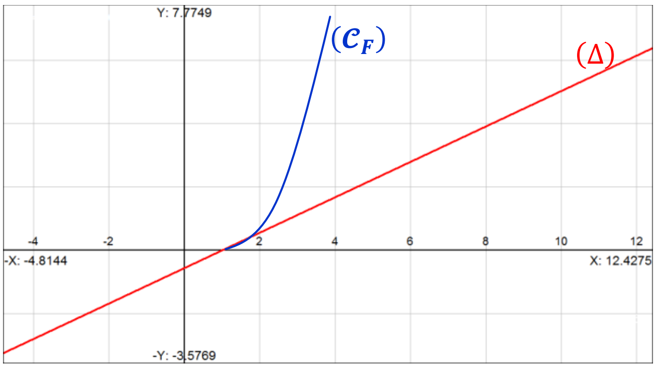
تُكتب على شكل : $(\Delta)\ :\ y=F'(1)(x-1)+F(1)$

$\Longrightarrow\ (\Delta)\ :\ y=\left(\dfrac{2}{1+e}\right)(x-1)+0$

$\Longrightarrow\ (\Delta)\ :\ y=\left(\dfrac{2}{1+e}\right)(x-1)$

$\rightsquigarrow\ (\Delta)\ :\ y=0{,}53\,(x-1)$

التمرين الرابع III 4



التمرين الرابع IV 1

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \int_{\left(\frac{1}{n+1}\right)}^{1}\left(\frac{f(t)}{t^3}\right)dt-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{f(t)}{t^3}\right)dt\\ &= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\frac{f(t)}{t^3}\right)dt\end{aligned}$$

و لدينا : $\forall\, t\in[1,+\infty[\ ;\ \dfrac{f(t)}{t^3}>0$

إذن $t\longrightarrow\frac{f(t)}{t^3}$ دالة متصلة و موجبة قطعا على المجال $[1,+\infty[$.

إذن فهي متصلة و موجبة قطعا على $\left[\frac{1}{n+1}\,;\,\frac{1}{n}\right]$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

و لدينا كذلك $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ لأن $n+1>n$.

إذن : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\frac{f(t)}{t^3}\right)dt>0}$

أي : $(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_{n+1}-u_n>0$

أي : $(\forall\, n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_{n+1}>u_n$

و هذا يعني أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا .

IV 2 أ التمرين الرابع

$On\ a:\ u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{f(y)}{y}\right) dy\ ;\ y\ variable\ muette$

نضع : $t = \frac{1}{y}$ إذن : $\frac{dt}{dy} = -\left(\frac{1}{y}\right)^2 = -t^2$

إذا كان : $y = \frac{1}{n}$. فإن : $t = n$.

إذا كان : $y = 1$. فإن : $t = 1$.

و منه :

$$\begin{aligned} u_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{f(y)}{y}\right) dy &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\frac{1}{y^2\left(1+e^{\frac{1}{y}}\right)}\right) dy \\ &= \int_{n}^{1} (t^2)\left(\frac{1}{1+e^t}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\,dt\right) \\ &= \int_{n}^{1} \left(\frac{-1}{1+e^t}\right) dt \\ &= \int_{1}^{n} \left(\frac{1}{1+e^t}\right) dt \\ &= \int_{1}^{n} \left(\frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}\right) dt \\ &= \int_{1}^{n} \left(1-\frac{e^t}{1+e^t}\right) dt \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \int_{1}^{n} \left(1-\frac{e^t}{1+e^t}\right) dt}$

IV 2 ب التمرين الرابع

$$\begin{aligned} (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \implies u_n &= \int_{1}^{n} \left(1-\frac{e^t}{1+e^t}\right) dt \\ &= \int_{1}^{n} 1\,dt - \int_{1}^{n} \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right) dt \\ &= [t]_1^n - \int_{1}^{n} \frac{(1+e^x)'}{(1+e^x)} dt \\ &= [t]_1^n - [\ln|1+e^t|]_1^n \\ &= [t]_1^n - [\ln(1+e^t)]_1^n \quad ;\quad 1+e^t > 0\ toujours \\ &= (n-1) - (\ln(1+e^n) - \ln(1+e)) \\ &= (n-1) - \ln\left(\frac{1+e^n}{1+e}\right) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = (n-1) - \ln\left(\frac{1+e^n}{1+e}\right)}$

و منه :

$$\begin{aligned} \lim_{n\infty}(u_n) &= \lim_{n\infty} \left((n-1) - \ln\left(\frac{1+e^n}{1+e}\right)\right) \\ &= \lim_{n\infty} \left((n-1) - \ln(1+e^n) + \ln(1+e)\right) \\ &= \lim_{n\infty} \left((n-1) - \ln\left(e^n(e^{-n}+1)\right) + \ln(1+e)\right) \\ &= \lim_{n\infty} (n-1-n-\ln(e^{-n}+1)+\ln(1+e)) \\ &= \lim_{n\infty} (-1-\ln(e^{-n}+1)+\ln(1+e)) \\ &= -1-\ln(0+1)+\ln(1+e) \\ &= -1+\ln(1+e) \\ &= \ln\left(\frac{1}{e}\right)+\ln(1+e) \\ &= \ln\left(\frac{1+e}{e}\right) \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = \ln\left(\frac{1+e}{e}\right)}$

أجوبة امتحان مدينة طنجة 2009

التمرين الأول 1

لدينا : $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^0 & 0e^0\\ 0 & e^0\end{pmatrix} = M_0$

بما أن $0 \in \mathbb{R}$ فإن $I = M_0 \in A$.

و لدينا : $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \ln 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = N_1$

بما أن $1 \in \mathbb{R}_+^*$ فإن $I = N_1 \in B$.

التمرين الأول 2 أ

لتكن M_a و M_b مصفوفتين من A :

لدينا:
$$\begin{aligned} M_a \times M_b &= \begin{pmatrix}e^a & a\,e^a\\ 0 & e^a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}e^b & b\,e^b\\ 0 & e^b\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^a\,e^b & b\,e^a\,e^b + a\,e^a\,e^b\\ 0 & e^a\,e^b\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{(a+b)} & (a+b)\,e^{(a+b)}\\ 0 & e^{(a+b)}\end{pmatrix} = M_{(a+b)}\end{aligned}$$

بما أن $M_a \in A$ و $M_b \in A$ فإن $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$

و منه : $(a+b) \in \mathbb{R}$. يعني : $M_{(a+b)} \in A$

التمرين الأول 2 ب

لكي نبين أن $(A,\times)$ زمرة تبادلية توجد طريقتان .

الطريقة الأولى : يكفي أن نبين أن :

- A مجموعة غير فارغة
- $\times$ قانون تركيب داخلي في A
- $\times$ تبادلي و تجميعي
- $\times$ يقبل عنصرا محايدا وحيدا في A
- كل مصفوفة M_a من A تقبل مقلوبا من A .

الطريقة الثانية : يكفي أن نبين أن $(A,\times)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية الأم $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$. و من أجل ذلك نبين أن :

- A جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
-

الطريقة الأولى : A مجموعة غير فارغة لأنها تضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 . ومن بين هذه المصفوفات نستطيع رصد العنصر I :

لدينا : $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^0 & 0e^0\\ 0 & e^0\end{pmatrix} = M_0 \in A$

$\times$ قانون تركيب داخلي في A . لأنه و حسب السؤال 2) أ) لدينا :

لدينا : $\forall\,(M_a, M_b) \in A^2 \;;\; M_a \times M_b = M_{(a+b)} \in A$

ضرب المصفوفات في A تبادلي لأن :

$$\forall\,(M_a, M_b) \in A^2 \;;\; M_a \times M_b = M_{(a+b)} = M_b \times M_a$$

و كذلك $\times$ قانون تجميعي في A لأن :

$$\begin{aligned}\forall\,(M_a, M_b, M_c) \in A^3 \;;\; M_a \times (M_b \times M_c) &= M_a \times M_{(b+c)}\\ &= M_{a+b+c}\\ &= M_{a+b} \times M_c\\ &= (M_a \times M_b) \times M_c\end{aligned}$$

لتكن المصفوفة M_ε العنصر المحايد للضرب في A .

إذن : $\forall\, M_x \in A \;;\; M_x \times M_\varepsilon = M_\varepsilon \times M_x = M_x$

أي : $M_{x+\varepsilon} = M_x$

أي : $\begin{pmatrix}e^{(x+\varepsilon)} & (x+\varepsilon)\,e^{(x+\varepsilon)}\\ 0 & e^{(x+\varepsilon)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^x & x\,e^x\\ 0 & e^x\end{pmatrix}$

يعني : $e^{(x+\varepsilon)} = e^x$ أي : $x + \varepsilon = x$. أي : $\varepsilon = 0 \in \mathbb{R}$.

إذن المصفوفة M_0 هي العنصر المحايد للضرب $\times$ في A .

لتكن M_x مصفوفة من A و $M_{x'}$ مماثلتها بالنسبة للقانون $\times$.

إذن : $M_x \times M_{x'} = M_{x'} \times M_x = M_0$. أي : $M_{x+x'} = M_0$

أي : $x + x' = 0$. أي : $x' = -x$.

$$M_x \in A \;\Rightarrow\; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; -x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; M_{-x} \in A$$

إذن كل مصفوفة M_x من A تقبل مقلوبا و هي المصفوفة M_{-x} من A .

و نكتب : $(M_x)^{-1} = M_{-x}$

خلاصة $(A,\times)$ زمرة تبادلية .

الطريقة الثانية : سوف نحتاج في هذه الطريقة إلى تعبير مقلوب مصفوفة بصفة عامة في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بالنسبة للضرب .

$$\forall\, M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;;\; M^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

لدينا A جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنها تضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 ذات معاملات حقيقية . و من بين هذه المصفوفات نجد :

$$I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = M_0 \in A$$

لتكن M_a و M_b مصفوفتين من A .

لدينا:
$$\begin{aligned} M_a \times (M_b)^{-1} &= \begin{pmatrix}e^a & a\,e^a\\ 0 & e^a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}e^b & b\,e^b\\ 0 & e^b\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \frac{1}{e^b\,e^b - 0}\begin{pmatrix}e^a & a\,e^a\\ 0 & e^a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}e^b & -b\,e^b\\ 0 & e^b\end{pmatrix}\\ &= e^{-2b}\begin{pmatrix}e^{(a+b)} & (a-b)\,e^{(a+b)}\\ 0 & e^{(a+b)}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e^{(a-b)} & (a-b)\,e^{(a-b)}\\ 0 & e^{(a-b)}\end{pmatrix} = M_{(a-b)}\\ &= M_{(a-b)} \in A \;;\; car\;\; (a-b) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

إذن : $\forall\,(M_a, M_b) \in A^2 \;;\; (M_a) \times (M_b)^{-1} \in A$

و بالتالي $(A,\times)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية الأم $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

إذن $(A,\times)$ زمرة تبادلية كذلك .

التمرين الأول 2 ج

لكي تكون $(E,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(A,\times)$.

يكفي أن نبين أن : E جزء غير فارغ من A

و $\forall\,(M_a, M_b) \in E^2 \;;\; (M_a) \times (M_b)^{-1} \in E$.

E جزء غير فارغ من A لأنه يضم مصفوفات M_a مربعة من الرتبة 2 و ذات البارامتر النسبي a . و من بين هذه المصفوفات نجد : $I = M_0$.

لتكن M_a و M_b مصفوفتين من E .

لدينا حسب السؤال ب) : $M_a \times (M_b)^{-1} = M_a \times M_{-b} = M_{(a-b)}$

بما أن a و b عددان نسبيان فإن $(a-b)$ كذلك عدد نسبي .

و منه : $\forall\,(M_a, M_b) \in E^2 \;;\; M_a \times (M_b)^{-1} = M_{(a-b)} \in E$

و بالتالي $(E,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(A,\times)$.

التمرين الأول 2 د

في البداية نلاحظ أن : $\forall\,(M_a, M_b) \in A^2 \;;\; M_a \times M_b = M_{a+b}$

و بصفة عامة نكتب :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall i \in \{1,\cdots,n\}) \;;\; M_{a_1} \times \cdots \times M_{a_n} = M_{(\sum_1^n a_i)}$$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \;;\; M_a \times M_a \times \cdots \times M_a = M_{na}$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; (M_a)^n = M_{na} \;;\; car\;\; (M_a)^0 = M_{0a} = I$

و كذلك : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; (M_a)^{-n} = (M_a^{-1})^n = (M_{-a})^n = M_{-na}$

إذن يُمكن أن نكتب بصفة عامة :

$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{Z} \;;\; (M_a)^k = M_{ka} = \begin{pmatrix}e^{ka} & ka\,e^{ka}\\ 0 & e^{ka}\end{pmatrix}}$$

التمرين الأول 3 أ

لكي يكون B جزءا مستقرا من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ يكفي أن نبين أن :
B جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. و $\times$ قانون تركيب داخلي في B .
B جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأنه يضم مصفوفات مربعة من الرتبة 2 و ذات معاملات حقيقية و من بين هذه المصفوفات نجد $I = N_1 \in B$.
لتكن N_a و N_b مصفوفتين من B :

لدينا :
$$\begin{aligned} N_a \times N_b &= \begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & \ln b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & \ln a + \ln b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & \ln(ab)\\ 0 & 1\end{pmatrix} = N_{ab}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(N_a, N_b) \in B^2 &\Longrightarrow a > 0 \ et \ b > 0 \\ &\Longrightarrow ab > 0 \\ &\Longrightarrow N_{ab} \in B \\ &\Longrightarrow N_a \times N_b \in B\end{aligned}$$

إذن $\times$ قانون تركيب داخلي في B .
و منه B جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الأول 3 ب

تكون المجموعتان $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ و $(B,\times)$ متشاكلتان تقابليا إذا وجد تطبيق f معرف من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(B,\times)$ بحيث تشاكل تقابلي .
نعتبر التطبيق المعرف من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(B,\times)$ بما يلي :

$$\begin{aligned} f \ : \ (\mathbb{R}_+^*,\times) &\longrightarrow (B,\times) \\ b &\longrightarrow f(b) = N_b \end{aligned}$$

لتكن N_a و N_b مصفوفتان من B . لدينا : $N_a \times N_b = N_{ab}$
إذن : $f(a) \times f(b) = f(a \times b)$.
و هذا يعني أن f تشاكل من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(B,\times)$.
لتكن N_b مصفوفة من B . إذن : $b \in \mathbb{R}_+^*$
و لنحل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة $f(x) = N_b$ ذات المجهول x :

$$\begin{aligned} f(x) = N_b &\Leftrightarrow N_x = N_b \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & \ln x\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \ln b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \ln x = \ln b \\ &\Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\ln b} \\ &\Leftrightarrow x = b \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

إذن المعادلة تقبل حلا في $\mathbb{R}_+^*$ و هو العدد b .
أو بتعبير آخر : $(\forall\, N_b \in B)(\exists!\, x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ f(x) = N_b$
و هذا يعني أن f تطبيق تقابلي من $\mathbb{R}_+^*$ نحو B

<u>خلاصة</u> : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ نحو $(B,\times)$
و منه $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ و $(B,\times)$ متشاكلتان تقابليا.
و نستنتج من هذا أن صورة الزمرة التبادلية $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ بالتشاكل التقابلي f هي الزمرة التبادلية $(B,\times)$.
و نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على البنية الجبرية لمجموعة الإنطلاق و يُحولها إلى مجموعة الوصول.
بما أن $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد بالضرب $\times$ هو العدد الحقيقي الموجب 1 و كل عدد حقيقي x يقبل مماثلا و هو العدد $\frac{1}{x}$.
فإن $(B,\times)$ زمرة تبادلية كذلك عنصرها المحايد بالضرب $\times$ هو المصفوفة $N_1 = f(1)$ و كل مصفوفة N_x تقبل مماثلة بالضرب $\times$ و هي المصفوفة $N_{\frac{1}{x}} = f\left(\frac{1}{x}\right)$

التمرين الأول 4

لكي تكون المجموعة $A \cup B$ مستقرة بالنسبة للضرب $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
يكفي أن نتحقق من أن : $\forall\, (M, M') \in (A \cup B)^2 \ ; \ M \times M' \in A \cup B$
أو بتعبير آخر ، يكفي أن نتحقق من الشروط التالية :

$$\begin{aligned} &\forall\, (N_a, N_b) \in B^2 \ ; \ N_a \times N_b \in A \cup B \\ &\forall\, (M_a, M_b) \in A^2 \ ; \ M_a \times M_b \in A \cup B \\ &\forall\, (M_a, N_b) \in A \times B \ ; \ M_a \times N_b \in A \cup B \end{aligned}$$

نلاحظ أن الشرطان الأول و الثاني محققان حسب ما سبق .
أما الشرط الثالث فهو غير محقق و نُعللُ ذلك بما يلي :
لتكن M_a مصفوفة من A و N_b مصفوفة من B .

لدينا :
$$\begin{aligned} M_a \times N_b &= \begin{pmatrix}e^a & a\,e^a\\ 0 & e^a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & \ln b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}e^a & (-\ln b)(e^a) + a\,e^a\\ 0 & e^a\end{pmatrix} = M \end{aligned}$$

لنبين أن $M \notin A$ و $M \notin B$.
بالخلف نفترض أن $M \in A$.
إذن يوجد α من $\mathbb{R}$ بحيث $M = M_\alpha$.

أي :
$$\begin{pmatrix}e^a & (a + \ln b)e^a\\ 0 & e^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^\alpha & \alpha\,e^\alpha\\ 0 & e^\alpha\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ a + \ln b = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = 1 \end{cases}$$

و هذا تناقض واضح و خصوصا عندما يكون $b \neq 1$.
نفترض الآن أن : $M \in B$.
إذن يوجد β من $\mathbb{R}_+^*$ حيث $M = N_\beta$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}e^a & (a + \ln b)e^a\\ 0 & e^a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \ln b\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^a = 1 \\ (a + \ln b)\, e^a = \ln \beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \beta \end{cases} \end{aligned}$$

و هذا تناقض عندما نأخذ $a \neq 0$
إذن : $\forall\, (M_a, N_b) \in A \times B \ ; \ M_a \times N_b \notin A \cup B$
و بالتالي المجموعة $A \cup B$ غير مستقرة بالنسبة للضرب $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

التمرين الثاني 1

<u>تذكير</u> : ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من 2 .
إذا كان n عدد غير أولي فإنه يوجد عدد أولي p يقسم n و مُربعه أصغر من أو يساوي n .
<u>بتعبير آخر</u> : إذا كانت جميع الأعداد الأولية التي مُربعاتها أصغر من أو تساوي n لا تقسم n فإن العدد n عدد أولي .
لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من أو تساوي 2011 هي 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و 23 و 29 و 31 و 37 و 41 و 43 و 47 . و نتأكد باستعمال الآلة الحاسبة أن 2011 لا يقبل القسمة على أي عدد من هذه الأعداد . إذن العدد 2011 أولي .
<u>ملاحظة</u> : هذه التقنية تُصبح تافهة كلما كان n عددا كبيرا و كل عدد أراد الحصول على شهادة الأولية يجب أن ينتظر طويلا أمام مكتب هذه الخاصية .
ها ها ها ها ها .

Autrement – dit : il existe d'autres méthodes et d'autres testes de primalité plus éfficaces et non couteux. et qui délivrent les certificats de primalité aux ayant droit à bon prix HHHH!

التمرين الثاني — 2 أ

ليكن (x,y) حلا للمعادلة E في $(\mathbb{N}^*)^2$.
و نريد أن نبين أن p لا يقسم العدد y .
بالخلف نفترض أن p قاسم للعدد y .
إذن يوجد k من $\mathbb{N}^*$ حيث $y = kp$.
و لدينا (x,y) حل للمعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
إذن : $px + y^{p-1} = 2011$.
نُعوض في هذه الكتابة y بالعدد kp نجد : $px + (kp)^{p-1} = 2011$
أي : $p(x + k^{p-1} \cdot p^{p-2}) = 2011$
إذن p يقسم العدد 2011 .
حصلنا إذن على أن p عدد أولي و يقسم العدد الأولي 2011 .
إذن : $p = 2011$. و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة للتمرين .
إذن ما افترضناه كان خاطئا .
إذن p لا يقسم العدد y .

التمرين الثاني — 2 ب

سوف نستعمل في هذا السؤال مبرهنة $(Fermat)$.
تذكير بمبرهنة فيرما : (الصيغة العامة)

$$\boxed{p \in \mathbb{P}^+ \implies \forall\, a \in \mathbb{Z} \;;\; a^p \equiv a\,[p]}$$

تذكير بمبرهنة فيرما : (الصيغة الخاصة)

$$\boxed{\begin{cases} p \in \mathbb{P}^+ \\ p \wedge a = 1 \end{cases} \implies a^{p-1} \equiv 1\,[p]}$$

لدينا p عدد أولي و لا يقسم العدد y . إذن $p \in \mathbb{P}^+$ و $p \wedge y = 1$.
و منه حسب $Fermat$ نستنتج أن : $y^{p-1} \equiv 1\,[p]$
إذن يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $(y^{p-1} - 1) = kp$.
و لدينا (x,y) حل للمعادلة (E) في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
إذن : $px + y^{p-1} = 2011$.
نعوض في هذه الكتابة y^{p-1} بـ $(kp + 1)$ فنحصل على :

$$\boxed{px + kp + 1 = 2011}$$

يعني : $px + kp = 2010$.
أي : $p(x + k) = 2010$. و هذا يعني أن p يقسم العدد 2010 .
نُفكك العدد 2010 إلى جداء عوامل أولية نحصل على ما يلي :

2010	2
1005	5
201	3
67	67
Stop $\boxed{1}$	

يعني أن : $2010 = 2 \times 5 \times 3 \times 67$.
لقد حصلنا لحد الآن على الوضعية التالية :

- p عدد أولي و أكبر من أو يساوي 5
- العدد p يقسم العدد 2010
-

نستنتج إذن أن : $p \in \{5\,;67\}$.
لاحظ أن $p \neq 2$ و $p \neq 3$ لأن $p \geq 5$.

التمرين الأول — 2 ج

نفترض أن $p = 67$.
إذن المعادلة (E) تصبح : $(E) \;:\; 67x + y^{66} = 2011$
لدينا 67 عدد أولي و $67 \wedge y = 1$.
إذن حسب مبرهنة فيرما نكتب : $y^{66} \equiv 1\,[67]$.
يوجد إذن k من $\mathbb{N}$ بحيث $(y^{66} - 1) = 67k$.
نعوض y^{66} بالعدد $(67k + 1)$ في المعادلة (E)
نجد : $67x + 67k + 1 = 2001$
يعني أن : $67(x + k) = 2010$. أي : $x + y = 30$.
أي : $x = 30 - k$

لدينا :

$$n \in \mathbb{N}^* \left|\begin{array}{l}
\implies x > 0 \\
\implies 30 - k > 0 \\
\implies k < 30 \\
\implies 67k < 2010 \\
\implies 67k + 1 < 2011 \\
\implies y^{66} < 2011 \\
\implies 0 < y^{66} < 2011 \;;\; car\;\; y \in \mathbb{N}^* \\
\implies \sqrt[66]{0} < \sqrt[66]{y^{66}} < \sqrt[66]{2011} \;;\; et\;\; y \in \mathbb{N}^* \\
\implies 0 < y < 1{,}12 \;;\; et\;\; y \in \mathbb{N}^* \\
\implies y = 1 \in \mathbb{N}^* \\
\implies 67k + y^{66} = 2011 \;\; et \;\; y = 1 \\
\implies 67k + 1^{66} = 2011 \\
\implies 67k = 2010 \\
\implies x = 30 \in \mathbb{N}^*
\end{array}\right.$$

خلاصة : في حالة $p = 67$ المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ و هو الزوج $(30;1)$.

التمرين الثاني — 3

نفترض أن $p = 5$.
إذن المعادلة (E) تُصبح : $(E) \;:\; 5x + y^4 = 2011$
لدينا 5 عدد أولي و $5 \wedge y = 1$.
إذن حسب $Fermat$ نكتب : $y^4 \equiv 1\,[5]$
إذن يوجد k من $\mathbb{N}$ بحيث $y^4 - 1 = 5k$.
نعوض y^4 بالعدد $(5k + 1)$ في (E)
نحصل على : $5x + 5k + 1 = 2011$
يعني : $5(x + k) = 2010$. يعني : $x + k = 402$
يعني : $x = 402 - k$

لدينا :

$$n \in \mathbb{N}^* \left|\begin{array}{l}
\implies x > 0 \\
\implies 402 - k > 0 \\
\implies k < 402 \\
\implies 5k < 2010 \\
\implies 5k + 1 < 2011 \\
\implies y^4 < 2011 \\
\implies 0 < y^4 < 2011 \;;\; car\;\; y \in \mathbb{N}^* \\
\implies \sqrt[4]{0} < \sqrt[4]{y^4} < \sqrt[4]{2011} \;;\; et\;\; y \in \mathbb{N}^* \\
\implies 0 < y < 6{,}69 \;;\; et\;\; y \in \mathbb{N}^* \\
\implies y \in \{1,2,3,4,5,6\} \\
\implies y \in \{1,2,3,4,6\} \;;\; car\;\; 5 \wedge y = 1
\end{array}\right.$$

نعوض y بكل قيمة من هذه القيم في المعادلة (E) التي تُصبح معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد x فنحصل في الأخير على النتائج التالية :

$$\boxed{\begin{array}{lll}
y = 1 & \implies & x = 402 \in \mathbb{N}^* \\
y = 2 & \implies & x = 399 \in \mathbb{N}^* \\
y = 3 & \implies & x = 386 \in \mathbb{N}^* \\
y = 4 & \implies & x = 351 \in \mathbb{N}^* \\
y = 6 & \implies & x = 143 \in \mathbb{N}^*
\end{array}}$$

الأزواج التي حصلنا عليها هي : $(402\,;1)$ و $(399\,;2)$ و $(386\,;3)$ و $(351\,;4)$ و $(143\,;6)$.

عكسيا ، عندما نعوض كل زوج من هذه الأزواج في المعادلة (E) نحصل على العدد 2011 .

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ هي :

$$S=\left\{\begin{matrix}(402\,;1)\;;\;(399\,;2)\;;\;(143\,;6)\\ (386\,;3)\;;\;(351\,;4)\end{matrix}\right\}$$

التمرين الثالث 1

لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta &= (3m-2i)^2-4(2m^2-4mi)\\ &= 9m^2-4-12m\,i-8m^2+16m\,i\\ &= m^2+4m\,i-4\\ &= m^2+2(m)(2i)+(2i)^2\\ &= (m+2i)^2\end{aligned}$$

إذن المعادلة (E) تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 التاليين :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{(3m-2i)-(m+2i)}{2}=m-2i\\ z_1=\dfrac{(3m-2i)+(m+2i)}{2}=2m\end{cases}$$

التمرين الثالث 2 أ

$$m=(1+i)\;\Longrightarrow\;\begin{cases} z_1=(1+i)-2i=(1-i)\\ z_2=2(1+i)\end{cases}$$
$$\Longrightarrow\;\begin{cases} |z_1|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt2\\ |z_2|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt2\end{cases}$$
$$\Longrightarrow\;|z_1|<|z_2|$$

$$\begin{aligned}z_1=1-i &= \sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\,i\right)=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sqrt2\,e^{\frac{-i\pi}{4}}\;;\;Forme\;\;exponentielle\\ &= \left[\sqrt2\;;\;\frac{-\pi}{4}\right]\;;\;Forme\;\;trigonométrique\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2=2(1+i) &= 2\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\,i\right)\\ &= 2\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2\sqrt2\;e^{\frac{i\pi}{4}}\;;\;Forme\;\;exponentielle\\ &= \left[2\sqrt2\;;\;\frac{\pi}{4}\right]\;;\;Forme\;\;trigonométrique\end{aligned}$$

التمرين الثالث 2 ب

لدينا :

$$\begin{aligned}(-z_1)^3 &= (i-1)^3=i^3-3i^2+3i-1\\ &= -i+3+3i-1=2i+2\\ &= 2(i+1)=z_2\end{aligned}$$

إذن $(-z_1)$ جذر مكعب للعدد العقدي z_2 .

تذكير : كل عدد عقدي $z=r\,e^{i\theta}$ يقبل n جذرا نونيا z_k تُكتب على شكل $z_k=\sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ حيث $k\in\{0,1,3,\cdots,n-1\}$.

لدينا الجذور المكعبة الثلاثة للعدد $z_2=2\sqrt2\,e^{\frac{i\pi}{4}}$ هي : $\sqrt[3]{2\sqrt2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}$ و $\sqrt[3]{2\sqrt2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ و $\sqrt[3]{2\sqrt2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}$.

أي : $\sqrt2\,e^{\frac{i\pi}{12}}$ و $\sqrt2\,e^{\frac{i9\pi}{12}}$ و $\sqrt2\,e^{\frac{17i\pi}{12}}$.

و نلاحظ أن :

$$\begin{aligned}\sqrt2\,e^{\frac{9i\pi}{12}} &= \sqrt2\,e^{\frac{3i\pi}{12}}=\sqrt2\,e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \sqrt2\,e^{i\pi}\;e^{\frac{-i\pi}{4}}=-\sqrt2\,e^{\frac{-i\pi}{4}}=-z_1\end{aligned}$$

لنكتب الآن $\sqrt2\,e^{\frac{i\pi}{12}}$ و $\sqrt2\,e^{\frac{17i\pi}{12}}$ على الشكل الجبري .

في البداية لدينا : $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt3}{2}$. إذن : $\cos\left(2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt3}{2}$.

أي : $2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-1=\frac{\sqrt3}{2}$. أي : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt3+2}{4}}$.

و لدينا كذلك : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac12$. إذن : $\sin\left(2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac12$.

أي : $2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac12$.

و منه : $2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\sqrt{\frac{\sqrt3+2}{4}}\right)=\frac12$. إذن : $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac12\sqrt{\frac{1}{\sqrt3+2}}$

و بالتالي :

$$\begin{aligned}\sqrt2\,e^{\frac{i\pi}{12}} &= \sqrt2\;\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ &= \sqrt2\;\left(\sqrt{\frac{\sqrt3+2}{4}}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt3+2}}\right)\\ &= \sqrt{\frac{\sqrt3+2}{2}}+i\sqrt{\frac{1}{4(\sqrt3+2)}}\end{aligned}$$

و كذلك :

$$\begin{aligned}\sqrt2\,e^{\frac{17i\pi}{12}} &= \sqrt2\,e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)}=\sqrt2\,e^{i\pi}\;e^{\frac{5i\pi}{12}}\\ &= -\sqrt2\,e^{\frac{5i\pi}{12}}=-\sqrt2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)\\ &= -\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ &= -\sqrt2\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\\ &= -\sqrt2\left(\frac12\sqrt{\frac{1}{\sqrt3+2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt3+2}{4}}\right)\\ &= -\sqrt{\frac{1}{2(\sqrt3+2)}}-i\sqrt{\frac{\sqrt3+2}{2}}\end{aligned}$$

التمرين الثالث 3 أ

بالخلف نفترض أن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

يوجد إذن عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.

أي : $(\exists\,k\in\mathbb{R}^*)\;;\;(z_C-z_A)=k(z_B-z_A)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow\;\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow\;\left(\frac{m-2i-i}{2m-i}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow\;\left(\frac{m-3i}{2m-i}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow\;\overline{\left(\frac{m-3i}{2m-i}\right)}=\left(\frac{m-3i}{2m-i}\right)\\ &\Leftrightarrow\;\frac{\overline{m}+3i}{2\overline{m}+i}=\frac{m-3i}{2m-i}\\ &\Leftrightarrow\;(\overline{m}+3i)(2m-i)=(m-3i)(2\overline{m}+i)\\ &\Leftrightarrow\;2m\overline{m}-i\overline{m}+6im+3=2m\overline{m}+im-6i\overline{m}+3\\ &\Leftrightarrow\;5i\overline{m}+5im=0\\ &\Leftrightarrow\;5i\,(\overline{m}+m)=0\\ &\Leftrightarrow\;\overline{m}+m=0\;\;;\;\;car\;\;5i\neq0\\ &\Leftrightarrow\;2\,\mathcal{R}e(m)=0\;\;;\;\;car\;\;(m+\overline{m})=2\mathcal{R}e(m)\\ &\Leftrightarrow\;\mathcal{R}e(m)=0\\ &\Leftrightarrow\;m\;\in\;i\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow\;Contradiction\;\;car\;\;m\;\notin\;i\mathbb{R}\end{aligned}$$

إذن ما افترضناه كان خاطئا .

و منه فإن النقط A و B و C غير مستقيمية .

التمرين الثالث 3 ب

مثلث متساوي الساقين BCD و قائم الزاوية في D .
$$\Leftrightarrow \begin{cases} DB = DC \\ (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_B - z_D| = |z_C - z_D| \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) = i \quad \text{أو} \quad \left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) = -i$$

$$\Leftrightarrow \frac{m - 2i - d}{2m - d} = i \quad \text{أو} \quad \frac{m - 2i - d}{2m - d} = -i$$

$$\Leftrightarrow (m - 2i - d) = i\,(2m - d) \quad \text{أو} \quad (m - 2i - d) = -i\,(2m - d)$$

$$\Leftrightarrow d(1 - i) = (m - 2mi - 2i) \quad \text{أو} \quad d(1 + i) = (m + 2im - 2i)$$

$$\Leftrightarrow d(1 - i)(1 + i) = (1 + i)(m - 2mi - 2i) \quad \text{أو} \quad d(1 + i)(1 - i) = (1 - i)(m + 2im - 2i)$$

$$\Leftrightarrow 2d = 3m - im + 2 - 2i \quad \text{أو} \quad 2d = 3m + im - 2 - 2i$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{3m - im + 2 - 2i}{2} \quad \text{أو} \quad d = \frac{3m + im - 2 - 2i}{2}$$

التمرين الثالث 3 ج

لكي يكون الرباعي $ABCD$ مربعا يكفي أن يكون المثلث ABC قائم الزاوية و متساوي الساقين في A .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = i \quad \text{أو} \quad \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = -i$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m - i}{m - 3i}\right) = i \quad \text{أو} \quad \left(\frac{2m - i}{m - 3i}\right) = -i$$

$$\Leftrightarrow 2m - i = i\,(m - 3i) \quad \text{أو} \quad 2m - i = -i\,(m - 3i)$$

$$\Leftrightarrow (2 - i)m = (3 + i) \quad \text{أو} \quad (2 + i)m = (i - 3)$$

$$\Leftrightarrow (2 + i)(2 - i)m = (2 + i)(3 + i) \quad \text{أو} \quad (2 - i)(2 + i)m = (2 - i)(i - 3)$$

$$\Leftrightarrow 5m = 5(i + 1) \quad \text{أو} \quad 5m = 5(i - 1)$$

$$\Leftrightarrow m = (i + 1) \quad \text{أو} \quad m = (i - 1)$$

التمرين الرابع I 1 أ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{2x}{1+x}\right)}_{\to 2} - \underbrace{\ln(1+x)}_{\to+\infty}\right) = -\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(-1)^+} f(x) &= \lim_{x\to(-1)^+}\left(\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \ln(1+x)\right) \\
&= \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t=(1+x)}}\left(\frac{2(t-1)}{t} - \ln t\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(2 - \frac{2}{t} - \ln t\right) \\
&= \lim_{t\to 0^+}\left(2 - \left(\frac{2}{t}\right)\left(1 + \frac{2}{t}\,t\ln t\right)\right) \\
&= \left(2 - (+\infty)\left(1 + \frac{2}{t}\times 0\right)\right) = -\infty
\end{aligned}$$

لدينا : $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$

إذن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = -1$.

و لدينا :
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{1+x}\right) - \frac{\ln(1+x)}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{2}{1+x}\right) - \frac{\ln(1+x)}{(1+x)} \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{t} - \left(\frac{\ln t}{t}\right)\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)\right) \\
&= \left(0 - (0)(1 + 0)\right) = 0
\end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

نستنتج أن $(\mathcal{C})$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.

التمرين الرابع I 1 ب

في البداية نلاحظ أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1, +\infty[$.
لأنها عبارة عن فرق دالتين قابلتين للاشتقاق على $]-1, +\infty[$.
ليكن x عنصرا من المجال $]-1, +\infty[$.

لدينا :
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x}{1+x}\right)' - (\ln(1+x))' \\
&= \frac{2(1+x) - 1(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} \\
&= \frac{2 - (1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

نلاحظ أن : $\dfrac{1}{(1+x)^2} > 0 \quad ; \quad (\forall\, x > -1)$

إذن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(1-x)$.

نرسم إذن جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\ln\left(\frac{e}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

التمرين الرابع I 1 ج

من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن f دالة متصلة و تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$.

إذن f تقابل من المجال $]1,+\infty[$ نحو المجال $f(]1,+\infty[)$.

و لدينا : $f(]1,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \; ; \; f(1)\right[$

$= \left]-\infty \; ; \; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[$

$\approx]-\infty \; ; \; 0,3[$

إذن f تقابل من المجال $]1,+\infty[$ نحو المجال $\left]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[$.

إذن كل عنصر من مجموعة الوصول $\left]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[$ يقبل سابقا واحدا من مجموعة الانطلاق $]1,+\infty[$ بالتقابل f .

أي : $\forall\, y \in \left]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[\; , \; \exists!\, x \in]1,+\infty[\; : \; f(x) = y$.

بما أن $0 \in \left]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[$ لأن : $\ln\left(\frac{e}{2}\right) > 0$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا α بالتقابل f من المجال $]1,+\infty[$.

أو بتعبير آخر : $\exists!\; \alpha \in]1,+\infty[\; ; \; f(\alpha) = 0$

أي : $\exists!\; \alpha > 1 \; ; \; f(\alpha) = 0$

او بتعبير أخير نقول أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,+\infty[$.

بنفس الطريقة f دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]-1\,;1[$.

إذن فهي تقابل من المجال $]-1\,;1[$ نحو صورته $f(]-1\,;1[)$.

و لدينا : $f(]-1\,;1[) = \left]\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) \; ; \; f(1)\right[$

$= \left]-\infty \,; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[$

إذن f تقابل من المجال $]-1\,;1[$ نحو المجال $\left]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[$.

أي أن كل عنصر من المجال $\left]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[$ يقبل سابقا واحدا من المجال $]-1\,;1[$ بالتقابل f .

لدينا $\left]-\infty ; \ln\left(\frac{e}{2}\right)\right[\ni 0$ إذن يوجد سابق وحيد للعدد 0 من $]-1\,;1[$.

و نلاحظ أن $f(0) = 0$ و $0 \in]-1\,;1[$.

أي أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1\,;1[$ و هو 0

خلاصة : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين 0 و α بحيث $\alpha > 1$.
إشارة $f(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$

ليكن x عنصرا من المجال $]-1,+\infty[$ و نفصل بين أربع حالات :

$x \in]-1\,;0] \implies x \leq 0$

$\implies f(x) \leq f(0) \; ; \; car \; f \; est \; \nearrow \; sur \;]-1,0[$

$\implies f(x) \leq 0 \; ; \; car \; f(0) = 0$

$\implies f(x) \; est \; une \; quantité \; négative$

$x \in [0,1] \implies x \geq 0$

$\implies f(x) \geq f(0) \; ; \; car \; f \; est \; \nearrow \; sur \; [0,1]$

$\implies f(x) \geq 0 \; ; \; car \; f(0) = 0$

$\implies f(x) \; est \; une \; quantité \; positive$

$x \in [1\,;\alpha] \implies x \leq \alpha$

$\implies f(x) \geq f(\alpha) \; ; \; car \; f \; est \; \searrow \; sur \; [1,\alpha]$

$\implies f(x) \geq 0 \; ; \; car \; f(\alpha) = 0$

$\implies f(x) \; est \; une \; quantité \; positive$

$x \in [1\,;+\infty[\implies x \geq \alpha$

$\implies f(x) \leq f(\alpha) \; ; \; car \; f \; est \; \searrow \; sur \; [\alpha,+\infty[$

$\implies f(x) \leq 0 \; ; \; car \; f(\alpha) = 0$

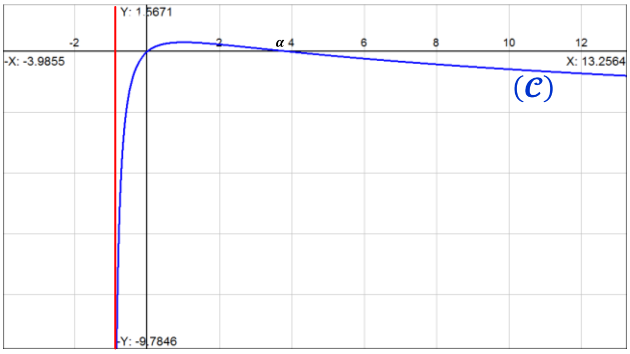
$\implies f(x) \; est \; une \; quantité \; négative$

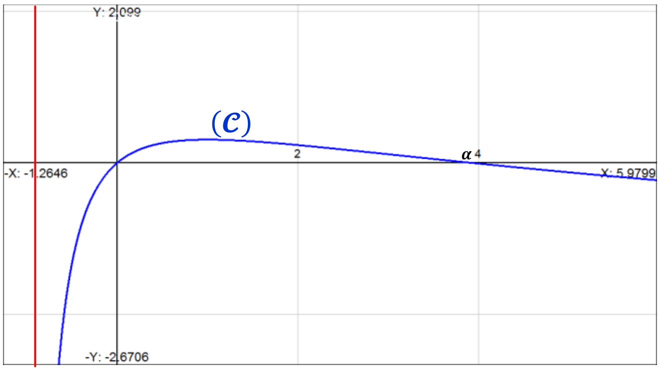
و نلخص إشارة $f(x)$ في الجدول التالي :

x	-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\ln\left(\frac{e}{2}\right)$	↘	0	↘	$-\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

إذن تكون الدالة f موجبة على المجال $[0,\alpha]$. و تكون سالبة على المجالين $]-1,0]$ و $[\alpha,+\infty[$.

التمرين الرابع I 1 د





التمرين الرابع I 2 أ

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4 .

و نعتبر الدالة العددية φ_n المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$(\forall\, x > -1) \; ; \; \varphi_n(x) = f(x) - \frac{1}{n}$

φ_n دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ لأنها عبارة عن فرق دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$.

إذن φ_n متصلة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0,1[$.

و $\forall\, x \in]0,1[\; ; \; \varphi_n'(x) = f'(x) > 0$.

إذن φ_n متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,1[$.

إذن φ_n تقابل من المجال $]0,1[$ نحو المجال $\varphi_n(]0,1[)$.

و لدينا : $\varphi_n(]0,1[) =]\varphi_n(0) \,; \varphi_n(1)[= \left]\frac{-1}{n} \,; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \right.$

إذن φ_n تقابل من المجال $]0,1[$ نحو المجال $\left]\frac{-1}{n} \,; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n}\right[$.

أي أن كل عنصر من مجموعة الوصول $\left]\frac{-1}{n} \,; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n}\right[$ يقبل سابقا واحدا من المجال $]0,1[$.

من جهة أخرى لدينا : $\ln\left(\frac{e}{2}\right) \approx 0{,}3$

إذن : $n \geq 4 \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4}$

$$\implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \approx 0{,}25 < 0{,}3 \approx \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$
$$\implies \frac{1}{n} < \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$
$$\implies \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n} > 0$$
$$\implies 0 \in \left]\frac{-1}{n} ; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n}\right[\; ; \; (\forall n \geq 4)$$

و بما أن الصفر عنصر من مجموعة الوصول $\left]\frac{-1}{n} ; \ln\left(\frac{e}{2}\right) - \frac{1}{n}\right[$.

فإنه يمتلك سابقا وحيدا u_n من مجموعة الانطلاق $]0,1[$.

أو بتعبير آخر : $(\forall n \geq 4) , (\exists!\ u_n \in]0,1[) \; : \; \varphi_n(u_n) = 0$

أي : $(\forall n \geq 4) , (\exists!\ u_n \in]0,1[) \; : \; f(u_n) - \frac{1}{n} = 0$

أي : $(\forall n \geq 4) , (\exists!\ u_n \in]0,1[) \; : \; f(u_n) = \frac{1}{n}$

و هذا يعني أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,1[$.

التمرين الرابع I 2 ب

لدينا : $n \geq 4 \implies n + 1 > n$

$$\implies \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$
$$\implies f(u_{n+1}) < f(u_n) \; ; \; car \; \left| \begin{array}{l} f(u_n) = \frac{1}{n} \\ f(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \end{array} \right.$$
$$\implies f^{-1}\big(f(u_{n+1})\big) < f^{-1}\big(f(u_n)\big) \; ; \; car \; \left| \begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ f \text{ et } f^{-1} \text{ sont } \nearrow \end{array} \right.$$
$$\implies u_{n+1} < u_n$$
$$\implies (u_n)_{n\geq 4} \text{ est une suite strict}^{\circ} \searrow$$

و بما أن $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية تناقصية و مصغورة بالعدد 0 $(\; 0 < u_n < 1 \;)$

فهي متقاربة و نهايتها تُحسب كما يلي :

$$f(u_n) = \frac{1}{n} \implies u_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$\implies \lim_{n\infty}(u_n) = f^{-1}(0)$$
$$\implies \lim_{n\infty}(u_n) = 0 \; ; \; car \; f(0) = 0$$

التمرين الرابع II 1 أ

لدينا : $\varphi(-0) = \varphi(0) = 0 = -0$.

و : $(\forall t \neq 0) \; ; \; \varphi(-t) = \dfrac{\ln(1+(-t)^2)}{(-t)} = \dfrac{-\ln(1+t^2)}{t}$

إذن نستنتج أن : $(\forall t \in \mathbb{R}) \; ; \; \varphi(-t) = -\varphi(t)$.

و هذا يعني أن الدالة φ فردية .

التمرين الأول II 1 ب

دراسة الاتصال في الصفر .

$$\lim_{t\to 0} \varphi(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t^2)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{h(t)-h(0)}{t-1}\right) = h'(0) = 0 = \varphi(0)$$

و ذلك بحيث $h(t) = \ln(1+t^2)$ و هذه الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بأكمله .

لأن $t \longrightarrow 1 + t^2$ حدودية و الدالة ln قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و كذلك : $(\forall t \in \mathbb{R}) \; ; \; 1 + t^2 > 0$

إذن : $(\forall t \in \mathbb{R}) \; ; \; h'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

من أجل $t = 0$ لدينا : $h'(0) = \dfrac{2 \times 0}{1 + 0^2} = 0$

نستنتج إذن أن : $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0)$

و هذا يعني أن الدالة φ متصلة في 0 .

دراسة اشتقاق الدالة φ في الصفر .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t=x^2}}\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\ln(1+t)-\ln(1+0)}{t-0}\right)$$
$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{u(t)-u(0)}{t-0}\right) \; ; \; \left| \begin{array}{l} u(t) = \ln(1+t) \\ dérivable \\ sur \;]-1,+\infty[\end{array} \right.$$
$$= u'(0) = \frac{1}{1+0} = 1 \in \mathbb{R}$$
$$= 1 = \varphi'(0)$$

إذن الدالة φ قابلة للاشتقاق في الصفر. و لدينا : $\varphi'(0) = 1$.

ملاحظة : $\varphi'(0) = 1$ هو ميل المماس لـ $(\mathcal{C}_\varphi)$ في 0 .

التمرين الرابع II 1 ج

لدينا : $(\forall\, t \neq 0) \; ; \; \varphi(t) = \dfrac{\ln(1+t^2)}{t}$

الدالة ln قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و الدالة $t \longrightarrow 1 + t^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها حدودية .

و لدينا : $(\forall\, t \in \mathbb{R}) \; ; \; 1 + t^2 > 0$

و هذا يعني أن جميع عناصر $\mathbb{R}$ تقبل صورا بالدالة $\ln(1+t^2)$

إذن الدالة $t \longrightarrow \ln(1+t^2)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن مُركب دالتين قابلتين للاشتقاق .

و لدينا الدالة $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها عبارة عن جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

و لدينا : $(\forall\, t \in \mathbb{R}^*) \; ; \; \varphi'(t) = \left(\dfrac{\ln(1+t^2)}{t}\right)'$

$$= \left(\frac{1}{t} \cdot \ln(1+t^2)\right)'$$
$$= \left(\frac{1}{t}\right)' \cdot \ln(1+t^2) + \frac{1}{t} \cdot (\ln(1+t^2))'$$
$$= \frac{-\ln(1+t^2)}{t^2} + \frac{2t}{t(1+t^2)}$$
$$= \frac{-\ln(1+t^2)}{t^2} + \frac{2}{1+t^2}$$
$$= \frac{1}{t^2}\left(-\ln(1+t^2) + \frac{2\,t^2}{1+t^2}\right)$$
$$= \frac{1}{t^2} \cdot f(t^2)$$

التمرين الرابع II 1 د

لدينا : $(\forall\, t \neq 0) \; ; \; \varphi'(t) = \dfrac{f(t^2)}{t^2}$

و نلاحظ أن : $(\forall\, t \neq 0) \; ; \; t^2 > 0$

إذن إشارة $\varphi'(t)$ متعلقة فقط بإشارة $f(t^2)$ و سوف ندرس فقط ما يحدث في المجال $]0,+\infty[$ ثم نستنتج بعد ذلك المجال $]-\infty,0[$.

و ذلك لأن φ دالة فردية و تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لأصل المعلم .

إذا كان : $t = \sqrt{\alpha}$ فإن : $\varphi'(t) = 0$.

إذا كان : $t > \sqrt{\alpha}$ فإن : $\varphi'(t) < 0$.

إذا كان : $t < \sqrt{\alpha}$ فإن : $\varphi'(t) > 0$.

و أضيف النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2\left(\frac{\ln x}{x}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= 2\times 0 + 0\times\ln(1+0) = 0$$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x}\right)$

$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=-x}}\frac{-\ln(1+t^2)}{t}$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t^2)}{t} = 0$$

و لدينا : $f(\alpha)=0 \iff \frac{2\alpha}{1+\alpha}-\ln(1+\alpha)=0$

$$\iff \frac{2\alpha}{1+\alpha} = \ln(1+\alpha)$$

$$\iff \varphi(\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln\left(1+(\sqrt{\alpha})^2\right)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}\right) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$$

نرسم إذن جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$		$+$	$\Vert$	$+$		$-$	
φ	0	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$	$\searrow$	0

التمرين الرابع II 2 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $g(-x) = \int_0^{-x}\varphi(t)\,dt$

نضع $y=-t$ إذن $dy=-dt$.

إذا كان $t=0$ فإن : $y=0$.

إذا كان $t=-x$ فإن : $y=x$.

إذن التكامل يُصبح : $g(-x) = \int_0^{-x}\varphi(t)\,dt = \int_0^{x}\varphi(-y)\,(-dy)$

$$= \int_0^x -\varphi(y)\,(-dy) \quad ; \; car\ \varphi\ est\ impaire$$

$$= \int_0^x \varphi(y)\,dy = g(x)$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \; ; \; g(-x)=g(x)$

و هذا يعني أن الدالة g دالة زوجية .

التمرين الرابع II 2 ب

تذكير : إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و كان a عنصرا من I

فإن الدالة $\boxed{\begin{array}{rcl} F : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}}$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على المجال I و التي تنعدم في a .

أو بتعبير آخر نكتب : $\begin{cases} F(a)=0 \\ (\forall x\epsilon I) \; ; \; F'(x)=f(x) \end{cases}$

لدينا φ دالة متصلة على $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

و 0 عنصر من المجال $]-\infty,+\infty[$.

إذن الدالة : $\boxed{\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \int_0^x \varphi(t)\,dt \end{array}}$

هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم في 0 .

أي : $\begin{cases} g(0)=0 \\ (\forall x\epsilon\mathbb{R}) \; ; \; g'(x)=\varphi(x) \end{cases}$ و بالتالي g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \; ; \; g'(x)=\varphi(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x}$

التمرين الرابع II 2 ج

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \; ; \; g'(x)=\varphi(x)$

نستنتج إذن إشارة $g'(x)$ انطلاقا من إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$		$+$	$\Vert$	$+$		$-$	
φ	0	$\searrow$	$\frac{-2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$	$\searrow$	0
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
g	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$	$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

التمرين الرابع II 3 أ

في البداية لدينا : $\int_1^x\left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = \int_1^x \underbrace{\left(\frac{1}{t}\right)}_{u'}\cdot\underbrace{(\ln t)}_{v}\,dt$

$$= [(\ln t)^2]_1^x - \int_1^x\left(\frac{\ln t}{t}\right)dt$$

$$= (\ln x)^2 - \int_1^x\left(\frac{\ln t}{t}\right)dt$$

$$\Rightarrow \int_1^x\left(\frac{\ln t}{t}\right)dt + \int_1^x\left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = (\ln x)^2$$

$$\Rightarrow 2\int_1^x\left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = (\ln x)^2$$

$$\Rightarrow \int_1^x\left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$\Rightarrow I = 2\int_1^x\left(\frac{\ln t}{t}\right)dt = (\ln x)^2$$

التمرين الرابع II 3 ب

ليكن $x\geq 1$. من جهة أولى لدينا :

$$\int_1^x\varphi(t)\,dt = [g(t)]_1^x \; ; \; car \; \Big| \begin{array}{l} g\ est\ une\ primitive \\ de\ \varphi\ sur\ [1,+\infty[\end{array}$$

$$= \boxed{g(x)-g(1)} \quad (1)$$

من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned}\int_1^x \varphi(t)\,dt &= \int_1^x \left(\frac{\ln(t^2+1)}{t}\right)dt \\ &= \int_1^x \left(\frac{\ln\left(t^2\cdot\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right)}{t}\right)dt \\ &= \int_1^x \left(\frac{\ln(t^2)}{t}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{t}\right)dt \\ &= 2\int_1^x \left(\frac{\ln t}{t}\right)dt + \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt \\ &= \boxed{(\ln x)^2 + \int_1^x \left(\frac{1}{t}\right)\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt} \quad (2)\end{aligned}$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$(\forall x \geq 1)\ ;\ g(x)-g(1) = (\ln x)^2 + \int_1^x \tfrac{1}{t}\ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right)dt$$

التمرين الرابع II 3 ج

للإجابة على هذا السؤال ندرس تغيرات الدالة العددية u المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي : $u(x) = \ln(1+x) - x$.

في البداية نلاحظ أن u متصلة و قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$

لأنها عبارة عن فرق دالتين متصلتين و قابلتين للاشتقاق على $]-1,+\infty[$

$$\boxed{(\forall x > -1)\ ;\ u'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}}$$

نلاحظ أن إشارة $u'(x)$ متعلقة فقط بإشارة x

لأن $(\forall x > -1)\ ;\ \frac{-1}{1+x} < 0$

و نضيف كذلك نهايتي u عند محدات مجموعة تعريفها

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to(-1)^+} u(x) &= \lim_{x\to(-1)^+} (\ln(1+x)-x) \\ &= \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ t=1+x}} (\ln t - t + 1) \\ &= -\infty - 0 + 1 = -\infty\end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} u(x) &= \lim_{x\to+\infty} (\ln(1+x)-x) \\ &= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=1+x}} (\ln t - t + 1) \\ &= \lim_{t\to+\infty} t\left(\frac{\ln t}{t} - 1 + \frac{1}{t}\right) \\ &= (+\infty)(0-1-0) = -\infty\end{aligned}$$

و نرسم جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	-1		0		$+\infty$
x	‖	$-$	0	$+$	
$u'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
u	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

من هذا الجدول نستغل تناقصية الدالة u على $[0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} x\geq 0 &\Rightarrow u(x) \leq u(0)\ ;\ car\ u\ est\ \searrow\ sur\ [0,+\infty[\\ &\Rightarrow u(x) \leq 0\ ;\ car\ u(0)=0 \\ &\Rightarrow \ln(1+x) - x \leq 0 \\ &\Rightarrow \ln(1+x) \leq x\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall\, x \geq 0)\ ;\ \ln(1+x) \leq x}\ (*)$

التمرين الرابع II 3 د

من جهة أولى لدينا :

$$\begin{aligned} t \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{t^2} > 0 \\ &\Rightarrow \left(1+\frac{1}{t^2}\right) > 1 \\ &\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) > 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) > 0\ ;\ car\ t \geq 1 \\ &\Rightarrow \boxed{\int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt \geq 0}\quad (1)\end{aligned}$$

$car\ :\ \left|\begin{array}{l} 1 \leq x\ \ et\ \ \frac{1}{t}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \\ est\ continue\ sur\ [1,+\infty[\end{array}\right.$

و من جهة ثانية لدينا :

$$\begin{aligned} t \geq 1 &\Rightarrow \frac{1}{t^2} > 0 \\ &\Rightarrow \ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right) \leq \tfrac{1}{t^2}\ ;\ d'après(*) \\ &\Rightarrow \tfrac{1}{t}\ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right) \leq \tfrac{1}{t^3}\ ;\ car\ t \geq 1 > 0 \\ &\Rightarrow \int_1^x \tfrac{1}{t}\ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right)dt \leq \int_1^x \left(\frac{1}{t^3}\right)dt\end{aligned}$$

$car\ ces\ deux\ fonctions\ sont\ continues\ et\ 1 \leq x$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int_1^x \left(\tfrac{1}{t}\ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right)\right)dt \leq \left[\frac{1}{-2t^2}\right]_1^x \\ &\Rightarrow \int_1^x \left(\tfrac{1}{t}\ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right)\right)dt \leq \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$Comme\ \ \dfrac{1}{2x^2} \geq 0\ \ Alors\ \ \dfrac{-1}{2x^2} \leq 0$

$D'où\ \ \boxed{\dfrac{-1}{2x^2} + \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2}}\ \ (\star)$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^x \left(\tfrac{1}{t}\ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right)\right)dt \leq \frac{1}{2}}\quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall\, x \geq 1)\ ;\ 0 \leq \int_1^x \left(\tfrac{1}{t}\ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right)\right)dt \leq \frac{1}{2}}$$

التمرين الرابع II 3 ه

لدينا : $(\forall\, x \geq 1)\ ;\ 0 \leq \int_1^x \left(\tfrac{1}{t}\ln\left(1+\tfrac{1}{t^2}\right)\right)dt \leq \dfrac{1}{2}$

إذن حسب نتيجة السؤال 3) ب) نكتب :

$$\boxed{0 \leq g(x) - g(1) - (\ln x)^2 \leq \frac{1}{2}}$$

ما يهمني في هذا التأطير هو الشق الأيسر فقط .

$$\boxed{0 \leq g(x) - g(1) - (\ln x)^2}$$

أي : $\boxed{g(x) \geq g(1) + (\ln x)^2}$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(g(1)+(\ln x)^2\right) = g(1)+(+\infty) = +\infty$

إذن نحصل على الوضعية التالية :

$$g(x) \geq \underbrace{g(1)+(\ln x)^2}_{x\to+\infty}\ \to +\infty$$

إذن حسب خاصيات الترتيب و النهايات نكتب : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

و بنفس الطريقة ، لكن هذه المرة ننطلق من التأطير السابق بأكمله .

$$\boxed{0 \leq g(x)-g(1)-(\ln x)^2 \leq \frac{1}{2}}$$

و نضرب جميع الأطراف في العدد الموجب $\frac{1}{x}$ نحصل على :

$$\boxed{0 \leq \frac{g(x)}{x}-\frac{g(1)}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{1}{2x}}$$

نضيف إلى جميع الأطراف الكمية $\left(\frac{g(1)}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$ نجد :

$$(\blacksquare)\quad \boxed{\left(\frac{g(1)}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right) \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{1}{2x}+\frac{g(1)}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}$$

نحتاج إلى حساب النهاية : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= 4\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$= 4\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\sqrt{x}}}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 4\times 0^2 = 0$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(1)}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right) = 0+0 = 0$

و كذلك : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}+\frac{g(1)}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right) = 0+0+0 = 0$

إذن التأطير ■ يُصبح :

$$\boxed{\underbrace{\left(\frac{g(1)}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}_{x\to+\infty\ \to\ \mathbf{0}} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2x}+\frac{g(1)}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}_{x\to+\infty\ \to\ \mathbf{0}}}$$

و منه حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 0}$

و من النهايتين : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 0}$

نستنتج أن منحنى الدالة g يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

التمرين الرابع III 1

لدينا حسب ما سبق : $(*)$ $\boxed{(\forall\, x \geq 0)\ ;\ \ln(1+x) \leq x}$

ليكن k عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{k} > 0$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}\quad ;\ d'après\ (*)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \ln(1+k)-\ln k < \frac{1}{k}$$

التمرين الرابع III 2

من جهة أولى لدينا :

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{2}{k}\cdot\frac{k}{k+1}-\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2}{k+1}-\left(\ln(1+k)-\ln k\right)}\quad (\otimes)$$

من جهة ثانية لدينا من أجل كل عدد k من $\mathbb{N}^*$: $\ln(1+k)-\ln k < \frac{1}{k}$

إذن من أجل العدد $(k+1)$ من $\mathbb{N}^*$ نجد :

$$\ln(2+k)-\ln(1+k) < \frac{1}{k+1}$$

نضرب الطرفين في العدد الموجب 2 نجد :

$$2\ln(2+k)-2\ln(1+k) < \frac{2}{k+1}$$

نُضيف إلى كلا الطرفين الكمية $-\left(\ln(1+k)-\ln k\right)$ فنحصل على :

$$2\ln(2+k)-3\ln(1+k)+\ln k < \frac{2}{k+1}-\left(\ln(1+k)-\ln k\right)$$

إذن حسب النتيجة $\otimes$ نستنتج أن :

$$\boxed{2\ln(2+k)-3\ln(1+k)+\ln k < f\left(\frac{1}{k}\right)}\quad (\ominus)$$

و من هذه النتيجة $\ominus$ نكتب :

$$\left(2\ln(2+k)-2\ln(1+k)\right)-\left(\ln k-\ln(1+k)\right) < f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right)-\left(\ln(1+k)-\ln k\right) < f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{2\ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right)-\ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < f\left(\frac{1}{k}\right)}\quad (\#)$$

التمرين الرابع III 3

ليكن k و n عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .

لدينا : $2\ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right)-\ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < f\left(\frac{1}{k}\right)$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(2\ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right)-\ln\left(\frac{1+k}{k}\right)\right) < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{2\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1+k}{k}\right) < S_n}\quad (*)$$

من جهة أولى لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2+k}{1+k}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{2+n}{1+n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{2+n}{1+n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2+n}{2}\right)$$

من جهة ثانية لدينا :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1+k}{k}\right) = \ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{1+n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{1+n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1+n}{1}\right) = \ln(1+n)$$

إذن عند الرجوع إلى الكتابة $(*)$ نحصل على :

$$2\ln\left(\frac{2+n}{2}\right) - \ln(1+n) < S_n$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\left(\frac{2+n}{2}\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{1+n}\right) < S_n$$

$$\Leftrightarrow\ \ln\left(\left(\frac{2+n}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{1+n}\right)\right) < S_n$$

$$\Leftrightarrow\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ \ln\left(\frac{(2+n)^2}{4(n+1)}\right) < S_n$$

لدينا : $\lim\limits_{n\infty} \ln\left(\frac{(2+n)^2}{4(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\infty} \ln\left(\frac{n^2+4n+4}{4n+4}\right) = +\infty$

$$car\ :\ \boxed{\lim_{n\infty}\left(\frac{n^2}{4n}\right) = +\infty}\quad et\quad \boxed{\lim_{m\infty} \ln m = +\infty}$$

و بالتالي نحصل على الوضعية التالية : $\underbrace{\ln\left(\frac{(2+n)^2}{4(n+1)}\right)}_{\substack{n\infty \\ \downarrow \\ +\infty}} < S_n$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(S_n) = +\infty}$

التمرين الرابع IV 1

ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$.

سوف نستعمل في هذا السؤال قاعدة مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها المخالف لـ 1 .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

$$\boxed{(\forall\, q \neq 1)\ ;\ 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

نعتبر المتتالية الهندسية التي أساسها $(-x)$ المخالف لـ 1 .

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + (-x) + (-x)^2 + \cdots + (-x)^n = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{k=0}^{n} (-x)^k\, x^k = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{1+x}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{1+x} = \left(\sum_{k=0}^{n} (-x)^k\, x^k\right) + \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{1+x}$$

التمرين الرابع IV 2

$$\boxed{\frac{1}{1+t} = \left(\sum_{p=0}^{n} (-x)^p\, t^p\right) + \frac{(-1)^{n+1}\cdot t^{n+1}}{1+t}}$$

كلا الطرفين عبارة عن دالتين متصلتين على $[0,x]$ حيث $x \in\,]0,1[$.

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1+t}\right) dt = \int_0^x \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, t^p + \frac{(-1)^{n+1}\cdot t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$[\ln|1+t|]_0^x = \int_0^x \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, t^p\right) dt + \int_0^x \left(\frac{(-1)^{n+1}\cdot t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$\ln(1+x) = \sum_{p=0}^{n} \left((-1)^p \int_0^x t^p\, dt\right) +$$

$$\ln(1+x) = \sum_{p=0}^{n} \left((-1)^p \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^x\right) + (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$\ln(1+x) = \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{(-1)^p\, x^{p+1}}{p+1}\right) +$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k}\right) + (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

التمرين الرابع IV 3

نطلق من العلاقتين التاليتين :

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x} = 2x\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k + \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x}\right) \\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k}\right) + (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$$

$$= 2x\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k + \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x}\right) - \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k}\right) - $$

$$- (-1)^{n+1} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k\, x^{k+1} + \frac{2(-1)^{n+1}\, x^{n+2}}{1+x} - \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k}\right) +$$

$$+ (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} -2(-1)^{k+1}\, x^{k+1} + \frac{2(-1)^{n+1}\, x^{n+2}}{1+x} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^k\, x^k}{k}\right) + (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} -2(-1)^k\, x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{(-1)^k\, x^k}{k}\right)\right) + \frac{2(-1)^{n+1}\, x^{n+2}}{1+x} +$$

$$+ (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(-2 + \frac{1}{k}\right) (-1)^k\, x^k\right) + \frac{2(-1)^{n+1}\, x^{n+2}}{1+x} +$$

$$+ (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1-2k}{k}\right) (-1)^k\, x^k\right) + \frac{2(-1)^{n+1}\, x^{n+2}}{1+x} +$$

$$+ (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)\left(\frac{2k-1}{k}\right) (-1)(-1)^{k-1}\, x^k\right) + \frac{2(-1)^{n+1}\, x^{n+2}}{1+x} +$$

$$+ (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2k-1}{k}\right) (-1)^{k-1}\, x^k\right) + \frac{2(-1)^{n+1}\, x^{n+2}}{1+x} +$$

$$+ (-1)^{n+2} \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{1+t}\right) dt$$

التمرين الرابع — IV 4 أ

من جهة أولى ، لدينا من أجل $x \in]0,1[$:

$$t \in [0,x] \;\Rightarrow\; t \geq 0$$
$$\Rightarrow\; t^{n+1} \geq 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow\; \frac{t^{n+1}}{t+1} \geq 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow\; \boxed{\int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \geq 0} \quad (1)$$

car la condition de la continuité est vérifiée et $0 \leq x$

من جهة ثانية لدينا من أجل $x \in [0,x]$:

$$t \in [0,x] \;\Rightarrow\; t \leq x$$
$$\Rightarrow\; t^{n+1} \leq x^{n+1} \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow\; \frac{t^{n+1}}{t+1} \leq \frac{x^{n+1}}{t+1} \quad ; \quad t \geq 0$$
$$\Rightarrow\; \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \leq \int_0^x \left(\frac{x^{n+1}}{t+1}\right) dt$$

car ces deux fonctions sont continues sur $[0,x]$ *et que* $0 < x$

$$\Rightarrow\; \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \leq x^{n+1} \int_0^x \left(\frac{1}{t+1}\right) dt$$
$$\Rightarrow\; \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \leq x^{n+1} [\ln|t+1|]_0^x$$
$$\Rightarrow\; \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \leq x^{n+1} \cdot \ln(x+1)$$
$$\Rightarrow\; \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \leq x^{n+1} \cdot x$$

car : $\forall\, x \geq 0 \;;\; \ln(1+x) \leq x$

$$\Rightarrow\; \boxed{\int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \leq x^{n+2}} \quad (2)$$

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $0 \leq \displaystyle\int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \leq x^{n+2}$

التمرين الرابع — IV 4 ب

نلاحظ أن (x^{n+2}) عبارة عن متتالية هندسية أساسها x عدد حقيقي موجب و أصغر من 1 . إذن : $\lim\limits_{n\infty}(x^{n+2}) = 0$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\boxed{\underbrace{0}_{\substack{n\infty \\ \downarrow \\ 0}} \leq \int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \leq \underbrace{x^{n+2}}_{\substack{n\infty \\ \downarrow \\ 0}}}$$

إذن حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\boxed{\lim_{n\infty} \left(\int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{t+1}\right) dt \right) = 0}$$

التمرين الرابع — IV 4 ج

ليكن x عنصرا من المجال $]0,1[$. و m عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{2k-1}{k}\right) (-1)^{k-1} x^k \right) + \frac{2(-1)^{m+1} x^{m+2}}{1+x} + \\ + (-1)^{m+2} \int_0^x \left(\frac{t^{m+1}}{1+t}\right) dt$$

Ensuite , on fait tendre m vers $+\infty$ *and we get*

$$\lim_{m\infty} f(x) = \lim_{m\infty} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \left(\frac{2k-1}{k}\right) (-1)^{k-1} x^k \right) + \\ + \lim_{m\infty} \left(\frac{2(-1)^{m+1} x^{m+2}}{1+x} \right) + \\ + \lim_{m\infty} (-1)^{m+2} \int_0^x \left(\frac{t^{m+1}}{1+t}\right) dt$$

$$= \lim_{\substack{n\infty \\ n=m+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{k}\right) (-1)^{k-1} x^k \right) + \left(\frac{2(\pm 1)}{1+x}\right)(0) + \\ + (\pm) \underbrace{\lim_{m\infty} \int_0^x \left(\frac{t^{m+1}}{1+t}\right) dt}_{=0}$$

$$\Rightarrow\; \lim_{m\infty} f(x) = \lim_{n\infty} f(x) = \lim_{n\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{k}\right) (-1)^{k-1} x^k \right)$$

$$\Rightarrow\; \boxed{f(x) = \lim_{n\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{k}\right) (-1)^{k-1} x^k \right)}$$

En d'autres termes : la série de fonctions $\sum f_n(x)$ *Converge vers la fonction somme* $f(x)$ *sur l'intervalle* $]0,1[$

(Cours des fonctions Analytiques)

أجوبة امتحان مدينة آسفي 2010

التمرين الأول 1 أ

$J = M(0,1) \in E \;;\; car \;\; (0,1) \in \mathbb{R}^2$

$I = M(1,0) \in E \;;\; car \;\; (1,0) \in \mathbb{R}^2$

التمرين الأول 1 ب

$E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad et \quad E \neq \emptyset$

$M(x,y) + M(x',y') = M(x+x' \;;\; y+y')$

التمرين الأول 2 أ

$J^2 = J - I \;;\; simple \;\; calcul \;\; matriciel$

التمرين الأول 2 ب

$E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad et \quad E \neq \emptyset$

$$M(x,y) \times M(x',y') = (xI+yJ) \times (x'I + y'J) = M(xx' - yy' \;;\; xy' + yx' + yy') \in E$$

التمرين الأول 3

يكفي أن نستغل استقرار E في المجموعتين السابقتين و نبين أن :

- $+$ و $\times$ قانوني تركيب داخليين في E .
- $(E,+)$ زمرة تبادلية
- القانون $\times$ تجميعي في $(E,\times)$
- القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$
- القانون $\times$ تبادلي

التمرين الأول 4 أ

The implication bellow is obvious :

$$\boxed{x = y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + xy + y^2 = 0}$$

What about the other ?

On the one hand we have :

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \;\left|\; \begin{aligned} &\Rightarrow \; x^2 + y^2 = -xy \\ &\Rightarrow \; -xy \geq 0 \\ &\Rightarrow \; \boxed{xy \leq 0} \;\; (1) \end{aligned}\right.$$

On the other hand we're gonna get :

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \;\left|\; \begin{aligned} &\Rightarrow \; (x+y)^2 = xy \\ &\Rightarrow \; \boxed{xy \geq 2} \;\; (2) \end{aligned}\right.$$

$$(1) \;\; et \;\; (2) \;\left|\; \begin{aligned} &\Rightarrow \; xy = 0 \\ &\Rightarrow \; \boxed{x = 0 \quad or \quad y = 0} \end{aligned}\right.$$

if only one of those is different to 0

then $x^2 + xy + y^2 \neq 0$ it's too bad !

So both x and y must be equal to zero

That's why $x = y = 0$

التمرين الأول 4 ب

$$M(x,y) \times M\left(\frac{x+y}{\Delta} \;;\; \frac{-y}{\Delta}\right) = M(1,0) = I \;\;;\;\; it's \; easy \; !$$

التمرين الأول 4 ج

يكون $(E,+,\times)$ جسما تبادليا إذا و فقط إذا كان :

- $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية .
- كل عنصر من E ماعدا $M(0,0)$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون $\times$.

الشرط الأول نحصل عليه من خلال ما سبق. أما الشرط الثاني فسوف نستعمل من أجله التكافؤ الوارد في السؤال 4) أ) و كذلك نتيجة السؤال ب) (التماثل) .

التمرين الأول 5 أ

φ تشاكل من $(F,\top)$ نحو $(E,\times)$

لأن : $\varphi\big((x,y) \top (x',y')\big) = \varphi(x,y) \times \varphi(x',y')$

و سوف نستعمل من أجل ذلك النتيجة التالية :

$$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' - yy' \;;\; xy' + yx' + yy')$$

أما التقابل فهو سهل لأن المعادلة $\varphi(x,y) = M(a,b)$ ذات المجهول (x,y) تقبل حلا وحيدا في F و هو الزوج (a,b) حيث $M(a,b)$ عنصر من E .

التمرين الأول 5 ب

صورة الزمرة التبادلية $(E,\times)$ بالتشاكل التقابلي φ^{-1} هي الزمرة التبادلية $(F,\top)$.

يعني : $\varphi^{-1}(E,\times) = (F,\top)$

نستنتج إذن مميزات $(F,\top)$ انطلاقا من مميزات $(E,\times)$.

إذن : $(F,\top)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج $\varphi^{-1}\big(M(1,0)\big) = (1,0)$. و كل زوج (x,y) يقبل مماثلا في F و هو الزوج $\left(\frac{x+y}{\Delta} \;;\; \frac{-y}{\Delta}\right) = \varphi^{-1}\left(M\left(\frac{x+y}{\Delta} \;;\; \frac{-y}{\Delta}\right)\right)$.

التمرين الثاني 1 أ

simple calcul

التمرين الثاني 1 ب

l'équation (E) admet deux solutions :

$$m(i - \sqrt{3}) \quad et \quad 2m$$

التمرين الثاني 1 ج

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{m(i-\sqrt{3})}{2m} = e^{\frac{i5\pi}{6}}$$

التمرين الثاني 2 أ

$$(z' - 0) = e^{\frac{i5\pi}{6}}(z - 0)$$

$\Leftrightarrow$ F est une rotation de centre O et d'angle $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

التمرين الثاني 2 ب

l'image du cercle $(\mathcal{C})$ est le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre

$$\Omega'\left(-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\right) \quad et \; du \; même \; rayon \; 2$$

التمرين الثاني 3 أ

soit à prouver la véracité du prédicat suivant :

$$\boxed{(P_n) \;:\; z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}}$$

le test de départ est trivial

car $z_0 = aff(M_0) = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi 0}{6}\right)} = i$

On suppose que (P_n) est vraie pour un certain entier naturel n fixé

$$M_{n+1} = F(M_n) \;\left|\; \begin{aligned} &\Leftrightarrow \; z_{n+1} = e^{\frac{5i\pi}{6}} \cdot z_n \\ &\Leftrightarrow \; z_{n+1} = e^{\frac{5i\pi}{6}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)} \\ &\Leftrightarrow \; z_{n+1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi(n+1)}{6}\right)} \end{aligned}\right.$$

$$Ainsi \;:\; \begin{cases} (P_0) \;\; est \; vraie \\ (P_n) \;\Rightarrow\; (P_{n+1}) \;;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$d'où \;:\; (\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6}\right)}$$

$pour\ l'implication\ inverse\ on\ a:$

$$\begin{cases} x \equiv x_0\ [60] \\ x_0\ sol\ de\ (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv x_0\ [60] \\ x_0 \equiv 0\ [12] \\ x_0 \equiv 3\ [5] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0\ [12] \\ x \equiv 3\ [5] \end{cases}$$
$$\Rightarrow\ x\ est\ solution\ de\ (S)$$

التمرين الثاني 4 د

$On\ choisit\ tout\ d'abord\ une\ solution\ particulière\ de\ l'équation\ (E)\ parmis\ les\ couples:$

$$\{(5k-6\ ;\ 12k-15)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

$Pour\ k=1\ on\ obtient\ (k_0,l_0)=(-1,-3)$

$d'où\ \ x_0 = 12k_0 = -12$

$$x\ est\ solution\ de\ (S) \Leftrightarrow x = x_0\ [60]$$
$$\Leftrightarrow x \equiv -12\ [60]$$
$$\Leftrightarrow x = 60k-12\ ;\ k\epsilon\mathbb{N}$$

التمرين الثاني 5

$$R_n = \{n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ n\equiv 0\ [12]\ \ et\ \ n\equiv 3[5]\}$$
$$= \{n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ n = 60k-12\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$
$$= \{n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ n = 60k-12 \geq 0\}$$
$$= \{60k-12\ ;\ k\ \epsilon\ \mathbb{N}^*\}$$

التمرين الثالث I 1 أ

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	+	
g_n	$-\infty$ ↗	$+\infty$

التمرين الثالث I 1 ب

لدينا : $g_n(1)=0$

لدراسة إشارة $(x-1)\,g_n(x)$ ناقش الحالتين $x\geq 1$ و $0<x\leq 1$

ثم استغل تزايدية الدالة g_n على المجال $]0,+\infty[$.

و كذلك كون $g_n(1)=0$ و سوف تحصل على الجدول التالي :

x	0	1	$+\infty$
$g_n(x)$	$-$	0	+

التمرين الثالث I 2 أ

$it's\ an\ easy\ calculus\ ,just\ do\ it$

$$f_n'(x) = n(x-1)^{n-1}\ln x + \frac{(x-1)^n}{x}$$
$$= (x-1)^{n-1}\left(n\ln x + \frac{x-1}{x}\right)$$
$$= (x-1)^{n-1}\,g_n(x)$$

التمرين الثاني 3 ب

$$n\equiv p\ [12] \Leftrightarrow n = p+12k\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi p}{6}+10k\pi\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi p}{6}\right)}$$
$$\Leftrightarrow z_n = z_p$$
$$\Leftrightarrow M_n = M_p$$

التمرين الثاني 3 ج

$$S = \{(5k-6\ ;\ 12k-15)\ ;\ k\epsilon\mathbb{Z}\}$$

المراحل المتبعة تجدونها في الامتحانات السابقة في هذا الكتاب .

التمرين الثاني 3 د

$$M_n\ \epsilon\ (O,\vec{u}) \Leftrightarrow z_n\ \epsilon\ \mathbb{R}^+$$
$$\Leftrightarrow e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right)}\ \epsilon\ \mathbb{R}^+$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right) \equiv 0\ [2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi n}{6}\right) = 2m\pi\ ;\ \begin{vmatrix} m\epsilon\mathbb{Z} \\ n\epsilon\mathbb{N} \end{vmatrix}$$
$$\Leftrightarrow 3\pi + 5\pi n = 12m\pi\ ;\ \begin{vmatrix} m\epsilon\mathbb{Z} \\ n\epsilon\mathbb{N} \end{vmatrix}$$
$$\Leftrightarrow 12m - 5n = 3\ ;\ \begin{vmatrix} m\epsilon\mathbb{Z} \\ n\epsilon\mathbb{N} \end{vmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 5k-6 \\ n = 12k-15 \end{cases}\ ;\ \begin{vmatrix} m\epsilon\mathbb{Z} \\ n\epsilon\mathbb{N} \\ k\epsilon\mathbb{Z} \end{vmatrix}$$

$$n\ \epsilon\ \mathbb{N} \Rightarrow 12k-15\geq 0$$
$$\Rightarrow k \geq \frac{15}{12} \approx 1{,}25$$
$$\Rightarrow k\geq 2$$

$$\Leftrightarrow n = 12k-15\ ;\ avec\ \ k\ \epsilon\ \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$$

التمرين الثاني 4 أ

$$(k_0,l_0)\ est\ solution\ de\ (E) \Leftrightarrow \begin{cases} 12\,k_0 - 5\,l_0 = 3 \\ x_0 = 12\,k_0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 5l_0 = 3 \\ x_0 = 12\,k_0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 3 = 5\,l_0 \\ x_0 = 12\,k_0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \equiv 3\ [5] \\ x_0 \equiv 0\ [12] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x_0\ est\ solution\ de\ (S)}$$

التمرين الثاني 4 ب

$soit\ à\ démontrer\ l'équivalence\ suivante:$

$$\boxed{x\ est\ solution\ de\ (S) \Leftrightarrow x\equiv x_0\ [60]}$$

$$\begin{cases} x\ sol\ de\ (S) \\ x_0\ sol\ de\ (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\equiv 0\ [12]\ \ et\ \ x_0\equiv 0\ [12] \\ x\equiv 3\ [5]\ \ et\ \ x_0\equiv 3\ [5] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (x-x_0)\equiv 0\ [12] \\ (x-x_0)\equiv 0\ [5] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 12/(x-x_0) \\ 5/(x-x_0) \end{cases}$$
$$\Rightarrow 12\times 5/(x-x_0)\ ;\ car\ 12\wedge 5 = 1$$
$$\Rightarrow 60/(x-x_0)$$
$$\Rightarrow x\equiv x_0\ [60]$$

التمرين الثالث I 2 ب

si n est pair :

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ n\ pair}} (x-1)^n \ln x = "(1)(-\infty)" = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ n\ pair}} (x-1)^n \ln x = +\infty$$

x	0		1		$+\infty$
$g_n(x)$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^{n-1}$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

si n est impair :

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ n\ impair}} (x-1)^n \ln x = "(-1)(-\infty)" = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ n\ impair}} (x-1)^n \ln x = "(+\infty)(+\infty)" = +\infty$$

x	0		1		$+\infty$
$g_n(x)$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^{n-1}$		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين الثالث I 2 ج

في حالة n عدد زوجي أو n عدد فردي لدينا :

$$\left(\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = \pm\infty\right) \Leftrightarrow \left(\text{محور الأراتيب مقارب عمودي للمنحنى } (\mathcal{C}_n) \text{ على يمين}\right)$$

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$

و لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f_n(x)}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(x-1)^n}{x}\right) \ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^n}{x}\right) \times \lim_{x \to +\infty} \ln x$$

$$= (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$$

إذن $(\mathcal{C}_n)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ كيفما كانت زوجية العدد n .

التمرين الثالث I 2 د

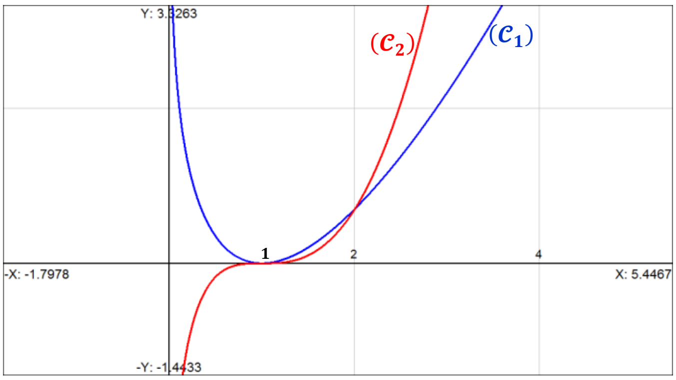
si n est pair :

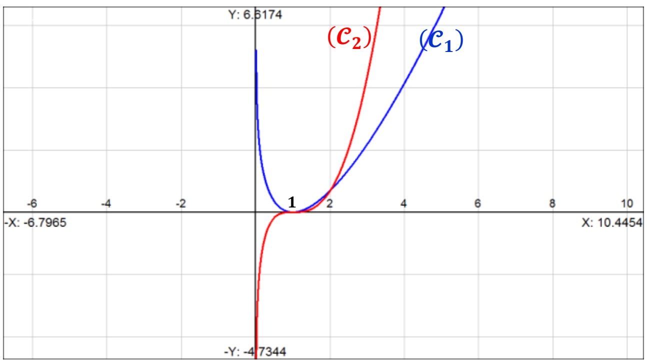
x	0		1		2		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$+$		$+$	
$(x-1)^n$		$+$		$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$		$+$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		$+$		$-$		$+$	

si n est impair :

x	0		1		2		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$+$		$+$	
$(x-1)^n$		$-$		$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$		$+$	
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$		$-$		$-$		$+$	

التمرين الثالث I 3





التمرين الثالث I 4

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f_1(x) - f_2(x)|\ dx$$

$$= \int_1^2 |f_1(x) - f_2(x)|\ dx + \int_2^e |f_1(x) - f_2(x)|\ dx$$

$$= \int_1^2 \left(f_1(x) - f_2(x)\right)\ dx + \int_2^e \left(f_2(x) - f_1(x)\right)\ dx$$

$$= \int_1^2 \left(f_1(x) - f_2(x)\right)\ dx + \int_2^e \left(f_2(x) - f_1(x)\right)\ dx$$

$$= \int_1^2 f_1(x)\,dx - \int_1^2 f_2(x)\,dx + \int_2^e f_2(x)\,dx - \int_2^e f_1(x)\,dx$$

$$= \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4$$

$$\mathcal{A}_1=\int_1^2 f_1(x)\,dx=\int_1^2 \underbrace{(x-1)}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^2-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^2$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+x\right]_1^2=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\mathcal{A}_2=\int_1^2 f_2(x)\,dx=\int_1^2 \underbrace{(x^2-2x+1)}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{3}-x+1\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\ln x-\left(\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{2\ln 2}{3}-\frac{8}{9}\right)+\frac{11}{18}=\boxed{\frac{2\ln 2}{3}-\frac{5}{18}}$$

$$\mathcal{A}_3=\int_2^e f_2(x)\,dx=\int_2^e \underbrace{(x^2-2x+1)}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\ln x\right]_2^e-\int_2^e\left(\frac{x^2}{3}-x+1\right)dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\ln x-\left(\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{2}+x\right)\right]_2^e$$

$$=\boxed{\frac{2\,e^3}{9}-\frac{e^2}{2}-\frac{2\ln 2}{3}+\frac{8}{9}}$$

$$\mathcal{A}_4=\int_2^e f_1(x)\,dx=\int_2^e \underbrace{(x-1)}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\,dx$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_2^e-\int_2^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx$$

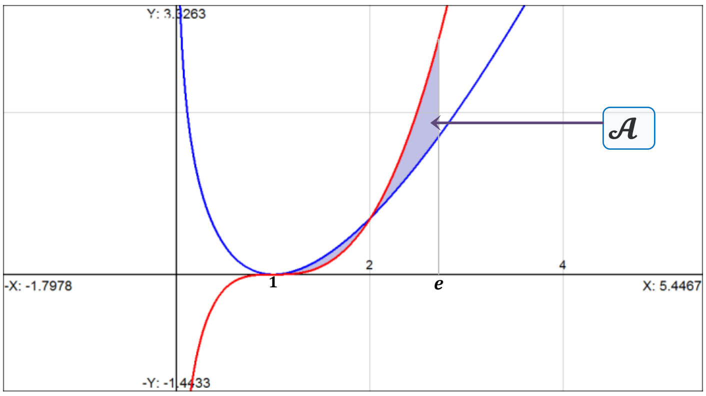
$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_2^e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_2^e$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}+x\right]_2^e=\boxed{\frac{e^2}{4}-1}$$

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1-\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3-\mathcal{A}_4$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{2\ln 2}{3}+\frac{5}{18}+\frac{2\,e^3}{9}-\frac{e^2}{2}-\frac{2\ln 2}{3}+\frac{8}{9}-\frac{e^2}{4}+1$$

$$=\frac{2\,e^3}{9}-\frac{3\,e^2}{4}-\frac{4\ln 2}{3}+\frac{29}{12}\approx\boxed{0{,}414}$$



التمرين الثالث II 1

$$x\in\,]0,1[\;\Rightarrow\; x<1$$
$$\Rightarrow\; x^2<x\;\;;\;avec\;\;x\;positif$$
$$\Rightarrow\;(\exists t\in\mathbb{R})\;;\;x^2\le t\le x$$
$$\Rightarrow\;\ln(x^2)\le\ln t\le\ln x\;\;;\;t-1\neq 0$$
$$\Rightarrow\;2\ln x\le\frac{(t-1)\ln t}{(t-1)}\le\ln x\;\;;\;t-1\neq 0$$
$$\Rightarrow\;2\ln x\le\frac{f_1(t)}{(t-1)}\le\ln x$$

$$\Rightarrow\;\frac{2\ln x}{(t-1)^3}\ge\frac{f_1(t)}{(t-1)^4}\ge\frac{\ln x}{(t-1)^3}\;\;;\;car\;\;\frac{1}{(t-1)^3}<0$$

$$\Rightarrow\;\int_x^{x^2}\frac{2\ln x}{(t-1)^3}dt\le\int_x^{x^2}\frac{f_1(t)}{(t-1)^4}dt\le\int_x^{x^2}\frac{\ln x}{(t-1)^3}dt$$

$car\;ces\;fonctions\;sont\;continues\;et\;\;x>x^2$

$$\Rightarrow\;2\ln x\int_x^{x^2}\frac{dt}{(t-1)^3}\le F(x)\le\ln x\int_x^{x^2}\frac{dt}{(t-1)^3}$$

التمرين الثالث II 2 أ

$$\int_x^{x^2}\frac{dt}{(t-1)^3}=\int_x^{x^2}(t-1)^{-3}\,dt=\left[\frac{-1}{2(t-1)^2}\right]_x^{x^2}$$

$$=\frac{-1}{2(x^2-1)^2}+\frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x}{2(x^2-1)^2}$$

التمرين الثالث II 2 ب

$$2\ln x\int_x^{x^2}\frac{dt}{(t-1)^3}\le F(x)\le\ln x\int_x^{x^2}\frac{dt}{(t-1)^3}$$

$$\Rightarrow\;\boxed{\frac{(x^2+2x)\ln x}{(x^2-1)^2}\le F(x)\le\frac{(x^2+2x)\ln x}{2(x^2-1)^2}}$$

التمرين الثالث II 2 ج

$$\underbrace{(x\ln x)}_{x\to 0^+:\;0}\cdot\underbrace{\left(\frac{x+2}{(x^2-1)^2}\right)}_{x\to 0^+:\;2}\le F(x)\le\underbrace{(x\ln x)}_{x\to 0^+:\;0}\cdot\underbrace{\left(\frac{x+2}{2(x^2-1)^2}\right)}_{x\to 0^+:\;1}$$

$$\Rightarrow\;\lim_{x\to 0^+}F(x)=0=F(0)$$
$$\Rightarrow\;F\;\;est\;\;continue\;\;à\;\;droite\;\;en\;\;0$$

التمرين الثالث II 2 د

$$F(x)\le\underbrace{\frac{(x^2+2x)}{2(x+1)^2}}_{x\to 1^-:\;\frac{3}{8}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}\right)}_{x\to 1^-:\;1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{x\to 1^-:\;-\infty}$$

$$\Rightarrow\;\boxed{\lim_{x\to 1^-}F(x)=-\infty}$$

هندسيا نقول أن منحنى الدالة F يقبل نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $(-1\,;F(-1))$ موجه نحو الأسفل .

التمرين الثالث II 4 أ

$$x \in]0,1[\implies F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{(t-1)^3}\,dt$$

$$\implies F(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt \quad ; \quad \varphi(t) = \frac{\ln t}{(t-1)^3}$$

$$\implies F(x) = \int_x^{a} \varphi(t)\,dt + \int_a^{x^2} \varphi(t)\,dt \quad ; \quad a \in]0,1[$$

$$\implies F(x) = \psi_a(x^2) - \psi_a(x)$$

$$avec\ : \begin{cases} \psi_a(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad ; \quad \forall\, x \in]0,1[\\ \psi_a'(x) = \varphi(x) \quad ; \quad \forall\, x \in]0,1[\end{cases}$$

φ *est continue sur* $]0,1[$ *comme étant quotient de deux fonctions continues et* $(t-1)^3 \neq 0$

$$\implies \boxed{F \text{ est dérivable sur }]0,1[}$$

$$car\ : \left| \begin{array}{l} x \longrightarrow x \ \text{ dérivable sur }]0,1[\\ x \longrightarrow x^2 \ \text{ dérivable sur }]0,1[\\ x \longrightarrow \psi_a(x) \ \text{ dérivable sur }]0,1[\end{array} \right.$$

$$\implies F'(x) = \left(\psi_a(x^2) - \psi_a(x)\right)' \quad ; \quad \forall\, x \in]0,1[$$

$$= 2x\,\psi_a'(x^2) - \psi_a'(x) \quad ; \quad \forall\, x \in]0,1[$$

$$= \frac{2x \cdot \ln(x^2)}{(x^2-1)^3} - \frac{\ln x}{(x-1)^2} \quad ; \quad \forall\, x \in]0,1[$$

$$\implies F'(x) < 0 \quad ; \quad \forall\, x \in]0,1[\ ; \begin{cases} \ln x < 0 \\ x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0 \\ (x^2-1)^3 < 0 \end{cases}$$

$$\implies \boxed{F \text{ est décroissante sur }]0,1[}$$

By analogy and by the same analysis we're gonna get the continuity on $]1,+\infty[$ *by choosing this time*

$$\psi_a(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad ; \quad \forall\, a \in]1,+\infty[$$

التمرين الثالث II 4 ب

$$F'(x) = \frac{-(x^3 + 3x^2 - x + 1)\ln x}{(x^2-1)^3} < 0$$

$$car \ : \ \forall\, x \in]0,1[\ ; \begin{cases} \ln x < 0 \\ x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0 \\ (x^2-1)^3 < 0 \end{cases}$$

$$et \ : \ \forall\, x \in]1,+\infty[\ ; \begin{cases} \ln x > 0 \\ x^3 + 3x^2 - x + 1 \geq 0 \\ (x^2-1)^3 > 0 \end{cases}$$

$$\implies F \text{ est décroissante sur }]0,1[\cup]1,+\infty[$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	$-$		$-$
F	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$

التمرين الثالث II 2 ه

$$\frac{F(x)}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{x+2}{2(x^2-1)^2}\right)}_{x \to 0^+ \ \to\ 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{x \to 0^+ \ \to\ -\infty}$$

$$\implies \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{F(x)}{x}\right) = -\infty$$

$$\implies \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0}\right) = -\infty \notin \mathbb{R}$$

$$\implies F \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0$$

التمرين الثالث II 3 أ

$$x > 1 \implies x^2 > x$$

$$\implies (\exists t \in \mathbb{R}) \ ; \ x \leq t \leq x^2$$

$$\implies \ln x \leq \frac{(t-1)\ln t}{(t-1)} \leq 2\ln x \quad ; \quad (t-1) \neq 0$$

$$\implies \ln x \leq \frac{f_1(t)}{(t-1)} \leq 2\ln x$$

$$\implies \frac{\ln x}{(t-1)^3} \leq \frac{f_1(t)}{(t-1)^4} \leq \frac{2\ln x}{(t-1)^3} \quad ; \quad \frac{1}{(t-1)^2} > 0$$

$$\implies \int_x^{x^2} \frac{\ln x}{(t-1)^3}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{f_1(t)}{(t-1)^4}\,dt \leq \int_x^{x^2} \frac{2\ln x}{(t-1)^3}\,dt$$

car ces fonctions sont continue et $x < x^2$

$$\implies \ln x \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3} \leq F(x) \leq 2\ln x \int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^3}$$

$$\implies \frac{(x^2+2x)\ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x)2\ln x}{2(x^2-1)^2}$$

$$\implies \boxed{\frac{(x^2+2x)\ \ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x)\ \ln x}{(x^2-1)^2}}$$

التمرين الثالث II 3 ب

$$x > 1 \implies \frac{(x^2+2x)\ \ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x)$$

$$\implies \underbrace{\left(\frac{x^2+2x}{2(x+1)^2}\right)}_{x \to 1^+ \ \to\ \frac{3}{8}} \underbrace{\left(\frac{\ln x - \ln 1}{x-1}\right)}_{x \to 1^+ \ \to\ 1} \underbrace{\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{x \to 1^+ \ \to\ +\infty} \leq F(x)$$

$$\implies \boxed{\lim_{x \to 1^+} F(x) = +\infty}$$

$$x > 1 \implies \frac{(x^2+2x)\ \ln x}{2(x^2-1)^2} \leq F(x) \leq \frac{(x^2+2x)\ \ln x}{(x^2-1)^2}$$

$$\implies \underbrace{\left(\frac{x^3+2x^2}{2x^4-4x^2+2}\right)}_{x \to +\infty \ \to\ 0} \underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{x \to +\infty \ \to\ 0} \leq F(x) \leq \underbrace{\left(\frac{x^3+2x^2}{2x^4-4x^2+2}\right)}_{x \to +\infty \ \to\ 0} \underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{x \to +\infty \ \to\ 0}$$

$$\implies \boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0}$$

أسأل الله لي و لكم الثبات و التوفيق

و السلام عليكم و رحمة الله و بركاته

الأستاذ بدر الدين الفاتحي

نونبر 2014